

# 全球位系数模型构建高精度局部重力场的 Clenshaw 求和

田 晋<sup>1</sup> 暴景阳<sup>1</sup> 刘雁春<sup>1</sup>

(1 海军大连舰艇学院海洋测绘系,大连市解放路 667 号,116018)

**摘 要:**给出了勒让德函数 4 种模式的 Clenshaw 求和公式,在此基础上得到由全球位系数模型计算重力场参数的二阶 Clenshaw 求和公式,分析了 EGM96 与 WDM94 应用于某试验测区局部重力场的精度,为该测区在构建高精度局部重力场时初始全球位系数模型的选取提供了借鉴。  
**关键词:**全球位系数模型;Clenshaw 求和;大地水准面差距  
**中图法分类号:**P223.0

为了构建与局部重力场最为吻合的高精度位系数模型,通常使用的是全球位模型局部改进法<sup>[1,2]</sup>。无论是初始位模型选取还是改正,很重要的一步是利用该模型计算局部重力场参数,而通常给定的全球位模型均是高阶位模型。为解决该问题,文献[3]首次提出位模型计算的一阶 Clenshaw 求和,其计算结果并未达到最简,并且新的位模型同文献[3]所引用的位模型在表达阶次上也有所不同。本文的目的是在新的全球位模型的基础上推导重力场参数计算的二阶 Clenshaw 求和,以进一步提高运算速度,简化计算结果。

可用递推公式表示为:

$$\bar{P}_{mm} + a_1^n \bar{P}_{(n-1)m} + b_1^n \bar{P}_{(n-2)m} = 0 \quad (3)$$

式中,  $a_1^n = -\cos\theta \sqrt{\frac{(2n-1)(2n+1)}{(n-m)(n+m)}}$ ,  $b_1^n = \sqrt{\frac{(2n+1)[(n-1)^2-m^2]}{(2n-3)(n^2-m^2)}}$

式(3)写为矩阵形式有:

$$\mathbf{AP} = \mathbf{P}_0 \quad (4)$$

式中,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_1^{m+1} & 1 & 0 & & & & \\ b_1^{m+2} & a_1^{m+2} & 1 & & \ddots & & \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_1^N & a_1^N & 1 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{P}_0 = [P_{mm} \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^T$$

## 1 4 种 Clenshaw 求和模型

**模型 1** 设  $\bar{P}_{mm}(\cos\theta)$  为  $n$  阶  $m$  次完全规则化缔合勒让德函数,  $y_n$  为  $n$  阶勒让德函数对应的系数,由它们构成的求和模型为:

$$s_1 = \sum_{n=m}^N y_n \bar{P}_{mm}(\cos\theta) \quad (m \geq 2) \quad (1)$$

式中,  $N = N_{\max}$  为球函数的最高阶;  $y_n$  为输入系数。将其写成矩阵形式为:

$$s_1 = \mathbf{Y}^T \mathbf{P} \quad (2)$$

式中,  $\mathbf{Y}^T = (y_m, y_{m+1}, \cdots, y_N)$ ,  $\mathbf{P} = (\bar{P}_{mm}, \bar{P}_{(m+1)m}, \cdots, \bar{P}_{Nm})^T$ 。

由于缔合勒让德函数  $\bar{P}_{mm}(\cos\theta)$  的相邻三项

此时式(2)可写为:

$$s_1 = \mathbf{Y}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_0^T (\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{Y} \quad (5)$$

$\mathbf{A}^T$  是一个上三角阵。令  $\mathbf{J}_1 = (J_1^m, J_1^{m+1}, \cdots, J_1^N)^T = (\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{Y}$ , 称为解向量。以下各模型的解向量分别用  $\mathbf{J}_m (m=1, \cdots, 4)$  来表示。解向量  $\mathbf{J}_1$  的各分量可以用以下递推关系简单得到,其中,

$$J_1^n = -a_1^{n+1} J_1^{n+1} - b_1^{n+2} J_1^{n+2} + y_n \quad (J_1^{N+1} = 0, J_1^{N+2} = 0) \quad (6)$$

