文章编号:1671-8860(2008)12-1271-04　　**文献标志码**:A

总体最小二乘方法在空间后方交会中的应用

陈　义[1,2,3]　陆　珏[1]　郑　波[1]

(1　同济大学测量与国土信息工程系,上海市四平路 1239 号,200092)
(2　山东省基础地理信息与数字化技术重点实验室,青岛市经济技术开发区前湾港路 579 号,266510)
(3　现代工程测量国家测绘局重点实验室,上海市四平路 1239 号,200092)

摘　要:在空间后方交会的解算过程中,利用共线条件方程式列出误差方程后,针对地面控制点以及像点坐标均存在误差这一特点,引入总体最小二乘(total least squares, TLS)的方法,对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 以及观测向量 $\boldsymbol{b}$ 同时进行改正,计算像片的 6 个外方位元素,建立更加合理的计算模型,可获得精度更高、更稳定的解。

关键词:总体最小二乘(TLS);空间后方交会;外方位元素

中图法分类号:P207.2; P221.1

空间后方交会的解算是以共线条件方程式为基础的,它以像片的 6 个外方位元素为待求参数,当有多余观测存在时,为了得到参数的最佳估值,通常采用经典的高斯-马尔可夫模型对误差方程式进行求解。采用该线性模型的前提是偶然误差仅存在于观测向量 $\boldsymbol{b}$ 中,而系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是不含误差的。然而在实际的测量过程中,控制点的像片坐标和地面坐标均存在误差,因而通过共线方程解算外方位元素必须考虑矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的误差。为了同时考虑两部分的误差,建立更合理的计算模型,本文引入了总体最小二乘(TLS)的方法。该方法可用于解决所谓的变量中的误差(error-in-variables,EIV)模型的估计问题[1]。

1　空间后方交会及 TLS 的基本原理

1.1　空间后方交会的数学模型

空间后方交会就是根据影像覆盖范围内一定数量的分布合理的地面控制点(已知其像平面坐标(x,y)和对应的地面坐标(X,Y,Z)),利用共线条件方程式求解像片的外方位元素$(X_s,Y_s,Z_s,\varphi,\omega,\kappa)$。这里假设像片的内方位元素$(x_0,y_0,f)$已知,共线条件方程式可表示为:

$$
\begin{aligned}
x-x_0 &= \\
&-f\frac{a_1(X-X_s)+b_1(Y-Y_s)+c_1(Z-Z_s)}{a_3(X-X_s)+b_3(Y-Y_s)+c_3(Z-Z_s)} \\
y-y_0 &= \\
&-f\frac{a_2(X-X_s)+b_2(Y-Y_s)+c_2(Z-Z_s)}{a_3(X-X_s)+b_3(Y-Y_s)+c_3(Z-Z_s)}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

式中,a_1、a_2、a_3、b_1、b_2、b_3、c_1、c_2、c_3 是由 φ、ω、κ 组成的旋转矩阵中的元素。通过泰勒级数展开,可将共线方程线性化为:

$$
\begin{aligned}
x-(x) &= \frac{\partial x}{\partial X_s}\mathrm{d}X_s+\frac{\partial x}{\partial Y_s}\mathrm{d}Y_s+\frac{\partial x}{\partial Z_s}\mathrm{d}Z_s+ \\
&\quad \frac{\partial x}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi+\frac{\partial x}{\partial \omega}d\omega+\frac{\partial x}{\partial \kappa}\mathrm{d}\kappa \\
y-(y) &= \frac{\partial y}{\partial X_s}\mathrm{d}X_s+\frac{\partial y}{\partial Y_s}\mathrm{d}Y_s+\frac{\partial y}{\partial Z_s}\mathrm{d}Z_s+ \\
&\quad \frac{\partial y}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi+\frac{\partial y}{\partial \omega}\mathrm{d}\omega+\frac{\partial y}{\partial \kappa}\mathrm{d}\kappa
\end{aligned}
\tag{2}
$$

