文章编号:1671-8860(2005)05-0405-03　　文献标志码:A

GIS 中三维空间直线的误差熵模型

朱长青[1,2]　张国芹[3]　王光霞[2]

(1　中国科学院测量与地球物理研究所,武汉市徐东路 174 号,430077)
(2　信息工程大学测绘学院,郑州市陇海中路 66 号,450052)
(3　信息工程大学理学院,郑州市瑞达路 68 号,450052)

摘　要:从信息熵的角度提出了三维空间直线的误差熵模型,该模型由以垂直直线的平面误差熵为半径的圆柱体和两端点的误差球组成,是一种完全确定的度量空间线元不确定性的模型。理论分析与实验表明,本文所提出的模型具有较好的效果。

关键词:空间直线;位置不确定性;信息熵;误差熵模型

中图法分类号:P208

以往人们往往从置信域出发来描述几何要素位置不确定性。置信域模型研究的关键是围绕量测值建立一区域,使得该区域以一定的概率覆盖真实目标,文献[1]用 ε_σ 模型及 ε_m 模型来描述平面直线的位置不确定性;文献[2,3]从信息论出发,讨论了平面上的点、线、面误差熵模型。

在文献[1]中,三维空间线元的不确定性模型看作是由线上各点在垂直于该空间直线的平面上的误差椭圆所构成的误差椭圆簇及两个端点的部分空间误差椭球所组成的包络体,该模型在描述三维空间线元的位置不确定性方面较为精细,但在描述三维空间线元的位置不确定性时与人们事先设置的置信水平有关,有一定的主观性。本文应用信息熵的理论来讨论三维空间中的点和直线的误差熵模型,该模型是由在垂直直线的平面上的误差熵为半径的圆柱体和两端点的误差球组成,它不是任何意义上的置信区域,而是一种完全确定的度量空间线元不确定性模型。

1　三维空间点的误差熵模型

点是 GIS 中描述几何特性的最基本元素。在不含粗差的情况下,点位误差可以看作随机误差,服从正态分布[2]。三维空间点坐标服从三维正态分布。

在文献[2]中,由于点位误差服从正态分布,对于一维情况,点位误差熵模型是以一维正态分布得到的误差熵为半径的区间;对于二维情况,可以近似地以误差熵 2.07σ 为半径的圆确定。下面推导三维情况。

设点坐标$(x,y,z)^{\mathrm{T}}$服从三维正态分布,且方差-协方差阵为:

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}\sigma_x^2 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 & \sigma_{yz}\\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z^2\end{bmatrix}$$

由文献[4]知,点坐标$(x,y,z)^{\mathrm{T}}$的相对信息熵为:

$$\begin{aligned}H_C(X)&=\frac{1}{2}\lg\|\boldsymbol{D}\|+3\lg\sqrt{2\pi\mathrm{e}}\\&=\lg[\|\boldsymbol{D}\|^{\frac{1}{2}}(2\pi\mathrm{e})^{\frac{3}{2}}]\end{aligned}$$

式中,$\boldsymbol{X}=(x,y,z)^{\mathrm{T}}$;$\|\boldsymbol{D}\|$ 是 $\boldsymbol{D}$ 的行列式绝对值。则三维空间点的误差熵 Δ 为:

$$\Delta=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{H_C(X)}=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{D}\|^{\frac{1}{2}}(2\pi\mathrm{e})^{\frac{3}{2}}$$

若 x、y、z 相互独立,$\|\boldsymbol{D}\|=\sigma_x^2\sigma_y^2\sigma_z^2$,则

$$H_C(X)=\frac{1}{2}\lg[\sigma_x\sigma_y\sigma_z(2\pi\mathrm{e})^{\frac{3}{2}}]$$

$$\Delta=\frac{1}{2}\sigma_x\sigma_y\sigma_z(2\pi\mathrm{e})^{\frac{3}{2}}$$

收稿日期:2005-03-29。

项目来源:国家自然科学基金资助项目(40176032,40174006);中国科学院百人计划资助项目。

三维空间点的不确定性可以近似地用 Δ 为半径的球确定。

2 三维空间直线的误差熵模型

2.1 坐标旋转及直线上任一点在新坐标系中的方差-协方差阵

设三维直线由两个三维点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$ 确定,其空间距离为:

$$s_{12}=\sqrt{\Delta x_{12}^2+\Delta y_{12}^2+\Delta z_{12}^2}$$

设 A、B 坐标均服从三维正态分布,且 A、B 两点相互独立。设 A、B 点坐标的方差-协方差阵为:

$$\boldsymbol{D}_A=\begin{bmatrix}\sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1y_1} & \sigma_{x_1z_1}\\ \sigma_{x_1y_1} & \sigma_{y_1}^2 & \sigma_{y_1z_1}\\ \sigma_{x_1z_1} & \sigma_{y_1z_1} & \sigma_{z_1}^2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}_B=\begin{bmatrix}\sigma_{x_2}^2 & \sigma_{x_2y_2} & \sigma_{x_2z_2}\\ \sigma_{x_2y_2} & \sigma_{y_2}^2 & \sigma_{y_2z_2}\\ \sigma_{x_2z_2} & \sigma_{y_2z_2} & \sigma_{z_2}^2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}_{AB}=\begin{bmatrix}\sigma_{x_1x_2} & \sigma_{x_1y_2} & \sigma_{x_1z_2}\\ \sigma_{y_1x_2} & \sigma_{y_1y_2} & \sigma_{y_1z_2}\\ \sigma_{z_1x_2} & \sigma_{z_1y_2} & \sigma_{z_1z_2}\end{bmatrix}$$

对于三维直线上任意一点 $i(x_i,y_i,z_i)$,仅考虑端点坐标误差传播的影响,有如下关系:

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}x_i&=(1-r_1)\mathrm{d}x_1+r_1\mathrm{d}x_2\\ \mathrm{d}y_i&=(1-r_1)\mathrm{d}y_1+r_1\mathrm{d}y_2\\ \mathrm{d}z_i&=(1-r_1)\mathrm{d}z_1+r_1\mathrm{d}z_2\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

式中,$r_1=s_{1i}/s_{12}$,且 $s_{1i}=\sqrt{\Delta x_{1i}^2+\Delta y_{1i}^2+\Delta z_{1i}^2}$。

将式(1)写为矩阵形式:

$$\begin{bmatrix}\mathrm{d}x_i\\ \mathrm{d}y_i\\ \mathrm{d}z_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-r_1 & 0 & 0 & r_1 & 0 & 0\\ 0 & 1-r_1 & 0 & 0 & r_1 & 0\\ 0 & 0 & 1-r_1 & 0 & 0 & r_1\end{bmatrix}\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\tag{2}$$

其中,$\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}=[\mathrm{d}x_1\quad \mathrm{d}y_1\quad \mathrm{d}z_1\quad \mathrm{d}x_2\quad \mathrm{d}y_2\quad \mathrm{d}z_2]^{\mathrm{T}}$。

由协方差传播律,可求得直线上 i 点处的方差-协方差矩阵 $\boldsymbol{D}_i$。

将坐标系 $o\text{-}yz$ 旋转,得到新的坐标系 $o\text{-}x'y'z'$,该坐标系的 ox' 轴平行于 AB,$y'oz'$ 平面垂直于 AB。由文献[1]知,旋转矩阵为:

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}\dfrac{\Delta x_{12}}{s_{12}} & \dfrac{\Delta y_{12}}{s_{12}} & \dfrac{\Delta z_{12}}{s_{12}}\\ -\dfrac{\Delta y_{12}}{\sqrt{\Delta x_{12}^2+\Delta y_{12}^2}} & \dfrac{\Delta x_{12}}{\sqrt{\Delta x_{12}^2+\Delta y_{12}^2}} & 0\\ -\dfrac{\Delta z_{12}\Delta x_{12}}{s_{12}\sqrt{\Delta x_{12}^2+\Delta y_{12}^2}} & \dfrac{\Delta z_{12}\Delta y_{12}}{s_{12}\sqrt{\Delta x_{12}^2+\Delta y_{12}^2}} & \dfrac{\sqrt{\Delta x_{12}^2+\Delta y_{12}^2}}{s_{12}}\end{bmatrix}$$