一直到求和下限  $J_1^m$ , 则求和模型 1 可以写成:

$$s_1 = J_1^m P_{mm}(\cos\theta) \quad (7)$$

式(7)便是文献[3]中主要运用的 Clenshaw 求和模型,但是计算结果中仍有勒让德和式的存在,因此称为一阶 Clenshaw 求和公式。在此基础上,可以为进一步运用勒让德函数递推的特点导出二阶 Clenshaw 求和公式,使得计算结果达到最简。

模型 2

$$s_2 = \sum_{n=2}^N y_n \overline{P}_m(\cos\theta) (m = n)$$

(8)

由于缔合勒让德函数 $\overline{P}_m(\cos\theta)$ 的相邻三项可用递推公式表示为:

$$\overline{P}_m + a_2^n \overline{P}_{(n-1)(n-1)} + b_2^n \overline{P}_{(n-2)(n-2)} = 0$$

(9)

式中, $a_2^n = -\sin\theta \sqrt{(2n+1)/2n}$ , $b_2^n = 0$ 。

同模型 1 类似, $J_2^n$ 具有以下的递推关系:

$$J_2^n = -a_2^{n+1} J_2^{n+1} - b_2^{n+2} J_2^{n+2} + y_n$$

$$(J_2^{N+1} = 0, J_2^{N+2} = 0)$$

(10)

则求和模型 2 的结果可以写成:

$$s_2 = J_2^2 \overline{P}_{22}(\cos\theta)$$

(11)

模型 3

$$s_3 = \sum_{n=2}^N y_n \overline{P}_{n1}(\cos\theta) (m = 1)$$

(12)

由于

$$\overline{P}_{21} + a_3^2 \overline{P}_{11} = 0$$

(13)

$$\overline{P}_{31} + a_3^3 \overline{P}_{21} + b_3^3 \overline{P}_{11} = 0$$

(14)

$$\overline{P}_{n1} + a_3^n \overline{P}_{(n-1)1} + b_3^n \overline{P}_{(n-2)1} = 0$$

(15)

式中,

$$a_3^n = -\cos\theta \sqrt{(4n^2 - 1)/(n^2 - 1)},$$
$$b_3^n = \sqrt{\frac{(2n+1)[(n-1)^2 - 1]}{(2n-3)(n^2 - 1)}}$$

将式(13)带入式(14)得:

$$\overline{P}_{31} + a_3'^3 \overline{P}_{21} = 0 \quad (a_3'^3 = a_3^3 - b_3^3/a_3^2)$$

(16)

则解向量 $J_3^n$ 的迭代公式为:

$$J_3^n = -a_3'^{n+1} J_3^{n+1} - b_3^{n+2} J_3^{n+2} + y_n$$

$$(J_3^{N+1} = 0, J_3^{N+2} = 0)$$

(17)

迭代系数 $a_3'^3$ 为:

$$a_3'^n = \begin{cases} a_3'^3, n = 3 \\ a_3^n, n > 3 \end{cases}$$

则求和模型 3 的结果可以写成:

$$s_3 = J_3^2 \overline{P}_{21}(\cos\theta)$$

(18)

模型 4

$$s_4 = \sum_{n=2}^N y_n \overline{P}_{n0}(\cos\theta)$$

(19)

由于

$$\overline{P}_{30} + a_4^3 \overline{P}_{20} + b_4^3 \overline{P}_{10} = 0$$

(20)

$$\overline{P}_{n0} + a_4^n \overline{P}_{(n-1)0} + b_4^n \overline{P}_{(n-2)0} = 0$$

(21)

式中,

$$a_4^n = -\cos\theta \sqrt{\frac{4n^2 - 1}{n^2}}, b_4^n = \sqrt{\frac{(2n+1)(n-1)^2}{(2n-3)n^2}}$$

由式(20)得:

$$\overline{P}_{30} + a_4^3 \overline{P}_{20} = K = -b_4^3 \overline{P}_{10}$$

(22)

于是式(4)中的 $\mathbf{P}'_0$ 为:

$$\mathbf{P}'_0 = (\overline{P}_{20}, K, \dots, 0)^T$$

则解向量 $J_4^n$ 的迭代公式为:

$$J_4^n = -a_4^{n+1} J_4^{n+1} - b_4^{n+2} J_4^{n+2} + y_n$$

$$(J_4^{N+1} = 0, J_4^{N+2} = 0)$$

(23)

