文章编号:1671-8860(2008)11-1118-04　　文献标志码:A

三维坐标转换参数求解的一种直接搜索法

曾怀恩[1]　黄声享[1]

(1　武汉大学测绘学院,武汉市珞喻路 129 号,430079)

摘　要:采取了两步措施简化三维坐标转换非线性模型:① 旋转矩阵的 3 个旋转角用一个反对称矩阵的 3 个独立元素代替,将旋转矩阵由反对称矩阵构成 Lodrigues 矩阵;② 将坐标转换 7 参数模型变换成基线向量模型,消去平移 3 参数。然后,采用遗传算法与模式搜索法相结合的一种直接搜索法求解参数。算例表明,该算法是可行的。最后,从坐标转换精度的角度对基线向量模型原点与公共点的选取进行了分析,结论是原点选取的点的精度相对较高时坐标转换精度相对较高,公共点的选取以 3～5 个精度高的点为宜。

关键词:三维坐标转换;非线性模型;反对称矩阵;基线向量模型;直接搜索法;模式搜索法

中图法分类号:P226.3

在测量中,经常会遇到一些坐标转换问题,如 WGS-84 坐标与北京 54 坐标之间的转换或与地方坐标的转换。对于三维空间直角坐标转换,通常情况下,由于旋转角为小角度而被视为微小量,旋转矩阵进行了简化,此时,坐标转换模型为线性模型,求解非常容易。当旋转角为大角度时,旋转矩阵 9 参数中只有 3 个是独立的,其他 6 参数与独立参数的关系比较复杂,此时,坐标转换模型为非线性模型,求解比较困难。对于大旋转角的坐标转换问题,文献[1]将非线性模型线性化产生的误差作为函数模型的模型误差来处理,要求 3 个旋转角在 50°以内;文献[2]将三维坐标转换的非线性模型进行了线性化,可适用于任意角度的旋转;文献[3]把传统的 3 个旋转角参数用反对称矩阵 3 个元素替代,推导了 3 个公共点直接计算转换参数的公式,进一步给出了平差模型。针对三维坐标转换的非线性模型,本文不作线性化处理,采用了一种直接搜索法求解模型参数,可适用于任意角度的旋转。算例表明,该方法简便、求解速度快、结果可靠。

1　数学模型

设有两三维空间直角坐标系 $O_S\text{-}X_SY_SZ_S$ 与 $O_T\text{-}X_TY_TZ_T$(S 与 T 分别表示原坐标系与目标坐标系),若同一点在两坐标系中的坐标为(X_{iS},Y_{iS},Z_{iS})与(X_{iT},Y_{iT},Z_{iT}),则有如下所示关系式:

$$\boldsymbol{x}_{iT} = \Delta\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{R}_y(\varepsilon_y)\boldsymbol{R}_x(\varepsilon_x)\boldsymbol{R}_z(\varepsilon_z)\boldsymbol{x}_{iS} \tag{1}$$

式中,

$$\boldsymbol{x}_{iS} = [X_{iS}\quad Y_{iS}\quad Z_{iS}]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{x}_{iT} = [X_{iT}\ Y_{iT}\ Z_{iT}]^{\mathrm{T}}$$

$$\Delta\boldsymbol{x} = [\Delta X\quad \Delta Y\quad \Delta Z]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{R}_z(\varepsilon_z) = \begin{bmatrix} \cos\varepsilon_z & \sin\varepsilon_z & 0 \\ -\sin\varepsilon_z & \cos\varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_x(\varepsilon_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon_x & \sin\varepsilon_x \\ 0 & -\sin\varepsilon_x & \cos\varepsilon_x \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_y(\varepsilon_y) = \begin{bmatrix} \cos\varepsilon_y & 0 & -\sin\varepsilon_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varepsilon_y & 0 & \cos\varepsilon_y \end{bmatrix}$$

ΔX、ΔY、ΔZ 为坐标平移参数;λ 为尺度参数;ε_z、ε_x、ε_y 为旋转角参数。令

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_y(\varepsilon_y)\boldsymbol{R}_x(\varepsilon_x)\boldsymbol{R}_z(\varepsilon_z) \tag{2}$$