式中,各项系数的表达式具体见文献[2]。令

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{b} &= [x-(x),\ y-(y)]^{\mathrm{T}} \\
\boldsymbol{A} &= \begin{bmatrix}
\frac{\partial x}{\partial X_s} & \frac{\partial x}{\partial Y_s} & \frac{\partial x}{\partial Z_s} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \omega} & \frac{\partial x}{\partial \kappa} \\
\frac{\partial y}{\partial X_s} & \frac{\partial y}{\partial Y_s} & \frac{\partial y}{\partial Z_s} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \omega} & \frac{\partial y}{\partial \kappa}
\end{bmatrix} \\
\boldsymbol{\xi} &= [\mathrm{d}X_s\quad \mathrm{d}Y_s\quad \mathrm{d}Z_s\quad \mathrm{d}\varphi\quad \mathrm{d}\omega\quad \mathrm{d}\kappa]^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

当观测个数 n 大于参数个数 m(这里为 6)时,应

收稿日期:2008-10-16。

项目来源:山东省基础地理信息与数字化技术重点实验室开放研究基金资助项目(SD060813)。

用最小二乘法可求得参数的最或然值。此时需要有一个基本假设，即偶然误差 $\boldsymbol{e}$ 只存在于观测向量 $\boldsymbol{b}$ 中，而系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是不受偶然误差影响的，因此，观测方程可以表示为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{e}&=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\xi}\\ \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})&=m<n\end{aligned}\tag{4}$$

由式(4)可以看出，最小二乘法将偶然误差 $\boldsymbol{e}$ 归入观测向量 $\boldsymbol{b}$ 中。然而在很多情况下，这并不符合事实，由于模型误差、人为误差、仪器误差等使得几乎在所有的观测量中都会存在误差[1]，因此，包含变量的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 就不再是固定不变的，而是有误差的。在此情况下，引入总体最小二乘方法，利用该方法来解决所有的数据都受到偶然误差影响的问题。

1.2 TLS 方法的模型、解法及精度估计

与仅考虑到观测向量 $\boldsymbol{b}$ 中是含有误差的，而认为系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中并不存在误差的最小二乘方法相比，TLS 所关心的是当 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 中都含有误差，同时考虑这些误差时，参数向量 $\boldsymbol{\xi}$ 的估计方法。令顾及 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 误差的模型为：

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_A)\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{e},\ n>m=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})\\ \begin{bmatrix}\boldsymbol{e}\\ \operatorname{vec}\boldsymbol{E}_A\end{bmatrix}\sim\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\sigma_0^2\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_n & 0\\ 0 & \boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{I}_n\end{bmatrix}\right)\end{gathered}\tag{5}$$

这里，$\boldsymbol{E}_A$ 代表了存在于 $\boldsymbol{A}$ 中的偶然误差矩阵；$\operatorname{vec}\boldsymbol{E}_A$ 是将 $\boldsymbol{E}_A$ 按列矢量化。在最小二乘中，$\boldsymbol{E}_A\equiv 0$，而 TLS 的估计准则为：

$$\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}+(\operatorname{vec}\boldsymbol{E}_A)^{\mathrm{T}}(\operatorname{vec}\boldsymbol{E}_A)=\min\tag{6}$$

通常采用奇异值分解(singular value decomposition，SVD)的方法来求得参数的 TLS 解[3]。因此，在利用 TLS 方法进行求解时，需要对增广矩阵 $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}]$ 进行奇异值分解：

$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}]=\boldsymbol{U\Sigma V}^{\mathrm{T}}\tag{7}$$

