

# 顾及 $f^3$ 项的电离层延迟模型

李征航<sup>1</sup> 陈 锴<sup>1</sup> 刘万科<sup>1</sup> 黄 欢<sup>1</sup>

(1 武汉大学测绘学院,武汉市珞喻路 129 号,430079)

**摘 要:**给出了顾及  $f^3$  项时消除电离层延迟的两种方法:用三频观测值来消除电离层延迟,直接用地磁场模型来计算  $f^3$  项。提出了一种用一个三次曲面来拟合  $30^\circ \times 40^\circ$  的区域内的场强  $H$  的简化算法。用两种方法求得的电离层延迟之差小于 0.5 mm。  
**关键词:**电离层延迟;三频改正;球谐函数;曲面拟合;格网点  
**中图法分类号:**P228.41

## 1 电离层延迟

在太阳紫外线、X 射线和高能粒子的作用下,电离层中的部分气体被电离产生大量的电子和正离子,从而形成了一个电离区域。电磁波信号在穿过电离层时传播速度会发生变化,变化程度取决于电子密度  $N_e$  和信号频率  $f$ 。在电离层中单一频率的电磁波信号的相位传播速度  $v_p$  为:

$$v_p = C \left[ 1 + k_1 \frac{N_e}{f^2} \mp k_2 \frac{N_e (H \cos \theta)}{f^3} + (k_1^2 + k_3) \frac{N_e^2}{f^4} + \dots \right] \quad (1)$$

式中, $H$  为地磁场场强  $H$  的模; $\theta$  为场强方向与信号传播方向之间的夹角。当电磁波信号为右旋极化波时(如 GPS 卫星信号), $k_2$  前取负号;反之,当信号为左旋极化波时, $k_2$  前取正号。 $k_1$ 、 $k_2$ 、 $k_3$  为相应的系数<sup>[1]</sup>。

在 GPS 测量中,利用载波相位观测值来测定卫星至接收机间的距离时,顾及电离层延迟改正后的距离  $S$  为:

$$S = \int_{\Delta t} v_p dt = \rho + k_1 \frac{\text{TEC}}{f^2} + k_2 \frac{\text{TEC} \overline{H \cos \theta}}{f^3} + \int_S (k_1^2 + k_3) \frac{N_e^2}{f^4} ds \quad (2)$$

式中, $\rho$  为距离观测值, $\rho = \lambda(\tilde{\varphi} + N)$ ;  $\tilde{\varphi}$  为载波相位观测值; $N$  为相应的整周模糊度; $\lambda$  为载波波

长。 $\text{TEC} = \int_S N_e ds$ ,称为总电子含量,即底面积为一个单位面积,沿信号传播路径贯穿整个电离层的一个柱体中所含的电子数; $\overline{H \cos \theta}$  为电离层中信号传播路径中的  $H \cos \theta$  的平均值。严格地讲, $f^3$  项中的分子部分应为  $k_2 \int_S N_e H \cos \theta ds$ 。由于  $H \cos \theta$  的变化较为平缓,故文献[2]中建议先将它们取平均,然后就可将平均值  $\overline{H \cos \theta}$  从积分号内提取出来<sup>[2]</sup>,将公式简化为:

$$k_2 \int_S N_e (H \cos \theta) ds = k_2 \overline{H \cos \theta} \cdot \int_S N_e ds = k_2 (\overline{H \cos \theta}) \cdot \text{TEC} \quad (3)$$

实际计算时可将电离层中的信号传播路径分为  $n$  等份,求出各端点上的  $H$  和  $\theta$ ,并计算  $H \cos \theta$ ,然后取中数后即可求得  $(\overline{H \cos \theta})$ 。当  $\text{TEC} = 1.38 \times 10^{18}$  个/ $\text{m}^2$  时,电离层延迟模型中高阶项在  $L_1$  上为 24.8 mm,在  $L_2$  上为 52.4 mm<sup>[3]</sup>。在太阳活动最激烈时上述数值还将增大数倍。由此可见,忽略高阶项后对精度会产生一定的影响。本文认为在高精度 GPS 测量中,采用顾及  $f^3$  项的电离层延迟模型是适宜的。顾及  $f^3$  项时载波相位观测值(化算为距离后)的电离层改正公式为:

$$v_p = k_1 \frac{\text{TEC}}{f^2} + k_2 \frac{\text{TEC} \cdot (\overline{H \cos \theta})}{f^3} \quad (4)$$