设坐标转换残差 $\boldsymbol{v}_i = \Delta\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}_{iS} - \boldsymbol{x}_{iT}$,$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}}\quad \cdots\quad \boldsymbol{v}_n^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$($n$ 为用于求解参数的公共点的个数),取直接搜索法的目标函数为 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{v}$($\boldsymbol{P}$ 为坐标观测值的权阵),在 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{v}=\min$ 条件下实现参数的最优化,即完成最小二乘准则下的平差。为了简化计算,将各公共点坐标观测值视为相同

收稿日期:2008-09-15。

项目来源:国家交通部西部交通建设科技基金资助项目(200531881203)。

精度，即 $\boldsymbol{P}$ 为单位矩阵 $\boldsymbol{I}$，这时直接搜索法的目标函数可简化为 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}$。由于 $\boldsymbol{v}$ 的形式过于复杂，必须进行两步处理才可直接应用求解。

1）将式(2)展开得：

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}\cos\varepsilon_z\cos\varepsilon_y-\sin\varepsilon_z\sin\varepsilon_y & \sin\varepsilon_z\cos\varepsilon_y+\sin\varepsilon_z\sin\varepsilon_x\sin\varepsilon_y & -\cos\varepsilon_x\sin\varepsilon_y\\ -\sin\varepsilon_z\cos\varepsilon_x & \cos\varepsilon_z\cos\varepsilon_x & \sin\varepsilon_x\\ \cos\varepsilon_z\sin\varepsilon_y+\sin\varepsilon_z\sin\varepsilon_x\cos\varepsilon_y & \sin\varepsilon_z\sin\varepsilon_y-\cos\varepsilon_z\sin\varepsilon_x\cos\varepsilon_y & \cos\varepsilon_x\cos\varepsilon_y\end{bmatrix}\tag{3}$$

如果直接选择 3 旋转角作为独立参数，$\boldsymbol{R}$ 矩阵 9 元素都是该 3 参数的函数，涉及复杂的三角函数运算，用直接搜索法求解时，求解相当困难，甚至不能收敛。有必要结合 $\boldsymbol{R}$ 矩阵的特性对 $\boldsymbol{R}$ 进行某种简化。因为 $\boldsymbol{R}_z(\varepsilon_z)$、$\boldsymbol{R}_y(\varepsilon_y)$、$\boldsymbol{R}_x(\varepsilon_x)$ 都是正交矩阵[4,5]，由式(2)可知 $\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}$，即 $\boldsymbol{R}$ 也是正交矩阵，$\boldsymbol{R}$ 的 9 元素中只有 3 个元素是独立的。基于这一特点，可设计一个反对称矩阵 $\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}0 & -c & -b\\ c & 0 & -a\\ b & a & 0\end{bmatrix}$，其元素 a、b、c 都是独立的，$\boldsymbol{R}$ 由 $\boldsymbol{Q}$ 构成 Lodrigues 矩阵：

$$\boldsymbol{R}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q})^{-1}\tag{4}$$

式中，$\boldsymbol{I}$ 为 3 阶单位矩阵。这样 $\boldsymbol{R}$ 的 3 个旋转角参数由 a、b、c 代替，直接搜索求解中可以省去大量三角函数计算，收敛速度可大大提高。

2）如果采用 7 参数 ΔX、ΔY、ΔZ、λ、a、b、c 进行直接搜索，由于参数量多，而且平移 3 参数 ΔX、ΔY、ΔZ 与 λ、a、b、c 数量级通常相差很大，算法仍很难收敛。为了减少直接搜索的参数，可应用基线向量（坐标差）求转换参数的方法，此方法先求各公共点相对于原点（可假定为某精度较高的公共点）的基线向量，然后利用基线向量求得转换参数。对于原点，有：

$$\boldsymbol{x}_{0T}=\Delta\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}_{0S}\tag{5}$$

由 $\boldsymbol{x}_{iT}-\boldsymbol{x}_{0T}$ 得

$$\boldsymbol{x}_{iT}-\boldsymbol{x}_{0T}=\lambda\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}_{iS}-\boldsymbol{x}_{0S})\tag{6}$$