式中，$\boldsymbol{U}=[\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n]\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 和 $\boldsymbol{V}=[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_{m+1}]\in\boldsymbol{R}^{(m+1)\times(m+1)}$ 分别是 $n\times n$ 和 $(m+1)\times(m+1)$ 阶正交矩阵；$\boldsymbol{\Sigma}=\operatorname{diag}[\boldsymbol{\sigma}_1,\boldsymbol{\sigma}_2,\cdots,\boldsymbol{\sigma}_{m+1}]$ 是一个 $n\times(m+1)$ 阶的对角阵，并且对角线上的元素即为奇异值，非对角线上的元素全为 0。

为了求得 $\boldsymbol{\xi}$，使得目标函数最小，方程(5)可以改写成如下形式：

$$[\hat{\boldsymbol{A}},\hat{\boldsymbol{b}}]\cdot\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{\xi}}\\-1\end{bmatrix}=0\tag{8}$$

式中，$[\hat{\boldsymbol{A}},\hat{\boldsymbol{b}}]$ 为平差值；$\hat{\boldsymbol{\xi}}$ 为最佳估值。由线性代数知，矢量 $[\hat{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{T}},-1]^{\mathrm{T}}$ 是在 $[\hat{\boldsymbol{A}},\hat{\boldsymbol{b}}]$ 张成的零空间，因此，利用矩阵 $[\hat{\boldsymbol{A}},\hat{\boldsymbol{b}}]$ 的奇异值分解以及关系式(8)可知，正交矩阵 $\boldsymbol{V}$ 的最后一列 $[v_{1,m+1},v_{2,m+1},\cdots,v_{m+1,m+1}]^{\mathrm{T}}$ 在 $[\hat{\boldsymbol{A}},\hat{\boldsymbol{b}}]$ 张成的零空间，由此可以得到 TLS 问题的惟一解[4]：

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}=\frac{-1}{v_{m+1,m+1}}\cdot[v_{1,m+1},\cdots,v_{m,m+1}]\tag{9}$$

同时得到 TLS 的残差矩阵为：

$$[\hat{\boldsymbol{E}}_A,\hat{\boldsymbol{e}}]=[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}]-[\hat{\boldsymbol{A}},\hat{\boldsymbol{b}}]=\boldsymbol{\sigma}_{m+1}\cdot\boldsymbol{u}_{m+1}\cdot\boldsymbol{v}_{m+1}^{\mathrm{T}}\tag{10}$$

其中，$\boldsymbol{\sigma}_{m+1}$ 为奇异值；$\boldsymbol{u}_{m+1}$ 为左奇异向量；$\boldsymbol{v}_{m+1}$ 为右奇异向量。进一步计算出 TLS 变量的单位权方差以及参数的协方差矩阵[5]：

$$\begin{aligned}\hat{\nu}&=\hat{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{e}}+\operatorname{vec}(\hat{\boldsymbol{E}}_A)^{\mathrm{T}}\operatorname{vec}(\hat{\boldsymbol{E}}_A)\\ \sigma_0^2(\mathrm{TLS})&=\frac{\hat{\nu}}{n-m}\end{aligned}\tag{11}$$

$$\begin{aligned}D(\hat{\boldsymbol{\xi}})\approx{}&\hat{\sigma}_0^2(\boldsymbol{N}-\hat{\nu}\boldsymbol{I}_m)^{-1}\boldsymbol{N}(\boldsymbol{N}-\hat{\nu}\boldsymbol{I}_m)^{-1}=\\ &\hat{\sigma}_0^2[(\boldsymbol{N}-\hat{\nu}\boldsymbol{I}_m)^{-1}+\hat{\nu}(\boldsymbol{N}-\hat{\nu}\boldsymbol{I}_m)^{-2}]=\\ &(n-m)^{-1}[\hat{\nu}(\boldsymbol{N}-\hat{\nu}\boldsymbol{I}_m)^{-1}+\hat{\nu}^2(\boldsymbol{N}-\hat{\nu}\boldsymbol{I}_m)^{-2}]\end{aligned}\tag{12}$$