坐标系 $o\text{-}xyz$ 旋转后,i 点在新坐标系中的坐标为:

$$[x_i'\quad y_i'\quad z_i']^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{R}[x_i\quad y_i\quad z_i]^{\mathrm{T}}$$

因为该变换为线性变换,由正态变量的线性不变性[5]知,A、B 点在新坐标系中的坐标 $(x_1',y_1',z_1')^{\mathrm{T}}$、$(x_2',y_2',z_2')^{\mathrm{T}}$ 仍服从三维正态分布,且其方差-协方差阵为:

$$\boldsymbol{D}_A'=\boldsymbol{R}\boldsymbol{D}_A\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{D}_B'=\boldsymbol{R}\boldsymbol{D}_B\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{D}_{AB}'=\boldsymbol{R}\boldsymbol{D}_{AB}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$$

i 点在新坐标系中的坐标 $(x_i',y_i',z_i')^{\mathrm{T}}$ 的方差-协方差阵为:

$$\boldsymbol{D}_i'=\boldsymbol{R}\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$$

三维空间直线上任意一点 i 在垂直于该直线的平面上的方差-协方差阵 $\boldsymbol{D}_{ii}'$ 为 $\boldsymbol{D}_i'$ 的第 2、3 行及列组成的子阵为:

$$\boldsymbol{D}_{ii}'=\begin{bmatrix}\sigma_{y_i'}^2 & \sigma_{y_i'z_i'}\\ \sigma_{z_i'y_i'} & \sigma_{z_i'}^2\end{bmatrix}$$

其中,

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{y_i'}^2&=(1-r_1)^2\sigma_{y_1'}^2+r_1^2\sigma_{y_2'}^2+2r_1(1-r_1)\sigma_{y_1'y_2'}\\ \sigma_{z_i'}^2&=(1-r_1)^2\sigma_{z_1'}^2+r_1^2\sigma_{z_2'}^2+2r_1(1-r_1)\sigma_{z_1'z_2'}\\ \sigma_{y_1'z_1'}&=(1-r_1)^2\sigma_{y_1'z_1'}+r_1^2\sigma_{y_2'z_2'}+r_1(1-r_1)(\sigma_{y_2'z_2'}+\sigma_{y_2'z_2'})\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

故

$$\|\boldsymbol{D}_{ii}'\|=a(1-r_1)^4+br_1^4+cr_1^2(1-r_1)^2+dr_1(1-r_1)^3+er_1^3(1-r_1)\tag{4}$$

其中,$a=\sigma_{y_1'}^2\sigma_{z_1'}^2-\sigma_{y_1'z_1'}^2$;$b=\sigma_{y_2'}^2\sigma_{z_2'}^2-\sigma_{y_2'z_2'}^2$;$c=\sigma_{y'1}^2\sigma_{z_2'}^2+\sigma_{y_2'}^2\sigma_{z_1'}^2-\sigma_{y_1'z_2'}^2-2\sigma_{y_1'z_2'}^2\sigma_{y_2'z_1'}^2-2\sigma_{y_1'z_1'}^2\sigma_{y_2'z_2'}^2+4\sigma_{z_1'z_2'}^2\sigma_{y_2'y_1'}^2$;$d=2(\sigma_{y_1'}^2\sigma_{z_1'z_2'}+\sigma_{z_1'}^2\sigma_{y_2'y_1'}-\sigma_{y_1'z_1'}\sigma_{y_1'z_2'}-\sigma_{y_1'z_1'}\sigma_{z_1'y_2'})$;$e=2(\sigma_{y_2'}^2\sigma_{z_1'z_2'}+\sigma_{z_2'}^2\sigma_{y_2'y_1'}-\sigma_{y_2'z_2'}\sigma_{y_1'z_2'}-\sigma_{y_2'z_2'}\sigma_{y_2'z_1'})$。

2.2 三维空间直线的平均误差熵模型

在 $y'oz'$ 平面上的相对信息熵为[4]:

$$H_C(Y) = \frac{1}{2}\lg \| \boldsymbol{D}'_i \| + \lg(2\pi e) \tag{5}$$

类推线元的平均信息熵为[3]：

$$H_{ave} = \int_0^1 H_C(Y)\mathrm{d}t = \lg(2\pi e) + \frac{1}{2}\int_0^1 \| \boldsymbol{D}'_i \| \mathrm{d}r_1 \tag{6}$$