类似地,可导出顾及  $f^3$  项时测码伪距观测值的电离层延迟改正公式为:

$$v_g = -k_1 \frac{\text{TEC}}{f^2} - 2k_2 \frac{\text{TEC} \cdot (\overline{H \cos \theta})}{f^3} \quad (5)$$

在 GPS 测量中,测距码就是以群速在电离层中传播的。在顾及 $f^3$ 项的情况下,可采用下列两种方法来消除电离层延迟:① 用三频观测值来消除电离层延迟;② 直接按式(3)和式(5)来计算改正数。

## 2 用三频观测值来消除电离层延迟

随着 GPS 的现代化和 Galileo 系统的投入运行,用户将有可能同时用 3 个频率的信号来进行测距。这就为用三频观测值来消除电离层延迟提供了可能。文献[2,6]中推导的公式不完全正确,现重新推导如下。

顾及 $f^3$ 项时载波相位测量的观测方程为:

$$\rho_i = S - \frac{k_1 \cdot \text{TEC}}{f_i^2} - \frac{k_2 \cdot \text{TEC} \cdot (\overline{H\cos\theta})}{f_i^3} \quad (6)$$

式中, $i$ 表示3种不同的频率, $i=1,2,3$ ;  $S$ 为包含卫星钟差、接收机钟差、对流层延迟等与信号频率无关的误差影响在内的卫地距。同样,顾及 $f^3$ 项时测码伪距观测方程为:

$$\rho_i = S + \frac{k_1 \cdot \text{TEC}}{f_i^2} + \frac{2k_2 \cdot \text{TEC} \cdot (\overline{H\cos\theta})}{f_i^3} \quad (7)$$

为方便起见,现将式(6)、式(7)统一表示为:

$$\rho_i = S + \frac{A}{f_i^2} + \frac{B}{f_i^3} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= -k_1 \cdot \text{TEC}, B = -k_2 \cdot \text{TEC}(\overline{H\cos\theta}) \\ A &= +k_1 \cdot \text{TEC}, B = +2k_2 \cdot \text{TEC}(\overline{H\cos\theta}) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

通过线性组合组成无电离层延迟观测值 $\rho_{l,m,n}$ :

$$\rho_{l,m,n} = l\rho_1 + m\rho_2 + n\rho_3 = (l+m+n)S + \left(\frac{l}{f_1^2} + \frac{m}{f_2^2} + \frac{n}{f_3^2}\right)A + \left(\frac{l}{f_1^3} + \frac{m}{f_2^3} + \frac{n}{f_3^3}\right)B \quad (10)$$

显然,为了使 $\rho_{l,m,n}$ 不受电离层延迟的影响,即为了 $\rho_{l,m,n}=S$ , $l,m,n$ 必须满足下列条件:

$$\left\{ \begin{aligned} l+m+n &= 1 \\ \frac{l}{f_1^2} + \frac{m}{f_2^2} + \frac{n}{f_3^2} &= 0 \\ \frac{l}{f_1^3} + \frac{m}{f_2^3} + \frac{n}{f_3^3} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (11)$$

解上述方程组后可得:

$$l = 7.080\ 6, m = -26.130\ 3, n = 20.049\ 8$$

即将三频距离观测值按下列方式线性组合后就可消除电离层延迟:

$$\rho_{l,m,n} = 7.080\ 6\rho_1 - 26.130\ 3\rho_2 + 20.049\ 8\rho_3 \quad (12)$$

式(12)与文献[4]中导出的结果完全一致。

虽然从理论上讲,在顾及 $f^3$ 项的情况下,用式(12)的线性组合即可消除电离层延迟,但由于原始观测值前所乘的系数很大,故线性组合观测值的测量噪声将放大几十倍。假设载波相位观测值的测量噪声为波长的百分之一,即 $s_{L_1} = \pm 1.90\text{ mm}$ ,  $s_{L_2} = \pm 2.44\text{ mm}$ ,  $s_{L_3} = \pm 2.55\text{ mm}$ ,则无电离层延迟组合观测值的测量噪声为:

$$\sigma_{\rho_{l,m,n}} = \pm 82.84\text{ mm} \quad (13)$$

从而严重污染线性组合观测值,影响定位精度。需要1 716个观测值取平均后才能将测量噪声降低至 $\pm 2\text{ mm}$ 的水平。当采样间隔为15 s时需费时7 h 9 min。只有当载波相位测量的测量噪声达到 $\pm 0.2\text{ mm}$ 左右,采样率又很高时这种方法才有实际应用价值。

## 3 直接计算法

### 3.1 计算 $f^3$ 项

在式(7)、式(8)的 $f^3$ 项中, $k_2$ 为常数, $f$ 为信号频率,皆为已知数。TEC值则可近似地用双频观测值来确定<sup>[4,5]</sup>。由于 $f^3$ 项的数值很小,最大也仅为几cm,比 $f^2$ 项小3个数量级左右,故根据双频观测值,在仅顾及 $f^2$ 项的情况下所求得的TEC值可满足计算 $f^3$ 项时的精度要求,无需进行迭代计算。于是计算 $f^3$ 项的关键就在于计算信号传播路径上各点的地磁场场强矢量 $\vec{H}_i$ 及其与卫星信号传播方向间的夹角 $\theta_i$ ,然后计算平均值 $\overline{H\cos\theta}$ 。

地磁场是一个重要的地球物理场,由地核场(也称主磁场,其值约占整个磁场的95%)、地壳场(也称局部磁场,其值约占总磁场的4%)和外源变化磁场(其值约占总磁场的1%)三个部分组成,前两部分合称稳定磁场。地核场将随时间而缓慢变化。其主要特性是整体向西漂移,漂移速度约为 $0.2^\circ/\text{a}$ 。局部磁场则几乎不随时间而变化。外源变化场虽会随时间迅速变化,但由于其值较小,因而从总体上讲地磁场的时空变化还是较有规律的,可用一个数学模型来描述。该模型通常采用球谐函数的形式。主磁场的标量位 $U$ 可表示为:

$$U = a \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n^m(\theta) (g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \sin m\lambda) \quad (14)$$

式(14)中的 $a$ 为地球平均半径,通常取6371.1 km; $r$ 为计算点至地心的距离; $g_n^m$ 和 $h_n^m$ 为球谐函数的系数,其值由相应的地磁场模型给出; $n$ 和 $m$

分别为球谐函数的阶和次; $\lambda$  为计算点的经度; $\theta$  为计算点的余纬度,即  $\theta=90^\circ-\varphi$ , $\varphi$  为计算点的地心纬度; $P_n^m(\theta)$  为  $n$  阶  $m$  次的缔合勒让德函数,可用递推法计算。国际地磁学与高层大气物理学协会(IGAGA)每 5 a 给出一个国际地磁参考场(IGRF)模型。目前正在使用的是 IGRF-2005 模型。可根据地磁场模型求得卫星信号传播路径上各点的站心坐标场强矢量  $\mathbf{H}^{[4]}$ 。

$$\mathbf{H}=\mathbf{H}_{XYZ}=\mathbf{R}\cdot\mathbf{H}_{NEU}\tag{15}$$

$\mathbf{R}$  为坐标旋转变换矩阵,于是可求得场强矢量  $\mathbf{H}$  与信号传播方向间的夹角  $\theta$  为:

$$\theta=\arccos\frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{L}}{|\mathbf{H}|\cdot|\mathbf{L}|}\tag{16}$$