其中，$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$。

2 计算步骤及实例分析

2.1 计算步骤

1) 给定近似值，设 k 为任意两点求得的摄影比例尺分母：

$$k=\sqrt{(X(i)-X(j))^2+(Y(i)-Y(j))^2}\Big/\sqrt{(x(i)-x(j))^2+(y(i)-y(j))^2}$$

$$X_s^0=\sum X/n$$

$$Y_s^0=\sum Y/n$$

$$Z_s^0=k\times f+\sum Z/n$$

$$\varphi^0=\omega^0=\kappa^0=0$$

2) 按式(2)组成误差方程，若有 n 个点，可组成 $2n$ 个误差方程；

3) 根据式(7)至式(9)直接求得参数的 TLS 解，从而得到 6 个外方位元素的值；

4) 由式(10)至式(12)对平差结果进行精度评定。

2.2 实例

为了验证上述算法的正确合理性，本文编制了 TLS 方法在空间后方交会中应用的计算程序，同时与 LS 方法得到的结果进行比较。

例 1 本例数据来源于文献[6]，像片的内方位元素已知，$x_0=y_0=0$，焦距 $f=153.24$ mm，表 1为四个控制点的像片坐标和地面坐标；分别由 TLS 和 LS 方法得到的外方位元素的解见表 2，单位权中误差和参数的中误差见表 3。由 TLS 方法得到的残差矩阵 $[\boldsymbol{E}_A,\boldsymbol{e}]$ 为：

$[\boldsymbol{E}_A, \boldsymbol{e}] = 10^{-6} \cdot$

$$\begin{bmatrix} 0.603 & -0.214 & -0.046 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4.174 & -1.482 & -0.315 & 0 & 0 & 0 & -0.003 \\ 1.108 & -0.393 & -0.084 & 0 & 0 & 0 & -0.001 \\ -6.372 & 2.263 & 0.482 & 0 & 0 & 0 & 0.005 \\ 1.447 & -0.514 & -0.109 & 0 & 0 & 0 & -0.001 \\ 2.188 & -0.777 & -0.165 & 0 & 0 & 0 & -0.002 \\ -3.146 & 1.117 & 0.238 & 0 & 0 & 0 & 0.002 \\ 0.111 & -0.040 & -0.008 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由表 3 的结果可以看出,利用 TLS 方法得到的单位权中误差和参数的中误差均要比 LS 方法得到的相应结果小得多,因此得到的解的精度更高。这表明由 TLS 方法建立的 EIV 模型会更加合理一些,因为它对所有需要修正的变量都进行了修正。

表 1　控制点的像片坐标和地面坐标

Tab. 1　Image Coordinate and Object Space Coordinate of Control Points

点号	像片坐标/mm		地面坐标/m		
	x	y	X	Y	Z
1	−86.15	−68.99	36 589.41	25 273.32	2 195.17
2	−53.4	82.21	37 631.08	31 324.51	728.69
3	−14.78	−76.63	39 100.97	24 934.98	2 386.5
4	10.46	64.43	40 426.54	30 319.81	757.31

表 2　TLS 与 LS 方法解得的外方位元素

Tab. 2　Exterior Orientation Elements of TLS and LS

	X_s/m	Y_s/m	Z_s/m	φ/rad	ω/rad	κ/rad
TLS 解	39 797.537	27 479.976	7 560.294	−0.004 146	0.001 445	−0.066 663
LS 解	39 795.452	27 476.462	7 572.686	−0.003 987	0.002 114	−0.067 578

表 3　TLS 与 LS 方法的精度比较

Tab. 3　Precision Comparison of TLS and LS

	$\sigma_0/10^{-3}$mm	σ_{XS}/mm	σ_{YS}/mm	σ_{ZS}/mm	$\sigma_\varphi/10^{-4}$mrad	$\sigma_\omega/10^{-4}$mrad	$\sigma_\kappa/10^{-5}$mrad
TLS	0.006 575 478	0.001 038 086 8	0.001 148 355 4	0.000 443 851 2	0.001 651	0.001 452	0.006 53
LS	7.259 424 031	1.107 385 045 9	1.249 515 199 3	0.488 129 956 5	1.786 252	1.614 610	7.203 82

