

# 地影模型对导航卫星轨道数值积分的影响及改进

陈刘成<sup>1,2</sup>

(1 上海天文台,上海市南丹路 80 号,200030)  
(2 北京环球信息应用开发中心,北京市 5136 信箱,100094)

**摘 要:**以 RKF7(8)和 Adams 12 阶 PECE 方法为例,分析了单步法积分器和多步法积分器在圆柱体、双锥形地影模型下,地影边界对导航卫星轨道积分的影响,并提出了相应的改进方法。改进方法原理简单,在 3 d 积分弧段内最大误差优于 cm 级。

**关键词:**天体测量学;地影模型;数值积分;改进 Encke 积分

**中图法分类号:**P228.42

人造地球卫星轨道确定方法可分为分析法和数值积分法<sup>[1]</sup>。对于高精度卫星轨道确定来讲,数值积分方法是惟一的手段<sup>[2]</sup>。数值积分法以函数值的不同线性组合值代替函数高阶导数,并利用 Taylor 公式展开。积分精度受积分方法能达到阶数的影响,同时还受函数光滑性的影响<sup>[3]</sup>。

地影模型涉及到地球形状、大气对太阳光的折射、散射、吸收等多种物理因素的影响<sup>[4]</sup>。目前,简单的圆柱体模型和双锥体模型<sup>[4,5]</sup>的导数不连续;采用双锥体模型,则卫星位置的三阶导数的光压摄动部分不连续或近似不连续<sup>[5]</sup>。这就违背了积分器要求积分函数及其高阶导数光滑的前提条件。这种不连续对轨道积分的影响取决于积分器跨过地影/半影边界的处理。

一般情况下,数值积分器的积分步长越大,轨道积分误差就越大<sup>[5]</sup>。但是为了提高积分的效率,用户一般会尽可能取较大的积分步长,此时需要采取某种改进措施来减小边界问题的影响。

对上述问题的解决方法可以分为经验力补偿模式和改进积分器模式。本文主要讨论通过改进积分器来减小积分误差。

Lundberg 等为多步法积分器设计了卫星经

过地影边界的积分误差修正算法<sup>[6]</sup>,但是这种方法对不同的积分器需要设计特定的算法,这样,积分误差便会随时间的推移而减小<sup>[7]</sup>。文献[8]分别对单步法和多步法积分器提出了改进。文献[5]提出了一种根据改进的 Encke 积分方法来减小地影边界问题积分误差的修正积分方法,但它需要保留积分步长和积分节点的信息。

## 1 地影边界问题的 Encke 改进积分

将文献[1,9]中提出的改进的 Encke 积分方法用于改进地影边界对轨道积分的影响,即在卫星经过地影/半影边界时,分两步进行轨道积分。

1) 将光压系数设为常数,以 Cowell 运动方程对卫星轨道进行积分,并将积分的结果作为参考轨道  $\vec{r}_c$ ,这里的积分称为主积分。

2) 采用改进的 Encke 积分,对参考轨道  $\vec{r}_c$  进行改进,考虑的因素包括实际 SRP(太阳辐射光压)与主积分中 SRP 的差别以及二体吸引力差别,忽略其他摄动力差别。这里的积分称为改进积分,可以通过一步或者两步改进完成。公式为:

$$\Delta \ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \left[ \left( 1 - \frac{r_c^3}{r^3} \right) \vec{r} - \Delta \vec{r} \right] + \kappa \vec{\alpha}_{\text{SRP}} \begin{cases} \kappa = 1, \text{全影到全照} \\ \kappa = -1, \text{全照到半影} \\ -1 < \kappa < 1, \text{半影} \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $\vec{r}$  为改正后的状态;  $\vec{r}_c$  是参考状态;  $\kappa$  为第 二步改进积分中光压系数(主积分 SRP 系数与实

际 SRP 系数的差别)。

## 2 Encke 改进积分方法实现过程

本文以常用的单步法 RKF7(8)、多步法 12 阶 Adams PECE 方法为主积分器, Encke 改进积

分方法采用 RKN6(7)积分器,来具体分析地影模型对积分结果的影响及 Encke 改进效果<sup>[2,10-12]</sup>。

1) 在 RKF7(8)主积分步长经过地影边界时,将主积分整个步长内的 SRP 系数  $\kappa$  设为 0 或者 1,积分生成参考轨道,再进行改进积分,以修正卫星位置和速度。

