

双曲型经线等面积伪圆柱投影族的研究

刘丽群¹ 乔俊军²

(1 武汉大学新闻与传播学院,武汉市珞珈山,430072)
(2 武汉大学测绘学院,武汉市珞喻路 129 号,430079)

摘 要:构建了一个纬线表象为平行于赤道的直线,经线表象为对称于中央直经线的双曲线,且面积没有变形的投影集合,并得到一组概括公式。该公式不仅包括了克拉斯特创建的经线交于极点的双曲经线等面积伪圆柱投影,而且包括了经线交于极线的双曲经线等面积伪圆柱投影。

关键词:地图投影;双曲线;等面积;伪圆柱

中图法分类号:P282.1

等面积伪圆柱投影是纬线描写为平行于赤道的直线,经线描写为对称于中央直经线的曲线,且面积没有变形的投影。由于该投影在表现地物沿纬度地带性分布上有明显的优势,并且经纬网呈球形结构,具有强烈的立体效果,所以,等面积伪圆柱投影广泛应用于小比例尺地图,特别是在编制世界地图时多用此投影。对等面积伪圆柱投影理论和方法的研究源远流长,自 17 世纪以来,桑生、摩尔魏特、古德、爱凯特、卡弗拉伊斯基、乌尔马耶夫、克拉斯特、哈默等人就拟定出各种经线的等面积伪圆柱投影,为当时的地图投影学作出了巨大的贡献。但是这些投影各自独立,没有形成一个完整的体系。直到 20 世纪末,随着计算机技术在地图投影方面的应用,地图投影学已突破了传统的研究内容和研究方法,通过设置经纬网控制参数的方法,把这些各自独立的投影有机地联系起来,并统一于一个投影系统中,使得等面积伪圆柱投影的研究在深度和广度方面有了新的发展。

1 参数转换及模型建立

本文在前人研究的基础上,利用等面积伪圆柱投影理论,对以双曲线为经线的等面积伪圆柱投影进行了专门研究,构建了一个纬线表象为平行于赤道的直线,经线表象为对称于中央直经线

的双曲线,且面积没有变形的投影集合。根据双曲线参数方程,可得到如下公式:

$$\left. \begin{aligned} x &= C \tan \alpha \\ y &= (A \sec \alpha + B) \lambda \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中, A 、 B 、 C 为待定系数,由投影的特定条件决定; α 是纬度 φ 的当量纬度,其函数关系不是线性函数关系,而是由等面积条件所决定的非线性函数关系,同时规定:当 $\varphi=0^\circ$ 时, $\alpha=0$; 当 $\varphi=90^\circ$ 时, $\alpha=\beta \quad (0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2})$ 。

对式(1)求偏导数,有:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= C \sec^2 \alpha \frac{d\alpha}{d\varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= A \lambda \sec \alpha \tan \alpha \frac{d\alpha}{d\varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= 0 \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= A \sec \alpha + B \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

将上述各导数代入等面积条件,得:

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = \frac{R^2 \cos^3 \alpha \cos \varphi}{C(A + B \cos \alpha)} \quad (3)$$

对上式积分,得:

$$2R^2 \sin \varphi = C[A \sec \alpha \tan \alpha + A \ln(\sec \alpha + \tan \alpha) + 2B \tan \alpha] \quad (4)$$

式中,当 $\varphi=0^\circ$ 时, $\alpha=0$, 所以积分常数也为零。

为了能够预设投影后的经纬网形状,以中央

经线为 x 轴,以赤道为 y 轴,建立平面直角坐标系 xoy ,如图 1 所示。图中 oP 为中央经线; oP_1 赤道; pP_2 为极线; P_1P_2 为离中央经线 180° 的边缘经线; $P_1(x_1,y_1)$ 、 $P_2(x_2,y_2)$ 为边缘经线与赤道和

