

一种采样型平方根滤波及其应用

吴江飞¹ 黄 城²

(1 信息工程大学测绘学院,郑州市陇海中路 66 号,450052)
(2 中国科学院上海天文台,上海市南丹路 80 号,200030)

摘 要:探讨了非线性系统的滤波问题,提出了将采样型平方根滤波 SR-UKF(square root unscented Kalman filter)应用于星载 GPS 卫星实时定轨。在滤波过程中,以协方差阵的平方根代替协方差阵参加递推运算,有效地提高了滤波算法的计算效率和数值稳定性。实例计算结果表明,SR-UKF 的性能要优于推广卡尔曼滤波(extended Kalman filter)和 Unscented 卡尔曼滤波(unscented Kalman filter)。

关键词:卡尔曼滤波;非线性滤波;GPS;定轨

中图法分类号:P228.41

在许多实际应用问题中,动态方程或量测方程为非线性而噪声为非高斯情况时,滤波问题也表现为非线性。解决非线性滤波问题的最优方案需要得到其条件后验概率的完整描述,然而这种精确的描述需要无尽的参数而无法实际应用^[1]。为此,人们提出了大量次优的近似方法^[2],其中推广卡尔曼滤波(EKF)得到了最广泛的应用。

近年来,利用采样方法近似非线性分布来解决非线性问题的途径得到了人们的广泛关注,并相继发展了一些新的滤波方法来处理这类问题^[3-8],如 PF(particle filter)和 UKF 等。

UKF 是一种采用卡尔曼线性滤波框架,以 UT(unscented transformation)变换^[3-5]为基础的非线性滤波方法。实践表明,UKF 精度要高于 EKF^[8,9],而计算复杂度与 EKF 相当。

在数值计算中往往存在着舍入误差等问题,而 EKF 和 UKF 都敏感于数值计算误差。在滤波的递推过程中,由于计算误差等因素的影响,有时会出现滤波状态协方差阵不对称或负定,从而导致滤波器发散,影响滤波算法的收敛速度和稳定性。另外,在 UKF 中,为了采样 Sigma 点集,每次时间更新都要计算状态协方差阵的平方根,这也是计算开销最大的操作之一。

针对上述问题,有关学者借鉴标准的平方根卡尔曼滤波的思想,提出了采样型平方根滤波,即 UKF 的平方根形式的滤波 SR-UKF^[8]。

1 采样型平方根滤波算法

SR-UKF 算法的实质是,在 UKF 算法的基础上,采用矩阵 QR 分解、矩阵 Cholesky 分解因子更新以及高效最小二乘法等线性代数技术,以 Cholesky 分解因子的形式直接传播和更新状态协方差阵的平方根。假设系统的动态方程和量测方程分别为如下离散非线性方程:

$$\mathbf{x}_{k+1} = F(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \boldsymbol{\omega}_k, \mathbf{y}_k = H(\mathbf{x}_k) + \boldsymbol{\eta}_k \quad (1)$$

式中, \mathbf{x}_k 、 \mathbf{u}_k 和 $\boldsymbol{\omega}_k$ 分别为系统状态向量、输入控制向量和系统动态噪声向量; \mathbf{y}_k 和 $\boldsymbol{\eta}_k$ 分别为观测向量和量测噪声向量。

设系统状态向量 \mathbf{x}_k 的维数为 n ,可以给出 SR-UKF 的算法如下^[8]。

1) 初始化。

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = E[\mathbf{x}_0] \\ \mathbf{S}_0 = \text{chol}\{E[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T]\} \quad (2)$$

计算 $(2n+1)$ 个采样点集(Sigma 点集):

$$\boldsymbol{\chi}_{k-1} = [\hat{\mathbf{x}}_{k-1} \quad \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{S}_{k-1} \quad \hat{\mathbf{x}}_{k-1} - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{S}_{k-1}] \quad (3)$$