表 1 RKF7(8)改进积分条件及起止时间

Tab.1 The Conditions of the Corrected Integrator for RKF7(8) and Its Start and End Time

地影模型	开始状态	结束状态	改进积分 1	改进积分 2	主积分光压常数系数
圆柱体模型	全日照	全影	S/U to EOS	无	1.0
	全影	全日照	U/S to EOS	无	0.0
双锥形模型	全日照	半影	S/P to EOS	无	1.0
	全日照	全影	S/P to P/U	P/U to EOS	1.0
	全影	半影	U/P to EOS	无	0.0
	全影	全日照	U/P to P/S	P/S to EOS	0.0
	半影	全日照	SOS to P/S	P/S to EOS	0.0
	半影	全影	SOS to P/U	P/U to EOS	0.0

表 1 中,S/U、U/S 表示全日照与全影之间的边界;S/P、P/S 表示全日照与半影之间的边界;P/U、U/P 表示半影与全影之间的边界;SOS 表示主

积分开始时刻;EOS 表示主积分结束时刻。

2) 在 PECE 主积分步长经过地影/半影边界时,将主积分器积分步长内的 SRP 系数  $\kappa$  设为 0

表 2 12 阶 PECE 改进积分的条件及起始时间

Tab.2 The Conditions of the Corrected Integrator for AM(12) and Its Start and End time

地影模型	开始	结束	改进积分 1	改进积分 2	主积分光压常数系数	备注
圆柱体模型	全日照	全影	S/U to EOS	无	1.0	过界后主积分扣除光压
	全影	全日照	U/S to EOS	无	0.0	过界后主积分恢复光压
	全日照	半影	S/P to EOS	无	1.0	过界后主积分扣除光压
	全日照	全影	S/P to P/U	P/U to EOS	1.0	过界后主积分扣除光压
	全影	半影	U/P to EOS	无	0.0	
双锥形模型	全影	全日照	U/P to P/S	P/S to EOS	0.0	
	半影	全日照	SOS to P/S	P/S to EOS	0.0	过界后主积分恢复光压
	半影	全影	SOS to P/U	P/U to EOS	0.0	过界后主积分恢复光压
	半影	半影	SOS to EOS	无	0.0	

或者 1,积分生成参考轨道,再进行 Encke 改进积分,修正卫星位置和速度。根据具体情况,改进积分需要一步或者两部完成。

主积分跨过边界后的第一步积分需要对历史节点的右函数值进行改正,增加或者扣除对应位置的光压摄动量(不考虑地影遮挡),人为保证主积分器中各个节点上的光压连续。

## 3 算例分析

本文选择 GEO 卫星作为实例来说明地影问题对轨道积分的影响及改进方法。导航星座其他类型卫星与 GEO 卫星略有不同,但是基本的分析方法和结论与 GEO 卫星基本类似。

### 3.1 模拟条件

卫星初始状态如下: UTC 为 2003-09-20T12:00:00,开普勒轨道根数为(42 164 142.1

m, 0.000 1, 0.000 1, 100°, 40°, 100°)。摄动模型采用 JGM-2 12×12 阶重力场,日、月第三体引力,球形光压模型,IERS B 公报的极移参数和地球自转参数。

### 3.2 比对方法

为了描述问题的方便,本文把卫星经过地影边界时,适当调整积分步长,使积分的节点正好落在地影/半影边界上的积分<sup>[7]</sup>称为调整积分;把始终使用固定步长的积分称为正常积分;把利用 Encke 改进的正常积分称为改进积分。采用较小步长(10 s)的 RKF7(8)积分器,对 GEO 卫星进行轨道积分,以此积分结果作为其他积分结果比较的标准轨道。