结合式(5)得求和模型 4 的结果为:

$$s_4 = J_4^2 \overline{P}_{20}(\cos\theta) + K J_4^3$$

(24)

这样在计算重力场参数时,仅需确定 $y_n$ 就可以按照相应模型中的递推系数 $a_m^n, b_m^n (m=1, 2, 3, 4)$ 得到该模型的勒让德函数和式的结果。

2 全球位模型计算重力场参数的二阶 Clenshaw 求和

近几年发布的全球位系数模型的完全规格化的球函数展开式一般为<sup>[4]</sup>:

$$T = \frac{GM}{r} \sum_{n=2}^N \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^n (\overline{C}_{nm}^* \cos m\lambda + \overline{S}_{nm} \sin m\lambda) \overline{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (N \text{ 为模型的阶数})$$

(25)

式中, $r, \theta, \lambda$ 为计算点的球坐标(地心距离、余纬和经度); $GM$ 是地心引力常数; $a$ 是地球椭球长半轴; $\overline{C}_{nm}^*$ 和 $\overline{S}_{nm}$ 为完全规格化的位系数。这与文献[3]所计算的模型不仅在阶次选取上有所不同,主要表现在新的模型略去了 1、2 阶球函数项,而且增加了 $(a/r)^n$ 项,所以可以得到地球外部空间任意一点的扰动位。

由位模型(25)计算任意一点模型大地水准面高 $N_m$ 的公式为:

$$N_m = \frac{GM}{r\gamma} \sum_{n=2}^N \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\overline{C}_{nm}^* \cos m\lambda + \overline{S}_{nm} \sin m\lambda) \overline{P}_{nm}(\cos\theta)$$

(26)

式中, $\gamma$ 为正常重力。为了运用前面给出的求和模型,需要对式(26)中的 $n, m$ 进行调换,不按 $n$ 阶固定对 $m$ 次求和,而是改写为 $m$ 次固定对 $n$ 阶求和,则 $N_m$ 可以改写为:

$$N_m = \frac{GM}{r\gamma} (N_1 + N_2 + N_3)$$

(27)

式中,

$$N_1 = \sum_{m=2}^N \cos m\lambda \left[ \sum_{n=m}^N \left(\frac{a}{r}\right)^n \overline{C}_{nm}^* \overline{P}_{nm}(\cos\theta) \right] +$$
$$\sum_{m=2}^N \sin m\lambda \left[ \sum_{n=m}^N \left(\frac{a}{r}\right)^n \overline{S}_{nm} \overline{P}_{nm}(\cos\theta) \right]$$

$$N_2 = \sum_{n=2}^N \left(\frac{a}{r}\right)^n (\overline{C}_{n1}^* \cos\lambda + \overline{S}_{n1} \sin\lambda) \overline{P}_{n1}(\cos\theta)$$
$$N_3 = \sum_{n=2}^N \left(\frac{a}{r}\right)^n \overline{C}_{n0}^* \overline{P}_{n0}(\cos\theta)$$

为了表示方便,以下将 Clenshaw 求和中用到的输入系数记为  $y_i^n$ ,解向量记为  $s_i^n$ ,其中,脚标  $i$  表示变量序号; $n$  表示递推序数。

由于分量  $N_1$  的内层和式均符合求和模型 1,首先对其进行一阶 Clenshaw 求和,相应的输入系数为:

$$y_1^n = \left(\frac{a}{r}\right)^n \overline{C}_{nm}^*, y_2^n = \left(\frac{a}{r}\right)^n \overline{S}_{nm}$$

将  $y_1^n$  与  $y_2^n$  分别取代递推关系式(6)中的  $y_n$ ,递推系数  $a_1^{n+1}$ 、 $b_1^{n+1}$  保持不变,可以递推得到不同  $m$  对应的解向量下限  $s_1^m$  与  $s_2^m$  ( $m \geq 2$ ),将  $s_1^m$  与  $s_2^m$  分别取代式(7)中的  $J_1^m$ ,则  $N_1$  可以写为:

$$N_1 = \sum_{m=2}^N (s_1^m \cos m\lambda + s_2^m \sin m\lambda) \overline{P}_{mm}(\cos\theta) \quad (28)$$