2) 时间更新。

$$\boldsymbol{\chi}_{k|k-1}^* = F[\boldsymbol{\chi}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}]; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m)} \boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^* \quad (4)$$

$$\mathbf{S}_{k|k-1} = \text{qr}\{[\sqrt{\mathbf{W}_1^{(c)}}(\boldsymbol{\chi}_{1:2n,k|k-1}^* - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \sqrt{\mathbf{Q}}]\}$$
 (5)

$$\mathbf{S}_{k|k-1} = \text{cholupdate}\{\mathbf{S}_{k|k-1}, \boldsymbol{\chi}_{0,k|k-1}^* - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{W}_0^{(c)}\}$$
 (6)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\chi}_{k|k-1} = \\ [\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \quad \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{S}_{k|k-1} \quad \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{S}_{k|k-1} \end{aligned}$$
 (7)

$$\mathbf{y}_{k|k-1} = H[\boldsymbol{\chi}_{k|k-1}]; \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n} \mathbf{W}_i^{(m)} \mathbf{y}_{i,k|k-1}$$
 (8)

3) 量测更新。

$$\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{y}}_k} = \text{qr}\{[\sqrt{\mathbf{W}_1^{(c)}}(\mathbf{y}_{1:2n,k|k-1} - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}) \sqrt{\mathbf{R}}]\}$$
 (9)

$$\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{y}}_k} = \text{cholupdate}\{\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{y}}_k}, \mathbf{y}_{0,k|k-1} - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}, \mathbf{W}_0^{(c)}\}$$
 (10)

$$\mathbf{P}_{x_k y_k} = \sum_{i=0}^{2n} \mathbf{W}_i^{(c)} [\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}][\mathbf{y}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}]^T$$
 (11)

$$\mathbf{K}_k = (\mathbf{P}_{x_k y_k} / \mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{y}}_k}^T) / \mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{y}}_k}; \hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1})$$
 (12)

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}_k \mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{y}}_k}; \mathbf{S}_k = \text{cholupdate}\{\mathbf{S}_{k|k-1}, \mathbf{U}, -1\}$$
 (13)

算法中的算子符号 $\text{chol}\{\cdot\}$ 、 $\text{qr}\{\cdot\}$ 和 $\text{cholupdate}\{\cdot\}$ 分别表示矩阵的 Cholesky 分解、QR 分解和一阶更新的 Cholesky 因子的更新; \mathbf{Q}_k 和 \mathbf{R}_k 分别为系统和量测噪声的协方差阵。

2 星载 GPS 卫星实时定轨分析

为了分析 SR-UKF 用于星载 GPS 卫星定轨的性能,本文选用了—个实时定轨(real-time orbit determination)的例子来进行对比分析^[10]。采用的数据源为 GPS/MET 实验(MicroLab-1 卫星),于 1996-10-01 由星载 GPS 接收机所采集的 24 h 数据弧段。采样率为每 5 min 一点。MicroLab-1 卫星是 1995 年发射的,轨道高度大约 740 km。因为是以导航解作为实时定轨的伪观测值,所以滤波时,在力学模型方面作了简化处理,仅考

虑引力场模型。分别采用三种滤波方案 EKF、UKF 和 SR-UKF 进行了计算。

为了评价 EKF、UKF 和 SR-UKF 三种滤波的性能,另外采用精确的力学模型并由最小二乘动力学定轨法给出了 MicroLab-1 卫星在旋转地固系(WGS-84)中的实际位置和速度,并将这一结果用作参考轨道(真实轨道)。

采用三种滤波方案进行滤波时,需要对有关参数进行设定,表 1 给出了滤波参数及其取值情况。

表 1 滤波参数

Tab.1 Filter Parameters

参 数	数 值
引力场模型的阶数	10
积分步长/s	30
观测值标准差/m	100
先验位置标准差/m	1 000
先验速度标准差/(m·s ⁻¹)	10
位置状态噪声/m	0.5
速度状态噪声/(m·s ⁻¹)	0.000 5
观测值编辑标准	3.0

EKF、UKF 和 SR-UKF 三种滤波的状态估计结果(位置误差和速度误差)分别如图 1~图 4 所示。从 4 幅图中可以看出,在初始阶段,由于受比较大的观测误差的影响,位置估计误差和速度估计误差也相应较大。大约 2~3 h 后,滤波进入稳态。