### 3.3 地影边界对积分的影响

#### 3.3.1 RKF7(8)积分器正常积分误差

从图 1(a)~1(b)可以看出,地影边界问题对 RKF7(8)积分器轨道积分的影响主要在沿迹方

向。对单步法轨道积分的影响较圆柱体模型小 1~2 个量级(步长控制在一定范围内)。对单步法积分器而言,积分步长取得越大,地影边界问题造成的误差就越大。

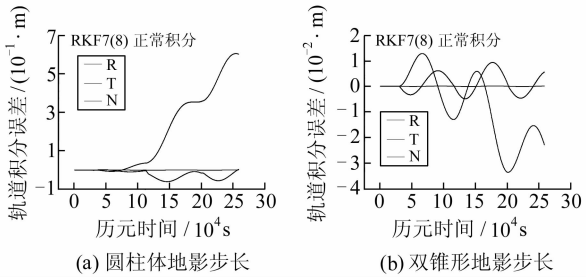


图 1 RKF7(8)积分器 240 s 积分误差  
Fig. 1 Orbit Error Integrated by RKF7(8)  
with Fixed Step is 240 s

3.3.2 12 阶 PECE 正常积分误差

地影边界问题对 PECE 正常积分的影响,从图 2(a)~2(b)可以得出与 RKF7(8)正常积分类似的结论。在相同条件下,因地影边界问题造成的轨道积分误差,多步法明显比单步法要大。

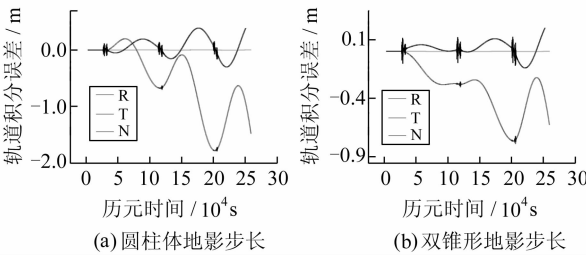


图 2 轨道正常积分 240 s 误差  
Fig. 2 Orbit Error Integrated by AM  
with Fixed Step is 240 s

3.3.3 RKF7(8) 调整积分误差

从图 3(a)~3(b)可以看出,采用 RKF7(8)调整积分,对改进地影边界影响效果显著,对圆柱体地影模型的改进效果尤为明显。

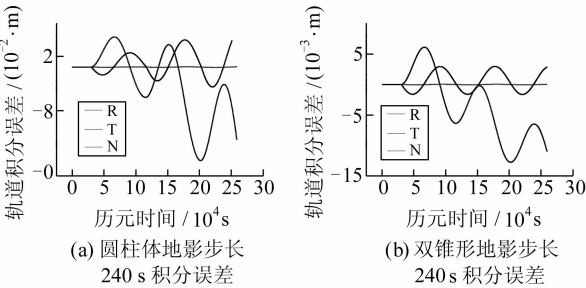


图 3 调整积分误差  
Fig. 3 Orbit Error Integrated  
by Adjusted RKF7(8)

综上所述,可以得到以下结论。

1) 地影边界问题对轨道积分造成的主要积分误差在沿迹方向。

2) 相比较而言,单步法积分器在取合适的较小步长时,或者通过变步长调整积分时,能有效地抑制地影边界问题造成的轨道积分误差。

3) 选择适当的积分步长,多步法积分器也可以把由双锥形地影边界问题引起的积分误差控制在较小的范围内。

4) 利用 PECE 多步法积分器,对圆柱体地影模型边界问题比较敏感,造成的轨道积分误差较大,必须对此问题进行特殊处理。

3.3.4 Encke 改进积分效果

采用双锥形地影模型的边界问题,对于 RKF7(8)积分器而言,改进积分与 RKF7(8)调整积分效果类似。相比较而言,改进积分算法较 RKF7(8)调整积分方法复杂,没有明显优势。对于 PECE 多步法积分器,改进积分不能有效改进 PECE 多步法积分误差,多步法积分器可以选择适当的积分步长,把边界问题引起的积分误差控制在较小范围内。

采用圆柱体地影模型的边界问题,对于 RKF7(8)单步法积分器而言,改进积分对 RKF7(8)主积分器的改进效果与 RKF7(8)调整积分效果类似,没有明显优势。对于 PECE 多步法积分器而言,只要积分步长控制在一定的范围内,改进积分就能很好地改进积分效果。