例 2　本例主要分析控制点的减少对空间后方交会的解的稳定性的影响。已知 $x_0=y_0=0$,$f=126$ mm。控制点的坐标见表 4。

表 4　控制点的像片坐标和地面坐标

Tab. 4　Image Coordinate and Object Space Coordinate of Control Points

点号	像片坐标/mm		地面坐标/m		
	x	y	X	Y	Z
1	−210.07	−0.07	−3 200.266	4 306.636	209.298
2	−210.05	−0.05	−3 176.741	4 306.678	223.278
3	−210.05	−210.05	−3 137.499	−712.574	237.258
4	−83.98	210.02	−137.449	9 294.694	251.328
5	−84.03	−0.03	−113.611	4 315.113	265.278
6	−84.07	−210.07	−89.780	−613.852	279.368
7	0.00	210.00	1 854.807	9 216.931	293.348
8	−0.07	−0.07	1 868.406	4 320.678	307.388
9	0.08	−209.92	1 881.826	−525.335	321.388
10	83.93	209.93	3 780.604	9 139.405	335.348
11	84.00	0.00	3 783.914	4 325.910	349.348
12	84.04	−209.96	3 787.153	−437.440	363.408
13	210.08	210.08	6 580.542	9 058.539	377.408
14	209.93	−0.07	6 568.578	4 333.508	391.278
15	209.97	−210.03	6 556.585	−341.612	405.238
16	−84.09	114.91	−17.573	6 887.991	419.238
17	−83.92	−114.92	6.866	1 756.648	433.348
18	84.00	115.00	3 712.571	6 859.282	447.388
19	83.91	−115.09	3 716.357	1 805.806	461.238

从中分别随机选取 7 个控制点(点号为 1、4、7、10、13、16、18)、5 个控制点(点号为 1、4、7、10、13)和 4 个控制点(点号为 10、11、13、14),对这三种情况计算得到的外方位元素以及精度分别见表 5 和表 6。

利用 TLS 方法计算得到的其余点的平均精度与 LS 方法得到的其余点的平均精度在控制点为 7、5、4 个点时分别提高了 0.450 8 m、0.327 0 m、0.004 2 m。由此可见,当控制点数量减少时,通过 TLS 方法能够得到精度较高的解,因此,利用该方法得到的结果更加稳定。

3　结　语

在进行空间后方交会的解算过程中,本文利用 TLS 方法估计了像片的外方位元素。由于 TLS 方法建立的 EIV 模型对所有的误差都进行了最小化的约束,因此,与认为系数矩阵 **A** 无误差的 LS 方法相比,TLS 方法建立起了一个包含变量的系数矩阵 **A** 以及观测向量 ***b*** 均含有误差时的更加合理的模型。利用 TLS 方法进行解算,得到的单位权中误差和参数的中误差都要比 LS 方法计算的结果小,因此得到的计算结果精度更高。由于避开了矩阵求逆,从而使得当控制点分布不合理或控制点数量减少时,仍能得到比较稳定、精度较高的解。

表 5 TLS 与 LS 方法解得的外方位元素

Tab. 5 Exterior Orientation Elements of TLS and LS

	点数	X_s/m	Y_s/m	Z_s/m	$\varphi/10^{-3}$rad	$\omega/10^{-4}$rad	$\kappa/10^{-3}$rad
TLS	7	1 881.198 0	4 320.972 4	3 229.022 3	−3.989 523 7	3.137 759	2.674 947 5
	5	1 880.114 4	4 319.989 5	3 228.719 0	−3.987 663 2	4.365 519	2.627 672 0
	4	1 880.750 0	4 322.822 6	3 233.437 7	−4.532 514 8	−2.279 456	2.527 634 9
LS	7	1 881.310 5	4 321.106 6	3 228.782 4	−4.136 601 7	3.345 437	2.775 958 1
	5	1 880.317 6	4 320.182 9	3 228.518 9	−4.083 395 6	4.450 418	2.700 044 3
	4	1 880.895 4	4 322.858 2	3 233.491 0	−4.517 246 4	−2.375 771	2.508 137 5

