第 30 卷 第 6 期
2005 年 6 月

武汉大学学报·信息科学版
Geomatics and Information Science of Wuhan University

Vol. 30 No. 6
June 2005

文章编号:1671-8860(2005)06-0471-03　　文献标志码:A

论($N-\zeta$)公式的内涵及推求 N 的精度

张赤军[1]

(1　中国科学院测量与地球物理研究所,武汉市徐东路 174 号,430077)

摘　要:介绍了大地水准面(N)与似大地水准面(ζ)之差公式的推导方法,揭示了其物理内涵,论述了其在精化大地水准面中的重要作用。当似大地水准面精度达到 cm 级时,大地水准面也将达到同样的精度。

关键词:内涵;精度;大地水准面;似大地水准面;密度

中图法分类号:P223

150 多年前,物理大地测量学家 Stokes 开辟了用重力资料研究地球形状的先河,他从理论上证明了只要已知大地水准面上的重力异常,即可由位理论第三边值问题推求出大地水准面高。100 年后的大地重力学家 Molodensky 为避开重力归算的缺陷,将斯氏理论发展到研究地球的表面形状上来,这个理论为世界许多国家广泛应用[1,2],似大地水准面的概念也就应运而生。此后不久,Heiskanen 和 Moritz 对上述两个面之间的关系,用包含高程一次项的($N-\zeta$)公式表征出来[3];1995 年,Sjoberg 将这一公式在球面上用级数形式表示并展开到高程的二次项[4];边少峰等在扁平地球上推导出一个仅含高程二次项的封闭公式[5]。本文在以上文献的基础上进一步进行了研究。

1　两种($N-\zeta$)公式的简介及其比较

1.1　两种方法的简介

Sjoberg 以引力位的球函数表达式为手段,同时顾及地形改正后的地表上的重力值,并沿重力梯度向下延拓,在经过较复杂的推导后得到以下球面公式:

$$N-\zeta=\frac{\Delta g_b}{\gamma_m}H-\frac{1}{2}\frac{1}{\gamma_m}\partial\Delta g/\partial H^{H^2}+O(H^3) \tag{1}$$

式中,γ_m 为正常重力的平均值;Δg_b 为布格异常;Δg 为空间异常;$\partial\Delta/\partial H$ 为空间异常垂直梯度。

边少峰等视地球为扁平状,在正高、正常高定义的基础上,取地面上的重力梯度等于正常重力梯度与扰动重力梯度之和,而在处理地面以下的重力梯度时,顾及到 $4\pi G\rho$ 的密度突变,从地表到大地水准面取积分,并以此积分值代替此间的重力平均值,经过演算,即可求出($N-\zeta$)的表达式:

$$N-\zeta=\frac{\Delta g_b}{\gamma_m}H-\frac{1}{2}\frac{1}{\gamma_m}\partial\delta g/\partial H^{H^2} \tag{2}$$

式中,$\partial\delta g/\partial H$ 为扰动重力垂直梯度;H 为概略高程。

1.2　两种公式的比较

从理论上讲,式(1)已考虑到球形地球的影响,理应比式(2)更严格,但根据文献[6],垂直梯度的效应在测点附近最为显著,即使计算半径扩大到球面角距为 1°,当层间厚度为5 000 m 时,平面与球面公式的相对值仅为 5×10^{-5},因此,无需顾及地球曲率的影响。此外,扰动重力垂直梯度比重力异常垂直梯度易于获得,因为前者是在同一点上,使其观测或计算都更为直接和方便。

2　($N-\zeta$)的物理内涵及机理分析

由位理论可知,对于空间旋转物体等位面上任一点的重力垂直梯度$\frac{\partial g}{\partial H}$应满足 Bruns 公式:

$$\frac{\partial g}{\partial H}=-2gJ+4\pi G\rho-2\omega^2 \tag{3}$$

收稿日期:2005-03-29。

项目来源:国家杰出青年科学基金资助项目(40125013)。

对于地球外部一点，有：

$$\frac{\partial g}{\partial H}=-2gJ-2\omega^2 \qquad (4)$$

式中，J 为某点水准面上的平均曲率；ρ 为物体(地球)密度；G 为引力常数；ω 为物体自转速率。

式(4)将重力垂直梯度与大地水准面上的平均曲率紧密地联系起来。显然，扰动重力垂直梯度可以描述大地水准面平均曲率对正常水准椭球面平均曲率的偏离，因此，可以把大地测量中的几何概念和物理中的力学概念互相联系起来，这就是$(N-\zeta)$公式的物理内涵。从式(2)还可以看出，高程一次项中的 Δg_b 反映了重力场中区域场的效应，高程二次项的$\frac{\partial\delta g}{\partial H}$反映了重力场中局部场的作用。这种既顾及区域场又顾及局部场效应后的结果，将更完整地反映出似大地水准面与大地水准面之差所形成的机理。而在 Heiskanen Moritz 公式中，由于缺少了局部场的效应，因此，该式只是反映出引起上述的偏离总体场源中趋势性的影响。显然，这在局部性影响显著的崎岖不平的山地是不符合实际情况的，如在珠峰，计算得到的高程的二次项的结果表明，它与一次项的数值比较接近(4 m 左右)[7]，这说明了在海拔很高的山顶，二次项的影响是绝对不能忽略的。

3 密度误差对推求正高及大地水准面的影响

地壳密度的不精确对推求正高及大地水准面的影响是无疑的，但其影响不是前人想像的那样大，而且在$(N-\zeta)$公式中又有所削弱。

3.1 从定义出发讨论密度对正高影响的估算

由物理大地测量可知[3]，正高 H_0 为：

$$H_0=\frac{1}{g_m}\int_0^H g\mathrm{d}h=\frac{C}{g_m} \qquad (5)$$

对式(5)微分，有：

$$\delta H_0=-\frac{C}{g_m^2}\delta g_m=-\frac{H}{g_m}\delta g_m \qquad (6)$$

式中，$C=\int_0^H g\mathrm{d}h$ 为大地位数；g 为重力；g_m 为 0～H 间的重力平均值。

由于 g_m 约为 1 000×10⁻⁵ m·s⁻²，若不顾及负号，有：

$$\delta H_0\approx\delta g_m\cdot H \qquad (7)$$

式中，δH_0 以 mm 为单位；δg_m 以 1×10^{-5} m·s^{-2} 为单位；H 以 km 为单位。若 δg_m 为 10×10^{-5} m·s^{-2} 或 2×10^{-5} m·s^{-2}，即使高程 H 为 5 km，正高误差 δH_0 则仅为 5 cm 或 10 cm。

现讨论密度 ρ 对推求 g 的影响。以布格改正公式取代，若 ρ 的误差为 $\delta\rho$，则有：

$$\delta g_m=2\pi GH\delta\rho \qquad (8)$$

若 $\delta\rho$ 为 100 kg·m^{-3}，在 H 为 5 km 时，则 $\delta g_m=21\times10^{-5}$ m·s^{-2}，由式(7)可知，这时对正高的影响为 10 cm；若 $\delta\rho$ 为 50 kg·m^{-3}，则它对正高的影响为 5 cm，据估计一般密度对计算正高的影响在 5 cm 左右。

现可从奥地利两个竖井(West 和 Stefanie)的实例得到一些启示[8]。由井中重力观测值计算得到的多处岩石密度与所取的样本密度甚为接近，互差均在 50 kg·m^{-3}以下。上述水平距离为 5 km 的两个井深均为 300 多 m，它们位于奥地利南部的阿尔卑斯山区，一处高程为 800 m，另一处为 2 000 m，该区出露的地层为三叠系白云岩、灰岩、片岩和砂岩。为探测岩层内的密度(ρ)，在井中采用 Lacost-G 型重力仪进行测量，所测的重力经过多项校正(例如平巷校正、地形校正等)后，可得到间隔密度(高差引起)，这时有：

$$\rho=\frac{1}{4\pi G}\left(F-\frac{\Delta g}{\Delta z}\right) \qquad (9)$$

式中，$F=\frac{\partial\gamma}{\partial h}$；$\Delta g$、$\Delta z$ 分别为相邻两点的重力差和高差；γ 为正常重力值。

