文章编号：1671-8860(2007)03-0255-04　　**文献标志码**：A

子午线弧长反问题新解

郑　彤[1]　边少锋[1]

（1　海军工程大学导航工程系，武汉市解放大道717号，430033）

摘　要：针对子午线弧长反解计算过于繁琐的问题，利用复合函数的求导法则，变换变量进行幂级数展开，给出了通项公式，利用Hermite插值原理推导了各参数，借助Mathematica计算机代数系统，得出了这些公式用偏心率e表示的幂级数表达式。经试算其精度在0.001″以上，可供实际使用。

关键词：椭球大地测量；子午线弧长反解；Mathematica；幂级数展开

中图法分类号：P226

众所周知，椭球的子午线弧长计算[1-6]，是在处理大地测量、天文测量、航天航空技术的某些问题，以及在处理地理信息系统环境中的某些几何问题时，都要经常进行的一项工作。通常，子午线弧长的计算式都是把椭圆积分的表达式，依二项式展开成级数形式后，再逐项积分，在保证必要的最佳精度（通常为0.01 mm）下给出实用的计算式。但在由弧长反求子午线对应的纬度时，相应的导数不是弧长变量的显函数，即便按二项式展开也不可能对其进行逐项积分。因而围绕这一问题就有不同的解法，总体上可归纳为迭代解法和直接解法。迭代解法就是套用子午线弧长正解公式，按牛顿迭代法迭代求出弧长相应的纬度。直接解法可分为插值法建立的多项式逼近公式[7]与利用三角级数回求法求出的直接解公式[8]两类。三角级数回求法一定程度上解决了这些问题，但涉及数学分析中较复杂的Lagrange级数理论，推导过程复杂，又在一定程度上影响了这些公式的应用。笔者重新研究了子午线弧长反问题，借助Mathematica计算机代数系统[3]，利用隐函数及复合函数的求导法则和Hermite型插值公式，给出了子午线弧长反问题的几种直接解法。

1　子午线弧长计算公式简介

根据椭球的几何参数，计算由赤道到纬度B处的椭球子午线弧长[1-6]为：

$$X=\int_0^B a(1-e^2)(1-e^2\sin^2 B)^{-3/2}\mathrm{d}B \tag{1}$$

式中，X为弧度变量；B为大地纬度；e为偏心率。

利用Mathematica计算机代数系统，通过级数展开、积分和三角函数指数化倍角3个命令，子午线弧长展开式为：

$$\begin{aligned}X={}&a(1-e^2)\Big[B-\Big(\frac{3}{8}\sin 2B-\frac{3}{4}B\Big)e^2+\Big(\frac{15}{256}\\&\sin 4B-\frac{15}{32}\sin 2B+\frac{45}{64}B\Big)e^4-\Big(\frac{35}{3\ 072}\sin 6B-\\&\frac{105}{1\ 024}\sin 4B+\frac{525}{1\ 024}\sin 2B-\frac{175}{256}B\Big)e^6+\Big(\frac{315}{131\ 072}\\&\sin 8B-\frac{105}{4\ 096}\sin 6B+\frac{2\ 205}{16\ 384}\sin 4B-\frac{2\ 205}{4\ 096}\\&\sin 2B+\frac{11\ 025}{16\ 384}B\Big)e^8+O(e^{10})\Big]\end{aligned} \tag{2}$$

2　子午线弧长反问题

为解决子午线弧长反问题，即已知子午线弧长，求对应的大地纬度，需要引入一个类似于纬度的变量x。子午线弧长微分公式为[1-3]：

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}B}=\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 B)^{3/2}} \tag{3}$$

式中，X并不具有类似于纬度变量B的变化特征。为此，先求出一个象限内椭圆的弧长$X(\pi/2)$，将$B=\pi/2$代入式(2)，可得：

$$X(\pi/2)=a(1-e^2)\Big(1+\frac{3}{4}e^2+\frac{45}{64}e^4+$$

收稿日期：2006-12-25。

项目来源：国家杰出青年科学基金资助项目(40125013)。

$$\frac{175}{256}e^6+\frac{11\,025}{16\,384}e^8+\cdots)\ \frac{\pi}{2} \tag{4}$$

然后将子午线弧长 X"类纬度化"，即将子午线除以 $X(\pi/2)$并乘以 $\pi/2$，可得：

$$x=\frac{X}{X(\pi/2)}\cdot\frac{\pi}{2}=$$

$$\frac{X}{a(1-e^2)(1+\frac{3}{4}e^2+\frac{45}{64}e^4+\frac{175}{256}e^6+\frac{11\,025}{16\,384}e^8+\cdots)} \tag{5}$$