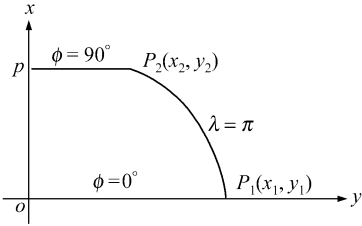


图 1 伪圆柱投影坐标示意图

Fig. 1 Reference Frame Of Pseudo-Cylinder Projection

极线相交的两个点,于是由式(1)可得:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = (A + B)\pi \\ x_2 = C\tan\beta \\ y_2 = (A\sec\beta + B)\pi \end{cases}$$

为了把待定系数 A 、 B 、 C 转换为可控制变量,笔者引进参变量 a 、 b ,同时规定: a = 中央经线/赤道, b = 极线/赤道,于是有:

$$a = C\tan\beta/(A + B)\pi \tag{5}$$

$$b = (A\sec\beta + B)\pi/(A + B)\pi \tag{6}$$

将 $\varphi = 90^\circ$ 时, $\alpha = \beta$ 代入式(4),得:

$$2R^2 = C[A\sec\beta\tan\beta + A\ln(\sec\beta + \tan\beta) + 2B\tan\beta] \tag{7}$$

联立式(5)、式(6)、式(7)解方程,在双曲经线参数方程中, A 与 λ 的符号应相反,所以 A 取负值,得:

$$\begin{cases} A = -(1 - b)D \\ B = (\sec\beta - b)D \\ C = \frac{\pi a (\sec\beta - 1)}{\tan\beta} D \end{cases} \tag{8}$$

式中, $D =$

$$R\sqrt{\frac{2\tan\beta}{\pi a (\sec\beta - 1) [2(\sec\beta - b)\tan\beta - (1 - b)D_\beta]}}$$
$$D_\beta = \sec\beta\tan\beta + \ln(\sec\beta + \tan\beta)$$
$$D_\alpha = \sec\alpha\tan\alpha + \ln(\sec\alpha + \tan\alpha)$$

将 A 、 B 、 C 代入式(1)、式(4)及变形公式,得:

$$\begin{cases} x = \pi a (\sec\beta - 1) D \frac{\tan\alpha}{\tan\beta} \\ y = [-(1 - b)\sec\alpha + (\sec\beta - b)] D \lambda \\ \sin\varphi = \frac{2(\sec\beta - b)\tan\alpha - (1 - b)D_\alpha}{2(\sec\beta - b)\tan\beta - (1 - b)D_\beta} \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \tan\epsilon &= \frac{(1 - b)\tan\beta}{\pi a (\sec\beta - 1)} \lambda \sin\alpha \\ n &= \frac{-(1 - b)\sec\alpha + \sec\beta - b}{R \cos\varphi} D \\ m &= \frac{\sec\epsilon}{n}, P = 1, \tan \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{m^2 + n^2 - 2} \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

这就是双曲型经线等面积伪圆柱投影族的一般公式。

2 参数设置及典型案例

在这个投影族的一般公式中,适当选择可控参数 a 、 b 、 β ,便可得到一系列投影案例。

1) 当 $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$, $\beta = \frac{\pi}{4}$ 时,

$$D = \frac{2R}{\sqrt{\pi(\sqrt{2} - 1)}[\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1)]}$$

由式(9)可得:

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{\pi(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1)}} R \tan\alpha \\ y &= \frac{2R(\sqrt{2} - \sec\alpha)}{\sqrt{\pi(\sqrt{2} - 1)}[\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1)]} \lambda \\ \sin\varphi &= \frac{2\sqrt{2}\tan\alpha - D_\alpha}{\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1)} \\ \tan\epsilon &= \frac{2(\sqrt{2} + 1)}{\pi} \lambda \sin\alpha \\ n &= \frac{2(\sqrt{2} - \sec\alpha)\sec\varphi}{\sqrt{\pi(\sqrt{2} - 1)}[\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1)]} \\ m &= \frac{\sec\epsilon}{n}, P = 1, \tan \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{m^2 + n^2 - 2} \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