然后在此基础上进行二阶 Clenshaw 求和。由于式(28)符合求和模型 2,令相应的输入系数为:

$$y_3^m = s_1^m \cos m\lambda + s_2^m \sin m\lambda$$

将  $y_3^m$  取代式(10)中的  $y_n$ ,可递推得到相应的解向量下限  $s_3^m$ ,对比式(11), $N_1$  可以简写为:

$$N_1 = s_3^2 \overline{P}_{22}(\cos\theta) \quad (29)$$

对于  $N_2$ ,符合求和模型 3,令输入系数为:

$$y_4^n = \left(\frac{a}{r}\right)^n (\overline{C}_{n1}^* \cos\lambda + \overline{S}_{n1} \sin\lambda)$$

将其代入递推式(17),得相应的解向量下限  $s_4^2$ ,由式(18), $N_2$  最后可以简写为:

$$N_2 = s_4^2 \overline{P}_{21}(\cos\theta) \quad (30)$$

对  $N_3$ ,令输入系数为:

$$y_5^n = \left(\frac{a}{r}\right)^n \overline{C}_{n0}^*$$

由递推式(23)得相应的解向量下限  $s_5^2$  与  $s_5^3$ ,结合式(24), $N_3$  最后可以写为:

$$N_3 = s_5^2 \overline{P}_{20}(\cos\theta) + K s_5^3 \quad (31)$$

这样,大地水准面差距的二阶 Clenshaw 求和的结果为:

$$N_m = \frac{GM}{r\gamma} [s_3^2 \overline{P}_{22}(\cos\theta) + s_4^2 \overline{P}_{21}(\cos\theta) + s_5^2 \overline{P}_{20}(\cos\theta) + K s_5^3] \quad (32)$$

对于重力异常、垂线偏差以及平均重力异常等重力场参数的位系数解算,由于它们均可以用

$$\text{和式 } V = \sum_{n=2}^N \sum_{m=0}^n f(m,n) \overline{P}_{nm+k}(\cos\theta) \quad (k=0 \text{ 或 } 1)$$

的线性组合来表示,如果将  $n$ 、 $m$  对换,最后均可以化为本文所述的 4 种 Clenshaw 求和模型形式。所不同的是,对于不同的参数计算具有不同的输入系数  $y_n$ ,这样由相应的递推公式均可以得到参数解算的二阶 Clenshaw 求和结果。

3 EGM96 与 WDM94 比较

为了精化某测区的局部重力场,现有的初始全球位系数模型有 EGM96<sup>[5]</sup> 和 WDM94<sup>[6]</sup> 两种。为比较两种模型运用于该局部重力场的精度,对该测区分别进行地面重力测量、GPS/水准测量以及天文/GPS 观测,由观测结果分别得到该测区离散点的重力异常、大地水准面高。在计算前,尚需将重力异常进行系统归算,以便统一到 EGM96 以及 WDM94 模型相应的重力场中,正常椭球采用 GRS80 提供的参考椭球基本参数。将各参数的实测值分别与全球位系数模型的计算值进行对比,残差结果列于表 1。同时,表 1 列出了全球位系数模型计算单点重力场参数的常规叠加求和、

表 1 局部重力场参数模型值与实测值比较

Tab.1 Comparison Between Model Value of Local Gravity Field Parameters and Survey Value

分量	点数	比对项目	EGM96	WDM94	平均运算时间/s		
			360 阶	360 阶	常规	一阶	二阶
$\Delta g/\text{mGal}$	70	最大差值	23.435 7	21.959 0			
		差值均值	-2.354 3	1.238 3	332.809	9.533	4.497
		标准误差(±)	9.834 2	7.244 1			
		均方根差(±)	9.919 0	7.349 2			
		最大差值	1.589 7	0.853 4			
N/m	24	差值均值	-1.449 3	-0.685 1	335.853	9.633	4.777
		标准误差(±)	0.067 2	0.068 2			
		均方根差(±)	1.450 9	0.691 0			