由此可知，当 $X=0$ 时，$x=0$；$X=X(\pi/2)$时，$x=\pi/2$。引入定义：

$$A=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{(1-e^2\sin^2B)^{3/2}}\mathrm{d}B \tag{6}$$

利用 Mathematica 计算机代数系统，将 A 展开成偏心率 e 的幂级数形式可得：

$$A=1+\frac{3}{4}e^2+\frac{45e^4}{64}+\frac{175e^6}{256}+\frac{11\,025e^8}{16\,384}+\cdots \tag{7}$$

利用式(5)、式(3)，可变形为：

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x}=A(1-e^2\sin^2B)^{3/2} \tag{8}$$

2.1　子午线弧长反解的解析型幂级数展开

式(8)是 x 的隐函数，以往反解问题多使用迭代法[1,2]、插值法[4]和三角级数回求法[5]。利用隐函数的求导法则，将其展开为子午线弧长新变量 x 的正弦幂级数。为使展开过程简明一些，引入另一新变量 $t=e\sin x$，则有：

$$\mathrm{d}t=e\cos x\mathrm{d}x,\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{e\cos x} \tag{9}$$

并记：$$f(t)=\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=A(1-e^2\sin^2B)^{3/2} \tag{10}$$

将 $f(t)$展开为如下幂级数形式：

$$f(t)=\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x}=f_t(0)+f'_t(0)t+\frac{1}{2!}f''_t(0)t^2+\frac{1}{3!}f_t(0)t^3+\cdots \tag{11}$$

利用复合函数求导的链式法则：

$$f'_t=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}B}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\ f''_t=\frac{\partial f'}{\partial B}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f'}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\cdots \tag{12}$$

借助 Mathematica 计算机代数系统，并略去求解过程依次可求得：

$$f'_t(0)=0,\ f''_t(0)=-3A^3,\ f'''_t(0)=0,\ f_t^{(4)}(0)=\frac{3A^3(-4+A^2(4+15e^2))}{e^2},\ f_t^{(5)}(0)=0,$$

$$f_t^{(6)}(0)=\frac{3A^3(64-20A^2(4+15e^2)+A^4(16+372e^2+525e^4))}{e^4},\ f_t^{(7)}(0)=0,\ f_t^{(8)}(0)=$$

$$\frac{3A^3(-2\,304+784A^2(4+15e^2)-56A^4(16+372e^2+525e^4)+A^6(64+6\,768e^2+42\,360e^4+33\,075e^6))}{e^6} \tag{13}$$

利用 Mathematica 计算机代数系统，将上述变量展开成偏心率 e 的幂级数形式并代入式(11)，可得：

$$f(t)=A-\frac{3A^3}{2!}(e\sin x)^2+\frac{3A^3[-4+A^2(4+15e^2)]}{4!e^2}(e\sin x)^4+$$

$$\frac{3A^3[64-20A^2(4+15e^2)+A^4(16+372e^2+525e^4)]}{6!e^4}(e\sin x)^6+$$

$$\frac{3A^3[-2\,304+784A^2(4+15e^2)-56A^4(16+372e^2+525e^4)+A^6(64+6\,768e^2+42\,360e^4+33\,075e^6]}{8!e^6}\cdot$$

$$(e\sin x)^8 \tag{14}$$

将式(14)逐项积分，并将式(7)代入，由于 e^{10} 只有 10^{-14} m 的量级，将其舍去，可得：

$$B=x+\alpha\sin2x+\beta\sin4x+\gamma\sin6x+\delta\sin8x$$

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{8}e^2+\frac{3}{16}e^4+\frac{213}{2\,048}e^6+\frac{255}{4\,096}e^8\\ \frac{21}{256}e^4+\frac{21}{256}e^6+\frac{533}{8\,912}e^8\\ \frac{151}{6\,144}e^6+\frac{151}{4\,096}e^8\\ \frac{1\,097}{13\,1072}e^8\end{pmatrix} \tag{15}$$

上式为子午线弧长反解三角函数倍角形式，而对计算机编程子午线弧长反解的三角函数指数形式具有更高的计算效率。略去推导过程，可导出子午线弧长反解的三角函数幂指数形式为：

$$B=x+a_1\sin x\cos x+a_2\sin^3x\cos x+a_3\sin^5x\cos x+a_4\sin^7x\cos x$$

$$\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\\ a_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}e^2+\frac{45}{64}e^4+\frac{175}{256}e^6+\frac{11\,025}{16\,384}e^8\\ -\frac{21}{32}e^4-\frac{277}{192}e^6-\frac{19\,413}{8\,912}e^8\\ \frac{151}{192}e^6+\frac{5\,707}{2\,048}e^8\\ -\frac{1\,097}{1\,024}e^8\end{pmatrix} \tag{16}$$