$\mathbf{L}$  为站星方向矢量。求得信号传播路径上各点的  $\mathbf{H}$  和  $\theta$  后,即可算出平均值  $(\overline{H\cos\theta})$ 。实际计算时可将电离层中的传播路径分为  $n$  等份,求出各端点的  $\mathbf{H}$  和  $\theta$ ,取平均后得  $(\overline{H\cos\theta})$ ,最后求得  $f^3$  项。为方便起见,将  $f^3$  项记为  $\delta$ :

$$\delta=\begin{cases}-\frac{k_2\text{TEC}(\overline{H\cos\theta})}{f^3},\text{载波相位观测值}\\+\frac{2k_2\text{TEC}(\overline{H\cos\theta})}{f^3},\text{测码伪距观测值}\end{cases}\tag{17}$$

3.2 顾及  $f^3$  项时的电离层延迟改正公式

求得  $f^3$  项后,即可将式(7)改写为:

$$\begin{aligned}(\rho_1-\delta_1)&=S-\frac{k_1\text{TEC}}{f_1^2}\\(\rho_2-\delta_2)&=S-\frac{k_1\text{TEC}}{f_2^2}\end{aligned}\tag{18}$$

从而求得:

$$S=2.545\,73\lambda_1(\tilde{\varphi}_1+N_1)-1.545\,73\lambda_2(\tilde{\varphi}_2+N_2)-(2.545\,73\delta_1-1.545\,73\delta_2)\tag{19}$$

从式(19)可以看出,顾及  $f^3$  项时电离层延迟改正公式与通常所用的仅顾及  $f^2$  项的改正公式之差就在于增加了一个改正项  $-(2.545\,73\delta_1-1.545\,73\delta_2)$ 。式(19)也适用于测码伪距观测值,

但  $\delta$  的定义与载波相位观测值不同。采用这种方法时只需用双频观测值就可消除含  $f^3$  项的电离层延迟,但需要提供地磁场场强  $\mathbf{H}$  的模型。

4 简化模型

4.1 用某一特定高程处的  $H\cos\theta$  来替代平均值  $\overline{H\cos\theta}$

从上面的讨论可知,计算  $f^3$  项的关键是计算  $\int_{s'}N_eH\cos\theta ds$  的值。参考文献[2]中的信号传播路径均匀分为  $n$  等份,求出各端点上的  $H\cos\theta$  值并取中数得  $\overline{H\cos\theta}$ ,然后将其提到积分号外,将公式简化为:

$$\begin{aligned}\int_{s'}N_eH\cos\theta ds&=\int_{s'}N_e(\overline{H\cos\theta})ds=(\overline{H\cos\theta})\cdot\int_{s'}N_e ds=\text{TEC}\cdot(\overline{H\cos\theta})\end{aligned}$$

但由于不同高度处的电子密度  $N_e$  相差 10 倍以上,故上述方法不但计算复杂,且并不严格。本文试图寻找某一特定高度  $H$ ,使该高度处的  $H_0\cos\theta_0$  与  $\text{TEC}$  的乘积能与  $\int_{s'}N_eH\cos\theta ds$  较为吻合,即  $\int_{s'}N_eH\cos\theta ds\approx\text{TEC}\cdot H_0\cos\theta_0$ 。

据 Chapman 公式,任一高度处的电子密度  $N_e$  与最大电子密度  $N_m$  间有下列关系:

$$N_e=N_m\cdot e^{(1-e^{-z})}\tag{20}$$

其中, $z=(h-h_m)/H_s$ ,经大量计算后得出下列结果:若电子密度在  $h_m$  处取极大值,则当  $H_s=h_m-20\text{ km}$  时,所求得的  $H_0\cos\theta_0$  能与加权平均值  $\overline{pH\cos\theta}$  相符最好。例如当电子密度在 370 km 处取得极大值时,则用  $h_m=350\text{ km}$  处的传播路径上的点所求得的  $H_0\cos\theta_0$  值就能与传播路径上的加权平均值很好地相符。其差异对计算  $f^3$  项的影响一般为 0.3 mm,最大不超过 0.5 mm。上述公式适合于中纬度地区。