从式(9)计算的结果与实际采集的岩石标本的密度互差不大可知，用 100 kg·m^{-3}来估计密度的误差是很保险的。对于海拔 5 000 m 的高山，若在测点上施测了重力，并在测点处有较好的地形图和一些岩石标本，则所求正高的误差一般不会大于 10 cm。

3.2 由式(2)讨论密度误差对$(N-\zeta)$的影响

现讨论式(2)中由于 Δg_b 和$\frac{\partial\delta_g}{\partial H}$的不精确引起$(N-\zeta)$的误差，前者 Δg_b 可以由重力观测值方便地求出，后者可直接测出或用间接方法计算得到，这主要是由于目前人们对地形质量(大比例尺地形图、航测照片、合成孔径雷达、大量的岩石标本已经取得)的认识有了很大的提高，由此可计算出扰动重力的垂直梯度。至于布格异常 Δg_b，一般都能以 $\pm5\times10^{-5}$ m·s^{-2}左右精度给出，经过试验和比较，$\frac{\partial\delta_g}{\partial H}$的误差为±50E(1E=$10^{-8}$/s^2，E 是 Eotvos 的缩写)，对式(2)微分，则可估计出$(N-\zeta)$的误差，即使在海拔为5 000 m的一点，其误差估计在 7 cm 左右。

顺便指出，我国已布设数万 km 的高精度水准

网，并在水准点上已有正常高（H_n）值，若在这些路线上加测一段低等水准测量和一些重力点，即使在边远地区正常高也可达到 cm 级的精度，这为实现由式（10）精确地推求正高提供了必要的资料。

$$H_0 = H_n - (N - \zeta) \qquad (10)$$

式中，H_n 为正常高。由于当今 GPS 的观测精度很高，使大地高的精度可以达到亚 cm 级，根据 GPS 水准原理以及 cm 级精度的正高，可以求得接近于 cm 级的大地水准面，这样就为推求高精度的大地水准面提供了一条新途径[9]。

另一方面，也可以根据式（2）取得高精度的大地水准面，此时除已知布格异常及扰动重力梯度外，还需知道高程异常（ζ），若它的精度达 cm 级，则 cm 级大地水准面的精度亦可达到。

综上所述，当今人们关心的 cm 级的大地水准面可以从上述两个途径求得。

参 考 文 献

1 许厚泽，陆仲连．中国地球重力场与大地水准面．北京：解放军出版社，1997

2 李建成，陈俊勇，宁津生，等．重力场逼近理论与中国 2000 似大地水准面．武汉：武汉大学出版社，2003

3 Heiskanen W A，Moritz H．Physical Geodesy．San Fransisco：Freeman and Company，1967

4 Sjoberg L．On the Quasigeoid to Geoid Separateion. Manuscripta Geodetica，1995，20：182～192

5 边少锋，张赤军．论大地水准面与似大地水准面的偏差．见：陈俊勇．大地测量论文集专辑——庆祝陈永龄院士 90 寿辰文集．北京：测绘出版社，1999

6 张赤军．珠穆朗玛峰的大地水准面与高程的确定．科学通报，1997，42(23)：2 543～2 545

7 张赤军．用地形数据确定重力异常垂直梯度．科学通报，1999，44(6)：656～660

8 徐公达，周国藩．井中和坑道重力测量．北京：地质出版社，1989

9 张赤军．精确测定正高的两种方法．武汉大学学报·信息科学版，2003，28(6)：675～678

作者简介：张赤军，研究员。现从事重力场及其在大地测量和地球物理中应用的研究，共发表文章近一百篇。

E-mail：IGG Zhang C J@sohu.com

Content and Precision-Determining of Difference Between Geoid and Quasigeoid

ZHANG Chijun[1]

(1 Institute of Geodesy & Geophysics，Chinese Academy of Sciences，174 Xudong Road，Wuhan 430077，China)

Abstract：The method for formulary derivation between geoid (N) and quasigeoid (ζ) is introduced，and its physical content is announced. If ζ is known precise，then N can be determined precisely.

Key words：content；precision；geoid；quasigeoid；density

About the author：ZHANG Chijun，researcher. He is engaged in the research on geodesy and gravimetry. His published papers are more than 100.

E-mail：IGG Zhang C J@sohu.com

（责任编辑： 晓晨）