这两种形式是完全等价的，习惯上用倍角形

式来表示，但为方便计算机运算使用幂指数形式而不使用倍角形式。推导该式时，A 取到 e^8，式(15)和式(16)中也只取到 e^8 项。提高幂级数的次数，可减小该项系数的误差。

2.2　子午线弧长反解的插值型幂级数展开

2.2.1　仅含边界条件的 Hermite 型插值公式

设子午线弧长反解公式有如下子午线弧长反解三角函数倍角和幂指数两种形式：

$$B = x + \alpha\sin 2x + \beta\sin 4x + \gamma\sin 6x + \delta\sin 8x \tag{17}$$

$$B = x + a_1\sin x\cos x + a_2\sin^3 x\cos x + a_3\sin^5 x\cos x + a_4\sin^7 x\cos x \tag{18}$$

式中，a_i 为待定系数，可利用若干点处的纬度及其导数值确定。由式(8)可直接求得：

$$B'(0) = A, B'(\pi/2) = A(1-e^2)^{3/2} \tag{19}$$

对式(8)连续求导，可得 $B''(x)$，但 $B''(x)$ 在 $x=0$、$\pi/2$处均为零，继续对 $B''(x)$求导，可得：

$$B'''(0) = -3e^2A^3, B'''(\pi/2) = 3e^2(1-e^2)^{7/2}A^3 \tag{20}$$

对 B 的表达式求导数，并联立导出的 4 个插值条件，可得：

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \\ -8 & -64 & -216 & -512 \\ 8 & -64 & 216 & -512 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B'(0)-1 \\ B'(\pi/2)-1 \\ B'''(0) \\ B'''(\pi/2) \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -4 & 6 & 0 & 0 \\ 4 & 10 & 16 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B'(0)-1 \\ B'(\pi/2)-1 \\ B'''(0) \\ B'''(\pi/2) \end{pmatrix} \tag{22}$$

将式(7)、式(19) 和式(20)代入式(21)和式(22)右端，解出相应的未知参数，将有关各量化为偏心率 e 的幂级数形式，可得式(15)和式(16)。

2.2.2　含中点条件的插值型幂级数展开

由弧长正解公式以及 $B(x=\pi/4)\approx\pi/4$ 作为纬度在中点 $x=\pi/4$ 的近似值，通过迭代过程，可得：

$$B(x=\pi/4) = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{16}e^4 + \frac{61}{768}e^6 + \frac{13}{512}e^8 + \cdots \tag{23}$$

将上式代入 $B'(x)$并展开，可得：

$$B'(\pi/4) = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x}(x)\Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{21}{64}e^4 - \frac{21}{64}e^6 - \frac{3\,599}{16\,384}e^8 + \cdots \tag{24}$$

上式及对上式求导并令 $x=0$、$\pi/4$、$\pi/2$ 时，与§2.1 通过微分方程求出的起点和终点处纬度 B 对 x 的导数值、本节迭代求出的 $x=\pi/4$ 处的纬度值和导数值联立，可得：

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 8 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B'(0)-1 \\ B(\pi/4)-\pi/2 \\ B'(\pi/4)-1 \\ B'(\pi/2)-1 \end{pmatrix} \tag{25}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B'(0)-1 \\ B(\pi/4)-\pi/2 \\ B'(\pi/4)-1 \\ B'(\pi/2)-1 \end{pmatrix} \tag{26}$$

将式(7)、式(19)、式(23)和式(24) 代入式(25)和式(26)右端，解出相应的未知参数，将有关各量化为偏心率 e 的幂级数形式，可得：

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{16}e^4 + \frac{213}{2\,048}e^6 + \frac{255}{4\,096}e^8 \\ \frac{21}{256}e^4 + \frac{21}{256}e^6 + \frac{35}{512}e^8 \\ \frac{151}{6\,144}e^6 + \frac{151}{4\,096}e^8 \\ \frac{881}{13\,1072}e^8 \end{pmatrix} \tag{27}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \frac{11\,025}{16\,384}e^8 \\ -\frac{21}{32}e^4 - \frac{277}{192}e^6 - \frac{18\,549}{8\,912}e^8 \\ \frac{151}{192}e^6 + \frac{5\,059}{2\,048}e^8 \\ -\frac{881}{1\,024}e^8 \end{pmatrix} \tag{28}$$