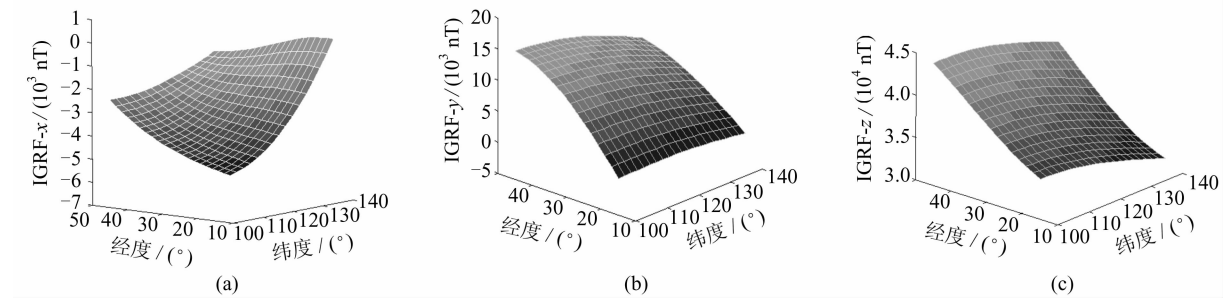


图 1 拟合区域中的场强矢量分量  
Fig. 1 Components of Field-Strength Vector in Fitting Area

4.2 用三次多项式替代球谐函数

用球谐函数来描述全球的地磁场模型时有许多优点,但绝大多数用户在实际应用时仅涉及局部区域,此时用一些简单的数学模型也能得到很好的效果。用拟合范围为北纬 15°~45°、东经 100°~140°的一个 30°×40°的矩形区间进行实验。高度为  $h_m$  的地磁场场强矢量的 3 个分量均用三次多项式来进行拟合:

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} x^i y^j \tag{21}$$

式中,  $x=B-30^\circ$ ,  $y=L-120^\circ$ 。由于没有该区域及周边地区的地磁台站长期的观测资料,故无法从原始地磁观测资料出发来建立该区域的地磁场模型。一个较为简单而实用的方法是从 IGRF-2005 模型出发,用球谐函数计算出该区域内 2°×2°格网点上的场强矢量  $\boldsymbol{H}$ ,然后再用式(21)分别拟合这些格网点上的场强分量  $H_x$ 、 $H_y$ 、 $H_z$ 。

从图 1 中可以看出,各场强分量的变化还是较为规则平缓的,可以分别用一个三次曲面来加以拟合。

图 2 给出了 6 号卫星用球谐函数所求得电离层延迟与用拟合后的三次曲面模型所求得电离层延迟之差。可以看出,用三次曲面模型所求得的场强矢量  $\boldsymbol{H}$  来计算电离层延迟所造成的误差均小于 0.5 mm。

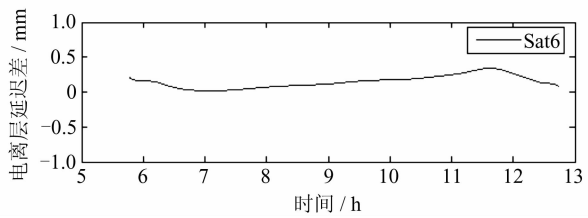


图 2 用两个模型所求得电离层延迟之差  
Fig. 2 Differences Between Two Ionospheric Delays Determined by Spherical Harmonics Model and Surface Fitting Model

5 结 语

1) 电离层延迟模型中的  $f^3$  项的数值可达数 cm,在高精度 GPS 测量以及用 GPS 观测值来建

立 VTEC 模型时最好予以顾及。

2) 利用三频观测值的线性组合可消除电离层延迟(含  $f^3$  项在内),但由于组合观测值的测量噪声被放大数十倍,因而一般并不实用。该方法只有在原始载波相位观测值的测量噪声很小、采样率很高时才有实际应用的可能。

3) 直接用地磁场模型来计算场强矢量  $\boldsymbol{H}$ ,进而求得  $f^3$  项是解决问题的另一种方法,且只需双频观测值即可。但由于  $f^3$  项本身的数值不大,计算却很复杂,因而未被广泛应用。