图 1 表示的是 EKF 估计的位置误差,图 2 表示的是 UKF 和 SR-UKF 分别估计的位置误差。从图示结果可以看出,UKF 和 SR-UKF 估计的位置误差基本上没有差别(曲线基本上重合),但它们都比 EKF 估计的相应位置误差要小。

图 3 表示的是 EKF 估计的速度误差,图 4 表示的是 UKF 和 SR-UKF 分别估计的速度误差。与位置估计误差的情况类似,从图中可以看出 UKF 和 SR-UKF 估计的速度误差基本上没有差

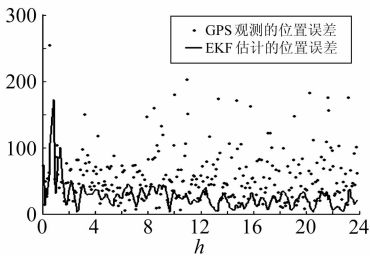


图 1 EKF 状态估计结果(位置)
Fig.1 State Estimation Results
(Position Error): EKF

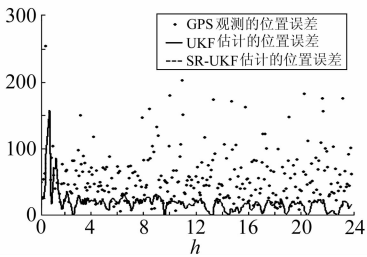


图 2 UKF、SR-UKF 状态估计结果(位置)
Fig.2 State Estimation Results
(Position Error): SR-UKF vs. UKF

别(曲线基本上重合),但它们也都比 EKF 估计的相应速度误差要小。

表 2 给出了三种滤波结果的平均 RMS 误差。值得说明的是,这里的统计结果,是从滤波进行了 2 h 以后再开始统计的,也就是从滤波趋于稳态时开始的。表 2 中的统计结果表明,SR-UKF 和 UKF 的状态估计结果(位置和速度)的平均 RMS 误差基本上一样,都明显比 EKF 的状态估计结果的平均 RMS 误差要小。这也进一步

说明了上述图示的比较结果。

表 2 三种滤波结果的平均 RMS 误差
Tab. 2 Average RMS Error of Three Filters
Estimation Results

方 案	平均 RMS 误差	
	位置/m	速度/(m·s ⁻¹)
EKF	25.50	0.025 5
UKF	17.23	0.017 0
SR-UKF	17.21	0.017 0

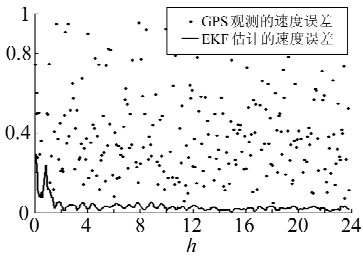


图 3 EKF 状态估计结果(速度)
Fig. 3 State Estimation Results
(Velocity Error): EKF

另外,在计算过程中还发现,虽然 EKF、UKF 和 SR-UKF 这三种滤波方案在计算复杂度方面处于同一量级,但 SR-UKF 的计算效率要明显高于 UKF 和 EKF。

3 结 语

采样型平方根滤波 SR-UKF,即 UKF 的平方根形式,它具有 UKF 相对于 EKF 的所有优点。另外,与 UKF 相比,SR-UKF 还有两个明显的优点。首先,在滤波过程中直接以协方差阵的平方根形式进行递推更新,这样可以降低计算负担获得更高的计算效率;其次,能确保协方差阵的非负定性,从而具有更好的数值稳定性,可以获得更稳定可靠的结果。

星载 GPS 卫星实时定轨的实例也进一步验证了 SR-UKF 的性能确实要优于 EKF 和 UKF。这一滤波方法利用采样点来模拟系统状态的概率分布,不受状态先验分布假设(如 Gaussian 假设)的约束,拥有更高的滤波精度和更广的应用范围,值得深入研究。

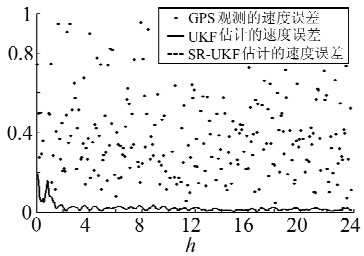


图 4 UKF、SR-UKF 状态估计结果(速度)
Fig. 4 State Estimation Results (Velocity
Error): SR-UKF vs. UKF