比较式(15)、式(16)、式(27)及式(28)，它们的系数大部分完全相同或接近，表明分析法导出的反解公式与插值法导出的反解公式符合相当好。这也从另一方面说明前面分析法导出的反解公式是正确的。当然，这种比较也有局限性，因为插值型反解公式和解析型反解公式是基于两种不同原理和不同途径导出的，插值型公式在插值节点上是绝对精确的，误差分布比较均匀；而解析型幂级数误差是随着距展开节点变量增大而逐步增大的，故在最后一项 e^8 相差较大。另外，幂级数展开公式与仅含边界条件的 Hermite 插值法导出的公式具有相同的形式，并不是说两种方法结果完全一样，而是说明了这两种方法在我们要求的精度范围(即 e^8) 内一致，可以设想当推导至一定阶数时，两种方法最终会有一定差异。

3　算例和误差分析

取克拉索夫斯基椭球 $a=6\ 378\ 245$，$e^2=0.006\ 693\ 421\ 622\ 97$，利用正解公式，求出纬度 $B=\pi/8$、$\pi/6$、$\pi/4$、$\pi/3$、$3\pi/8$ 处的子午线弧长。然后再代入反解公式，求出相应的纬度值并与纬度的理论值对比，两者差值即为误差：

$$\Delta B_i = B_i - B(x_i) \tag{29}$$

其值大小可反映展开公式的精确与否，有关结果列于表1。

表1　三种反解公式误差对比

Tab. 1　Error Comparision of Three Kinds of Inverse Formula

计算节点	幂级数展开法	两点 Hermite 插值法	三点 Hermite 插值法
$B=\pi/8$	$-(2\times10^{-5})''$	$-(2\times10^{-5})''$	$(3\times10^{-5})''$
$B=\pi/6$	$(2\times10^{-5})''$	$(2\times10^{-5})''$	$(2\times10^{-5})''$
$B=\pi/4$	$-(6\times10^{-5})''$	$-(6\times10^{-5})''$	0
$B=\pi/3$	$(2\times10^{-4})''$	$(2\times10^{-4})''$	$(2\times10^{-4})''$
$B=3\pi/8$	$(2\times10^{-4})''$	$(2\times10^{-4})''$	$(5\times10^{-5})''$

从表1可以看出，含中点条件的插值型反解公式较解析型反解公式精度高，是由于插值型反解公式有较强的控制作用，而解析型反解公式只有端点处的导数条件。含中点条件的插值型反解公式，在加入中点插值条件这一强有力的控制条件后，精度又有更进一步的提高，在三种方法中属于精度最高的一种。它既在起点，又在中点及末点都有插值条件。这5个点上的误差有一定的代表性，5个点近似均匀地分布在[0，π]区间上，其他点的误差一般不会大于这些点的误差。

参　考　文　献

[1]　熊介. 椭球大地测量学[M]. 北京：解放军出版社，1988

[2]　陈键，晁定波. 椭球大地测量学[M]. 北京：测绘出版社，1991

[3]　边少锋，许江宁. 计算机代数系统与大地测量数学分析[M]. 北京：国防工业出版社，2004

[4]　刘正才. 子午线弧长公式的简化及通用高斯投影计算程序介绍[J]. 测绘工程，2001(10)：55-57

[5]　严伯铎. 椭球子午线弧长的一种计算方法[J]. 地矿测绘，2003，19(3)：7-10

[6]　成英燕，李夕银. 适用于不同椭球的高斯平面坐标正反算的实用算法[J]. 测绘科学，2004(29)：26-28

第一作者简介：郑彤，博士生。现从事舰船导航与海洋地球物理的研究。

E-mail：wangdongl@vip.sina.com

New Solutions on Inverse Problem of Meridian Arc

ZHENG Tong[1]　*BIAN Shaofeng*[1]

(1　Institute of Navigation Engineering，Naval University of Engineering，717 Jiefang Road，Wuhan 430033，China)

Abstract：Making use of derivative rule of complex functions，how to compute a foot point latitude in ellipsoidal geodesy by Taylor expansion is described. The general expression of the foot point latitude expansion is presented. For comparison，based on the principle of Hermite interpolation，each parameter of the formula can be obtained by Mathematica. The numerical investigation shows that the formulas described are sufficiently accurate up to 0.001″.

Key words：ellipsoidal geodesy；foot point latitude；Mathematica；Taylor expansion

About the first author：ZHENG Tong，Ph.D candidate，majors in ship navigation and marine geophysis.

E-mail：wangdongl@vip.sina.com