对地影边界问题,RKF7(8)或者 PECE 改进积分的效果与第二步 Encke 改进积分弧长有关。Encke 积分累积弧长越长,改进效果越差。这也正是改进积分对于双锥形地影模型的改进效果比较差的原因。

4 结 语

采用单步法进行导航卫星轨道积分时,取适当的积分步长,通过调整积分,使积分的节点正好落在地影模型的边界上,无论是圆柱体地影还是双锥形地影,都可以把边界问题造成的积分误差控制在 cm 级以下。

采用多步法(12 阶 PECE)进行轨道积分时,选择合适的积分步长(步长小于卫星在半影区时间),多步法积分器能把双锥形地影模型边界问题造成的积分误差控制在 cm 级以下;采用改进积分的方法,选择合适的积分步长,多步法积分器(12 阶 PECE)能把圆柱体地影模型边界问题造

成的积分误差控制在 cm 级以下。

参 考 文 献

[1] Natthew M B. A Variable-Step Double-Integration Multi-Step Intergrator [D]. Blacksburg Virginia: Aerospace Engineering, 2004

[2] Oliver M, Eberhard G. Satellite Orbits Models, Methods, Applications[M]. New York: Springer Publishing Company, 2000

[3] 金一庆,陈越. 数值方法[M]. 北京:机械工业出版社,2000

[4] Vokrouhlicky D, Farinella F, Mignard F A. Solar Radiation Pressure Perturbations for Earth Satellites [J]. Astrophys, 1993, 280:295-312

[5] Woodum J. Mitigation of the Effects of Eclipse Boundary Crossings on the Numerical Integration of Orbit Trajectories Using an Encke Type Correction Algorithm[C]. AAS/AIAA, Santa Barbara, CA, 2001

[6] Lundberg J B, Feulner M R, Abusali P A M, et al. Improving the Numerical Integration Solution of

Satellite Orbits in the Presence of Solar Radiation Pressure Using Modified Back Differences [C]. AAA/AIAA, Houston,TX, 1991

[7] Lundberg J B. Mitigation of Satellite Orbit Errors Resulting from the Numerical Integration Across Shadow Boundaries [C]. AAA/AIAA, Halifax, Nova Scotia, 1995

[8] 王歆,刘林. 人卫数值法定轨中运动方程右函数间断的处理[J]. 飞行器测控学报,1999, 18(4):9-12

[9] 刘林. 天体力学方法[M]. 南京:南京大学出版社, 1998

[10] 李庆扬,王能超,易大义. 数值分析[M]. 北京:清华大学出版社,2001

[11] 刘林. 人造地球卫星轨道力学[M]. 北京:高等教育出版社,1992

[12] 李济生. 人造卫星精密轨道确定[M]. 北京:解放军出版社,1995

作者简介:陈刘成,博士,主要研究方向为卫星导航和精密定轨。  
E-mail:jobender@tom. com

How Navigation Satellite Orbit Numerical Integration Affected  
by Shadow Model and Its Correcting Methods

CHEN Liucheng<sup>1,2</sup>

(1 The Shanghai Astronomical Observatory, 80 Nandan Road, Shanghai 200030, China)  
(2 The Beijing Global Information Application and Development Center, Box 5136, Beijing 100094, China)

**Abstract:** In this article, it is analyzed that how the GEO orbit propagation with a singe step numerical integrator, the representative Runge-Kutta(RKF7(8)) method, or a multi-steps one, the representative 12 degrees PECE method, affected by the boundaries of cylinder shadow model or conical shadow model. And more, some correcting methods are introduced according to the idiographic problems. All the introduced methods are convenient for users to program with simple principles, and lead to high accuracy corrected orbit. The maximal bias in 3 day length arcs is in centimeter magnitude, even less.

**Key words:** astrometry; shadow model; numerical integration; corrected Encke integration

**About the author:** CHEN Liucheng, Ph.D, the main research orientations are satellite navigation and precise orbit determination.  
E-mail: jobender@tom. com