4) 本文提出的简化方法不但可大大减少计算工作量,而且方法也更为合理。一旦曲面拟合模型建立后,该区域内的所有用户就都能用一个简单的数学模型来进行计算了,简化模型所引起的误差可保持在 0.5 mm 以内。

参 考 文 献

[1] 李征航,黄劲松. GPS 测量与数据处理[M]. 武汉:武汉大学出版社,2005  
[2] Brunner F K, Gu Min. An Improved Model for the Dual Frequency Ionospheric Correction of GPS Observations[J]. Manuscripta Geodetica, 1991 (16): 205-214  
[3] 伍岳. 第二代导航卫星系统多频数据处理理论及应用[D]. 武汉:武汉大学,2005  
[4] 范胜军. 顾及地磁场影响的电离层高阶项改正算法研究[D]. 武汉:武汉大学,2005  
[5] 刘经南,陈俊勇. 广域差分 GPS 原理和方法[M]. 北京:测绘出版社,1999  
[6] 袁运斌. 基于 GPS 的电离层改正理论与方法研究[D]. 武汉:中国科学院测量与地球物理研究所,2002  
[7] 伍岳,孟洪,王泽民,等. GPS 现代化后电离层折射误差高阶项的三频改正方法[J]. 武汉大学学报·信息科学版,2005,30(7):601-603

第一作者简介:李征航,教授,博士生导师。主要从事卫星大地测量的教学和科研工作。代表成果:高精度 GPS 广域差分系统研究;隔河岩大坝外观变形 GPS 自动化监测系统研究;长江三峡库区崩滑地质灾害 GPS 监测试验(示范)研究;利用 GPS 进行高精度变形监测的模型研究等。  
E-mail:zhhlh@sgg.whu.edu.cn

Ionospheric Delay Model Containing  $f^3$  Term

LI Zhenghang<sup>1</sup> CHEN Kai<sup>1</sup> LIU Wanke<sup>1</sup> HUANG Huan<sup>1</sup>

(1 School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)

**Abstract:** Two methods to eliminate the ionospheric delay containing  $f^3$  term are given. The first method is to eliminate ionospheric delay with triple-frequency observations. The second method is directly calculate the  $f^3$  term. A simplified method is proposed that a three order polynomials is used to fit the geomagnetic field intensity of a  $30^{\circ} \times 40^{\circ}$  area, which can achieve a rather good result. By comparison, the difference of the ionospheric delay between the calculated results by the two methods is less than 0.5 mm.

**Key words:** ionospheric delay; correction with triple-frequency observations; spherical harmonics; surface fitting; grid point

**About the first author:** LI Zhenghang, professor, Ph. D supervisor. He is concentrated on the teaching and research of satellite geodesy. His typical achievements are wide area differential GPS of high precision; GPS automatic surveying system to monitor Geheyan dam deformation; the demonstrating research for monitoring geological disaster caused by coast with GPS in the Three Gorge region; research of model of high accuracy deformation monitoring with GPS; etc.

E-mail: zhgli@sgg.whu.edu.cn

(上接第 126 页)

Algorithms for Building TIN-based DEM Based on  
Terrain Feature Lines

JIANG Fan<sup>1</sup> WANG Zhiwei<sup>2</sup> ZHU Changqing<sup>2</sup> AN Min<sup>2</sup>

(1 Department of Military Acquisition, Military Enconomic Academy, 122 Luojiadun, Wuhan 430035, China)

(2 Institute of Surveying and Mapping, Information Engineering University, 66 Middle Longhai Road, Zhengzhou 450052, China)

**Abstract:** For the plane triangle in building irregularly triangle net(TIN)of DEM, some new algorithms are put forward to eliminate plane triangle. The algorithms include auto-adding characteristic points and approximating important characteristic points by Lagrange interpolation polynomial. On the other hand, the practicability and validity of the algorithms are validated by contours reconstructed. The experiments show that the proposed algorithm can eliminate plane triangle and optimize the structure of TIN.

**Key words:** irregularly triangle net (TIN); plane triangle; reconstruct contours

**About the first author:** JIANG Fan, master, majors in DEM, uncertainty of spatial data.

E-mail: fancool820620@163.com