一阶 Clenshaw 求和以及改进后的二阶 Clenshaw 求和的利用 Matlab 编程的平均 CPU 耗时。为了便于认识剩余重力场随空间分布的情况,图 1、图

2 分别绘制了由 WDM94 与 EGM96 模型得到的局部重力场剩余重力异常以及剩余大地水准面差距的等值线分布图。

由图 1、图 2 可以看出,剩余重力异常在区域的空间分布上有正有负,表现出了较强的波动性,而剩余大地水准面的差距在区域空间分布上多为同号,具有很强的系统性,均具有较强的系统倾斜的趋势,这也证实了大地水准面差距反映扰动重力场的低、中频信息,而重力异常反映扰动场中、高频结构的谱特性。

由位模型计算试验测区局部重力场场元时,对于重力异常,两者精度相当;对于大地水准面,

模型 WDM94 比 EGM96 高出约 2.5 倍,达到了 dm 级精度。可以说,模型 WDM94 更好地刻画了该局部重力场的中、低频结构。因此,为了进一步提高模型在该地区的分辨率,应在 WDM94 模型描述的局部重力场的基础上,综合利用剩余重力异常与剩余大地水准面差距信息,通过位模型局部改进法构建新的模型,提高其对重力场中、高频结构的刻画,以达到建立高精度局部重力场的目的。

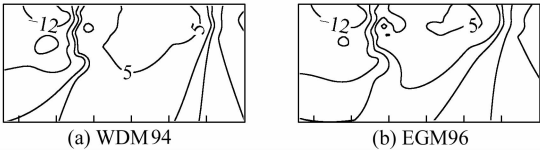


图 1 不同模型计算得到的剩余重力异常等值线分布图(mGal)

Fig. 1 Contour Line Profile of Residual Gravity Anomaly Computed by WDM94 and EGM96

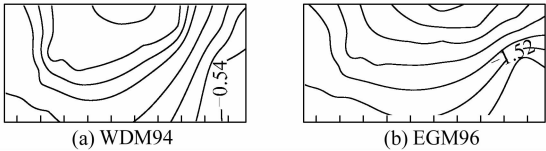


图 2 不同模型计算得到的剩余大地水准面差距等值线分布图(m)

Fig. 2 Contour Line Profile of Residual Geoid Distance Computed by WDM94 and EGM96

参 考 文 献

1 许厚泽,陆仲连. 中国地球重力场与大地水准面. 北京:解放军出版社,1997

2 黄谟涛,管 铮,翟国君,等. 海洋重力测量理论方法及其应用. 北京:海潮出版社,1997

3 管泽霖,鄂栋臣. 按克林索求和计算大地水准面差距垂线偏差及重力异常. 武汉测绘科技大学学报, 1986, 11(4):75~82

4 李建成,陈俊勇,宁津生,等. 地球重力场逼近理论与中国 2000 似大地水准面的确定. 武汉:武汉大学出版

社, 2002

5 Lemoine F G. The Development of the Joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) Geopotential Model EGM96. NASA/TP-1998-206861,1998

6 宁津生,李建成,晁定波,等. WDM94 360 阶地球重力场模型研究. 武汉测绘科技大学学报, 1994, 19(4): 283~291

第一作者简介:田晋,硕士。主要从事重力测量数据处理研究。  
E-mail: tianjinnice@163.com

Clenshaw Summation in Constructing High Resolution Gravity Field from the Geopotential Coefficient Expression Model

TIAN Jin<sup>1</sup> BAO Jingyang<sup>1</sup> LIU Yanchun<sup>1</sup>

(1 Department of Hydrography and Cartography, 667 Jiefang Road, Dalian 116018, China)

**Abstract:** This paper gives four modes' Clenshaw summation formula of Lengendre function. Based on this, the Clenshaw summation formula with two order are derived respectively to calculate the gravity field parameters from the geopotential coefficient expression model. And the precisions in applying the EGM96 and WDM94 to the gravity field of some experimental survey area are both presented which provides some useful reference in the selection of preliminary geopotential model to construct high resolution gravity field of this local area.

**Key words:** geopotential coefficient expression model; Clenshaw summation; geoid distance