积分部分可用数值积分方法来计算。

根据三维空间线元的平均信息熵可以计算线元的误差熵 Δ，即

$$\Delta = \frac{1}{2}e^{H_{ave}} \tag{7}$$

于是，三维空间直线误差熵模型定义为以量测线段为中心，以误差熵 Δ 为半径的圆柱体。它是线位不确定性的一个平均度量指标，通常包含直线点位真误差。

若三维空间线元两端点的误差互不相关，且具有相同的方差-协方差阵，即

$$\boldsymbol{D}_A = \boldsymbol{D}_B, \quad \boldsymbol{D}_{AB} = 0$$

根据式(3)～式(7)，则有：

$$\| \boldsymbol{D}'_i \| = a[(1-r_1)^2 + r_1^2]^2 \tag{8}$$

将式(8)代入式(6)，则三维空间线元的平均信息熵为：

$$H_{ave} = \lg(2\pi e\sqrt{a}) + \frac{\pi}{2} - 2 \tag{9}$$

根据式(7)，线元的误差熵 Δ 为：

$$\Delta = \pi\sqrt{a}e^{\frac{\pi}{2}-1} \tag{10}$$

3　算例分析

设三维空间直线两个端点 A、B 的三维坐标及其方差-协方差如表 1 所示(数据来源于文献[1])，由式(10)算得 Δ=10.137 1，此即为三维空间直线误差熵模型圆柱体的半径。该模型是一种均匀的几何体，只要端点的位置和误差状态给定，则 Δ 可惟一确定，是一种确定的描述三维空间直线不确定性的模型。

表 1　起始数据列表

Tab.1　Test Data

点名	X	Y	Z	σ_x^2	σ_y^2	σ_z^2	σ_{xy}	σ_{xz}	σ_{yz}
A	500.00	500.00	100.00	4.136 65	1.303 11	0.207 91	0.319 42	0.114 23	0.114 68
B	505.00	505.00	110.00	4.136 65	1.303 11	0.207 91	0.319 42	0.114 23	0.114 68

4　结　语

本文从误差熵的角度提出了三维空间直线的误差熵模型，该模型是一种均匀几何体，它由以垂直直线的平面上的平均误差熵为半径的圆柱体和端点误差熵球组成，是一种确定的描述三维空间直线不确定性的模型。而文献[1]中的三维空间直线的不确定性模型是 ε_σ 模型，其 $y'oz'$ 平面上的误差椭圆与事先给定的置信水平有关。本文模型能够在一般意义上反映三维空间线元的不确定性，从整体上把握三维空间线元不确定性的基本态势。

本文发展的三维空间直线的误差熵模型虽不如文献[1]中的模型在描述线元不确定性方面精细，但它根据“在矢量 GIS 中由于点、线、面几何要素的误差分布在空间呈现出不均匀、不平衡的特点”，运用了熵理论来研究空间线元的不确定性，将不确定性问题在数学表达上化为确定性问题来研究，具有实际意义。

参　考　文　献

1　刘大杰，史文中，童小华，等．GIS 空间数据的精度分析与质量控制．上海：上海科学技术文献出版社，1999

2　范爱民，郭达志．误差熵不确定带模型．测绘学报，2001，30(1)：48～53

3　李大军，龚健雅，谢刚生，等．GIS 中面元的误差熵模型．测绘学报，2003，32(1)：31～35

4　吴敏金．分形信息导论．上海：上海科学技术文献出版社，1994

5　复旦大学．概率论．北京：人民教育出版社，1982

6　史文中．空间数据误差处理的理论与方法．北京：科学出版社，2000

7　刘大杰，华　慧．GIS 线要素不确定性模型的进一步探讨．测绘学报，1998，27(1)：45～49

第一作者简介：朱长青，博士，教授，博士生导师。主要从事 GIS、遥感影像处理、小波分析等研究。

E-mail：zcq88@263.net

(下转第 411 页)