这就是克拉斯特(Craster)双曲经线等面积伪圆柱投影,如图 2 所示。

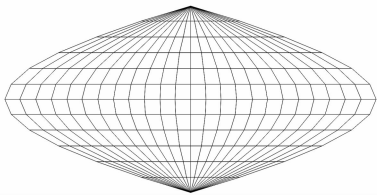


图 2 克拉斯特双曲经线等面积伪圆柱投影
Fig. 2 Craster Hyperbola-Longitude Equalarea Pseudo-Cylindrical Projection

2) 当 $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$ 时,

$$D = \frac{4R}{\sqrt{2\pi(\sqrt{2} - 1)}[3\sqrt{2} - 2 - \ln(\sqrt{2} + 1)]}$$

由(9)式可得：

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{2\pi(\sqrt{2}-1)}{3\sqrt{2}-2-\ln(\sqrt{2}+1)}}R\tan\alpha \\ y &= \frac{2R(2\sqrt{2}-1-\sec\alpha)}{\sqrt{2\pi(\sqrt{2}-1)[3\sqrt{2}-2-\ln(\sqrt{2}+1)]}}\lambda \\ \sin\varphi &= \frac{2(2\sqrt{2}-1)\tan\alpha-D_a}{3\sqrt{2}-2-\ln(\sqrt{2}+1)} \\ \tan\epsilon &= \frac{\sqrt{2}+1}{\pi}\lambda\sin\alpha \\ n &= \frac{2(2\sqrt{2}-1-\sec\alpha)\sec\varphi}{\sqrt{2\pi(\sqrt{2}-1)[3\sqrt{2}-2-\ln(\sqrt{2}+1)]}} \\ m &= \frac{\sec\epsilon}{n}, P=1, \tan\frac{\omega}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{m^2+n^2-2} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

这是一种新的极点投影为极线的双曲线等面积伪圆柱投影，如图 3 所示。

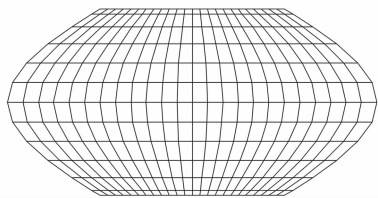


图 3 极点投影为极线的双曲线等面积伪圆柱投影
Fig. 3 Hyperbola-Longitude Equalarea Pseudo-Cylindrical Projection With Poles Projecting as Polars

3) 当 $a=\frac{1}{2}, b=1, \beta=\frac{\pi}{4}$ 时，

$$D=\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\sqrt{2}+1)R, \tan\alpha=\sin\varphi,$$

由式(9)可得：

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}R\sin\varphi \\ y &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}R\lambda \\ m &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi, n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sec\varphi \\ P &= 1, \tan\frac{\omega}{2}=\frac{1}{2}|m-n| \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

这是一种等面积圆柱投影，如图 4 所示。

3 参数分析及几何解释

研究投影族的目的，不仅仅在于概括原有的投影，而在于探求新的投影，丰富投影内容，揭示投影间的相互关系和内在联系，从而更好地使用投影。现在对公式中的参变量 a, b, β 进行分析和

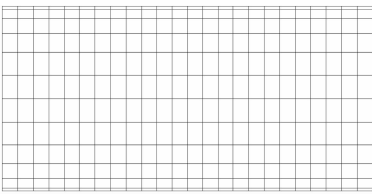


图 4 等面积圆柱投影
Fig. 4 Equalarea Cylindrical Projection

几何解释。

参数 a 为中央经线与赤道之比， a 值越大，中央经线越长，反之越短。在通常情况下， $a=1/2$ 。

参数 b 为极线与赤道之比， b 值越大，极线越长，反之越短。 b 在投影的变化过程中起着主导作用。当 $b=0$ 时，两极投影为极点。而当 $b=1/2$ 时，两极投影为极线，且为赤道的一半。当 $b=1$ 时，极线与赤道等长，经线成为直线。这说明在 b 尚未等于 1 之前，投影始终是量的变化，一旦到了 $b=1$ 的时候，投影则发生质的变化，即由伪圆柱投影变为圆柱投影。