学出版社,1984: 88-95

[3] Julier S J, Uhlmann J K, Durrant-Whyte H F. A New Approach for Filtering Nonlinear Systems[C]. The American Control Conference, Evanston, 1995

[4] Julier S J, Uhlmann J K, Durrant-Whyte H F. A New Method for the Nonlinear Transformation of Means and Covariances in Filters and Estimator[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, 45 (3): 477-482

[5] Julier S J. The Scaled Unscented Transformation[C]. The American Control Conference, Evanston, 2002

[6] Julier S J, Uhlmann J K. Unscented Filtering and Non-linear Estimation[J]. IEEE, 2004, 92(3): 401-422

[7] van der Merwe R, Wan E A. Efficient Derivative-Free Kalman Filters for Online Learning[M]. Bruges, Belgium: ESANN, 2001

[8] van der Merwe R, Wan E A. IEEE International Conference on Acoustics[J]. IEEE(Speech and Signal Processing-Proceedings), 2001(3): 3 461-3 464

[9] 吴江飞,黄城. 分布逼近的卡尔曼滤波及其在星载 GPS 卫星定轨中的应用[J]. 天文学报,2005,46 (1):55

[10] Montenbruck O, Gill E. Satellite Orbits[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2000: 303-311

参 考 文 献

[1] Kushner H J. Dynamical Equations for Optimum Nonlinear Filtering[J]. J of Differential Equations, 1967, 26(3): 179-190

[2] 贾沛璋,朱征桃. 最优估计及其应用[M]. 北京:科

第一作者简介:吴江飞,博士,副教授。主要从事空间飞行器精密定轨及其应用、GPS 数据处理等方面的研究。
E-mail: wjf015@163.com

Mathematical Unification and Method Expansion of GNSS Ionospheric Delay Model

LI Zhenghang¹ CHEN Kai¹ LIU Wanke¹ WANG Wenli¹

(1 School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)

Abstract: The research of the ionospheric delay has experienced rapid progress from error elimination, model correction to the terrestrial space environment monitoring, since the last decade. The basic principle and method for the ionospheric delay models universally used are summarized, and almost all the existing models using the first-class-operator-function (FCOF) are mathematically unified. By emphasizing mathematical representation of the ionospheric VTEC and its approaching methods, series of expansion on the methods for establishing the ionospheric delay model, also the potential problems using the newly presented method are mathematically discussed. Finally ,a simple single station model proves the feasibility of the theory.

Key words: GNSS; inospheric delay; spherical model; polynomial model

About the first author: LI Zhenghang ,professor, Ph. D supervisor. He is concentrated on the teaching and research of satellite geodesy. His typical achievements are wide area differential GPS of high precision ; GPS automatic surveying system to monitor Geheyang dam deformation; the demonstrating research for monitoring geological disaster caused by coast with GPS in the Three Gorge region ;research of model of high accuracy deformation monitoring with GPS; etc.

E-mail: zhhli@sgg. whu. edu. cn

(上接第 698 页)

A Sampling-Based Square Root Filter and Its Application

WU Jiangfei¹ HUANG Cheng²

(1 Institute of Surveying and Mapping, Information Engineering University, 66 Middle Longhai Road, Zhengzhou 450052, China)

(2 Shanghai Astronomical Observatory, Chinese Academy of Sciences, 80 Nandan Road, Shanghai 200030, China)

Abstract: The problem of nonlinear system filtering is discassed. And a sampling-based square root filter SR-UKF(square root unscented Kalman filter)is brought forward for real time processing the orbit of GPS-based satellite. In the process of recursive filtering, square root form of the state covariance matrix is used to replace the covariance matrix, which effectively raises the calculation efficiency and numerical stability of the filtering algorithm. An actual example is performed, and the results show that the performance of the SR-UKF is superior to that of the extended Kalman filter and the unscented Kalman filter.

Key words: Kalman filter; nonlinear filter; GPS; orbit determination

About the first author: WU Jiangfei, Ph. D, associate professor, majors in precise orbit determination of spacecraft and its application and GPS data processing, etc.

E-mail: wjf015@163.com