表 6 TLS 与 LS 方法的精度

Tab. 6 Precision of TLS and LS

	点数	$\sigma_0/10^{-2}$mm	σ_{X_s}/mm	σ_{Y_s}/mm	σ_{Z_s}/mm	$\sigma_\varphi/10^{-4}$mrad	$\sigma_\omega/10^{-4}$mrad	$\sigma_\kappa/10^{-4}$mrad
TLS	7	1.473 395 03	0.387 7	0. 306 3	0. 237 3	0.401	0.609	0.496
	5	1.666 783 98	0.617 0	0. 528 5	0. 331 1	0.500	0.915	0.718
	4	1.577 118 97	0.539 3	0. 629 6	0. 536 1	0.863	0.854	1.004
LS	7	5.354 882 30	1.367 8	1.075 8	0.833 2	1.459	2.204	1.805
	5	6.747 338 60	2.463 2	2.099 4	1.304 4	2.030	3.684	2.913
	4	6.458 942 91	2.244 2	2.616 5	2.234 9	3.563	3.518	4.140

参考文献

[1] Felus Y A, Schaffrin B. Performing Similarity Transformations Using the Error-In-Variables Model[C]. ASPRS 2005 Annual Conference Baltimore, Maryland, 2005

[2] 李德仁,周月琴,金为铣.摄影测量与遥感概论[M].北京:测绘出版社,2001:15-68

[3] Golub H G, Van Loan F C. An Analysis of the Total Least Squares Problem[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1980, 17(6): 883-893

[4] Van Huffel S, Vandewalle J. The Total Least Squares Problem: Computational Aspects and Analysis[M]. Philadephia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1991

[5] Schaffrin B. A Note on Constrained Total Least-Squares Estimation[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2006,417: 245-258

[6] 李德仁,郑肇葆.解析摄影测量学[M].北京:测绘出版社,1992:74-75

第一作者简介:陈义,教授,博士,博士生导师。现主要从事空间大地测量、摄影测量的研究工作。

E-mail:chenyi@mail.tongji.edu.cn

Application of Total Least Squares to Space Resection

CHEN Yi[1,2,3] *LU Jue*[1] *ZHENG Bo*[1]

(1 Department of Surveying and Geo-Informatics Engineering, Tongji University, 1239 Siping Road,Shanghai 200092,China)

(2 Key Laboratory of Geomatics and Digital Technology, Shandong Province, 579 Qianwangang Road,Qingdao 266510,China)

(3 Key Laboratory of Advanced Surveying Engineering of State Bureau of Surveying and Mapping, 1239 Siping Road,Shanghai 200092,China)

Abstract: In space resection computing,the error equations are based on the collinearity equations. Because the coordinates of the ground point and the image point all exist errors. So total least squares (TLS) method is used. The method of TLS is one of several linear parameter estimation techniques that have been devised to compensate for data errors. Furthermore, TLS is the method of fitting that is appropriate when there are errors in both the observation vector b and the variable matrix **A**. So it can establish a more practical and suitable model so-called error-in-variables model. On the basis of this model, the errors in the observation vector $\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{e}$) and the variable matrix $\boldsymbol{A}$ ($\boldsymbol{E}_A$) can be corrected at the same time.

Key words: total least squares; space resection; exterior orientation elements

About the first author: CHEN Yi, professor,Ph.D,Ph.D supervisor, majors in space geodesy and photogrammetry.

E-mail: chenyi@mail.tongji.edu.cn