参数 β 为 $\varphi=90^\circ$ 时的当量纬度，用来调节纬线间的间隔。 β 值越小，纬线间隔由赤道向两极递减的速度就越快，反之越慢。在通常情况下， $\beta=\pi/2$ 。

在一般情况下，经线的形状为同轴双曲线。当 $B=0$ ，即 $b=\sec\beta$ 时，经线为同心双曲线。当 $A=C$ ，即 $b=1+\pi\tan(\beta/2)$ 时，经线为等轴双曲线。当 $A=0$ ，即 $b=1$ 时，经线为竖直直线。

4 结 语

通过上述推导可以清楚地看到，该投影族是一个具有双重结构的投影集合，纵向结构通过 a 的变化可得到不同高度的投影，而横向结构通过 b 的变化可得到不同经线形状的投影。它不仅包括了克拉斯特(Craster)创建的经线交于极点的双曲线等面积伪圆柱投影，而且包括了经线交于极线的双曲线等面积伪圆柱投影，同时也验证了等面积圆柱投影仅是等面积伪圆柱投影的特例。这不仅丰富和发展了等面积伪圆柱投影的理论和方法，而且也揭示了这些投影间的内在联系和外在变化规律，使得在探求新投影方面表现出明显的优越性、灵活性、实用性和可控制性，是一个具有一定理论价值和实用价值的新型投影族。

参 考 文 献

[1] 吴忠性,杨启和. 数学制图学原理[M]. 北京:测绘

出版社,1989

[2] 胡毓钜,龚剑文,黄伟[M]. 地图投影. 北京:测绘出版社,1981

[3] 张顺卿. 一种正弦等面积伪圆柱投影族[J]. 地图, 1991(2): 50-51

[4] 胡景星,胡松林. 一集等面积类圆柱投影[J]. 武测科技,1996(1):15-17

[5] 胡景星. 论探求地图投影的图形拓扑法[J]. 地图, 1994(4):3-7

[6] 胡景星. 地球极表象为直线的再投影法[J]. 郑州测绘学院学报,1994(2):130-132

第一作者简介:刘丽群,副教授,博士生,主要从事地理信息系统和网络传播研究与教学。
E-mail:llq8826@126.com

On Family of Hyperbola-Longitude Equalarea Pseudo-Cylindrical Projection

LIU Liqun¹ QIAO Junjun²

(1 School of Journalism and Communication, Wuhan University, Luoja Hill, Wuhan 430072, China)
(2 School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University,129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)

Abstract: An equalarea pseudo-cylindrical projection gather is constructed, in which the lon-
gitudes are hyperbola being symmetrical to the central meridian and the latitudes are parallel
lines. A generalized formula is also derivated.
Key words: map projection; hyperbola; equalarea; pseudo-cylinder

About the first author: LIU Liqun, Ph. D candidate, associate professor, majors in GIS and online communication.
E-mail: llq8826@126.com

第 10 届《武汉大学学报·信息科学版》编辑委员会

顾 问: 宁津生 张祖勋 李德仁
主任委员: 刘经南

委 员: 万幼川 毋河海 王新洲 申文斌 许才军 朱 庆 朱灼文 朱欣焰
关泽群 孙 洪 孙海燕 刘耀林 张正禄 张剑清 李征航 李建成
李清泉 李 斐 李 霖 杜清运 杜道生 易 帆 罗志才 郑肇葆
费立凡 祝国瑞 柳建乔 胡瑞敏 陶本藻 徐绍铨 袁修孝 秦前清
黄金水 龚健雅 舒 宁
通信委员: 王任享 王家耀 史文中 朱文耀 孙和平 孙 群 刘雁春 吴 云
吴晓平 张永生 陈永奇 陈 军 陈述彭 陈俊勇 杨元喜 欧吉坤
翟国君 魏子卿

主 编: 刘经南(兼)
常务副主编: 柳建乔