设 $\boldsymbol{x}'_{iT}=\boldsymbol{x}_{iT}-\boldsymbol{x}_{0T}$，$\boldsymbol{x}'_{iS}=\boldsymbol{x}_{iS}-\boldsymbol{x}_{0S}$，$\boldsymbol{v}'_i=\lambda\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}'_{iS}-\boldsymbol{x}'_{iT}$，$\boldsymbol{v}'=[\boldsymbol{v}'^{\mathrm{T}}_1\ \ \boldsymbol{v}'^{\mathrm{T}}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{v}'^{\mathrm{T}}_n]^{\mathrm{T}}$，直接搜索法的目标函数可改写为 $\boldsymbol{v}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}'$，此时，求解的转换参数只有 λ、a、b、c，采用直接搜索法可快速求解。求得参数后代入式(5)可得平移参数 $\Delta\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{0T}-\lambda\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}_{0S}$。

2　直接搜索法

直接搜索法只用到目标函数的函数值信息，而不需要目标函数的导数信息，因而对于一些很难求导和不能求导的问题非常适用。三维坐标转换非线性模型线性化比较复杂、费时，采用直接搜索法可以不用线性化模型，求解比较简便。直接搜索法有多种，在本文求解参数时，考虑了目前应用比较广、算法比较成熟的遗传算法和模式搜索法[6]，通过多次验算比较分析，结论是遗传算法全局搜索能力强，但其在求解转换参数时，算法容易早熟，而且对算法参数设置依赖大，而模式搜索法收敛速度快但容易收敛到一个局部最优解。为了综合两者的优势，本文算法先进行一定代数的遗传算法操作，然后再用模式搜索法搜索下降点。对目标函数为 $f(x)$，最优化为 $\min\{f(x)\}$ 问题：

1）选定初始点 x_0，计算目标函数初始值 $f(x_0)$。

2）遗传算法操作。根据 x_0 确定一定的初始范围，按一定编码方式生成初始种群，评价初始种群个体的适应度，执行遗传算子（包括选择、交叉、变异）操作，生成第一代群体，再评价第一代个体的适应度，执行遗传算子操作，生成第二代群体，…，直到生成第 N 代群体后停止迭代（N 取值为搜索参数的 20 倍，此处为 80）。判断第 N 代最适应个体 x_1 是否为下降点，即 $f(x_1)<f(x_0)$ 是否成立，若成立则令 $x_0=x_1$。

3）模式搜索法搜索下降点。在 x_0 的周围选取一个能使目标函数值下降的方向，沿该方向取一下降点 x_2 能使目标函数值下降，即 $f(x_2)<f(x_0)$。

4）停止标准判断。若满足条件则找到了一个最优解，结束求解过程；否则，令 $x_0=x_2$，转步骤 3）继续。

给定的初始点及停止标准的不同，将影响本文算法的收敛速度与解的精度。初始点若离最优解比较近，则迭代的次数会比较少，反之，若离最优解比较远，则迭代的次数会比较多。停止标准有多种，如限制最大迭代次数、目标函数最大计算次数、最小步长、参数的容差、目标函数值的容差等。本文选择限制目标函数的容差 ε，若前一次和当前迭代的目标函数的最佳值之差小于 ε，则停止迭代。

3　算例与分析

为了与文献[2]中的坐标转换参数平差方法比较，这里采用文献[2]中实例的数据。为了分析广州新机场航站楼网架结构中的一个构件在各种力的作用下的应变情况，需测定其节点坐标。设计时采用的坐标系方向为 X 向北、Z 向东、Y 向上，原点

为构件端点铰的中心;测量采用的坐标系方向为 x 向北、y 向东、z 向上,原点为任意假设。前者为右手系,后者为左手系,且两个坐标系的指向存在未知的夹角。上述两坐标系转换为左右手系之间的转换,可以通过一些方式将两者转换成同一类坐标系[2]。为了简便起见,将设计坐标系 Z 与 Y 坐标对调,将两坐标系统一到左手系。表1为15个节点和2个铰中心的设计坐标和实测坐标。

将8、10、14号点作为公共点,以14号点为式(5)中的原点,采用本文直接搜索法求解转换参数,停止标准是限制目标函数的容差 $\varepsilon=10^{-7}$,最后结果为:$\Delta\boldsymbol{x}=[-10\,8397.755\quad -101\,785.481\quad -96\,520.365]^{\mathrm{T}}$;$\lambda=1.001\,122\,590\,3$;旋转矩阵为:

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} 0.999\,980\,733\,4 & 0.002\,994\,141\,1 & -0.005\,437\,629\,0 \\ 0.005\,441\,378\,6 & -0.001\,245\,598\,7 & 0.999\,984\,419\,8 \\ -0.002\,987\,321\,3 & 0.999\,994\,741\,7 & 0.001\,261\,867\,0 \end{bmatrix}$$

表1 节点设计坐标和实测坐标/mm

Tab.1 Nodes Design Coordinates and Measuring Coordinates

点号	设计坐标			实测坐标		
	X	Y	Z	x	y	z
1	0.0	0.0	0.0	108 521.0	96 611.0	101 222.0
5	289.0	0.0	3 327.0	108 819.0	99 931.0	101 213.0
6	−114.0	216.5	3 327.0	108 379.0	99 937.0	101 438.0
7	−144.0	−216.5	3 327.0	108 378.0	99 939.0	100 996.0
8	444.0	0.0	5 327.0	108 965.0	101 930.0	101 206.0
9	−222.0	333.0	5 327.0	108 302.0	101 930.0	101 538.0
10	−222.0	−333.0	5 327.0	108 302.0	101 931.0	100 879.0
11	600.0	0.0	7 327.0	109 126.0	103 938.0	101 202.0
12	−300.0	450.0	7 327.0	108 225.0	103 926.0	101 639.0
13	−300.0	−450.0	7 327.0	108 224.0	103 925.0	100 762.0
14	444.0	0.0	9 327.0	108 955.0	105 927.0	101 212.0
15	−222.0	333.0	9 327.0	108 290.0	105 916.0	101 540.0
16	−222.0	−333.0	9 327.0	108 291.0	105 914.0	100 880.0
17	289.0	0.0	11 327.0	108 785.0	107 926.0	101 223.0
18	−114.0	216.5	11 327.0	108 354.0	107 914.0	101 440.0
19	−114.0	−216.5	11 327.0	108 355.0	107 908.0	100 997.0
23	0.0	0.0	14 625.0	108 473.0	111 215.0	101 228.0

用本文所求得的转换参数将实测坐标转换到设计坐标,与已知坐标的较差如表2所示。从表2可见,本文计算的 X、Y、Z 方向坐标较差除在6、18、19三个点的 X 方向较差较大外,绝大部分保持在±10 mm以内,与文献[2]结果相当。在6、18、19三个点的 X 方向符合性差的主要原因是8、10、14号公共点的分布没有将整个测量区域包围起来,导致各点的符合精度不一致。若以外符合精度来描述算法的转换精度,即 $\delta_{外}=\sqrt{\sum(\mathrm{d}X_i^2+\mathrm{d}Y_i^2+\mathrm{d}Z_i^2)/n}$($i$ 取所有非公共点的点号,n 为非公共点的总数,此处等于13),本文算法 $\delta_{外}=23.3$ mm。

表2 坐标较差/mm

Tab.2 Node Coordinate Differences After Transformation

点号	文献[2]算法			本文算法		
	dX	dY	dZ	dX	dY	dZ
1	−19.5	13.4	−3.0	−18.4	19.2	1.9
5	1.4	3.3	−4.4	0.8	7.7	−2.2
6	−7.1	11.2	3.3	−37.8	14.0	5.3
7	−7.0	1.3	5.1	−6.4	4.5	6.7
8	−0.6	−4.5	−1.9	−1.9	−0.9	−1.5
9	0.3	−6.5	0.6	−1.4	−5.2	0.8
10	1.9	−0.8	1.3	2.1	1.0	1.0
11	11.6	−9.2	9.6	9.2	−6.5	8.2
12	7.6	−23.6	0.9	4.8	−24.0	−0.5
13	8.8	−2.3	−0.5	8.6	−1.9	−2.6
14	2.9	−0.7	−5.3	0.0	0.0	0.0
15	1.7	−6.7	−7.7	−1.5	−8.2	−8.6
16	4.4	−2.0	6.8	3.0	−2.9	−11.4
17	−5.7	8.8	−3.6	−9.2	7.5	1.7
18	−5.1	8.6	−9.9	−38.9	6.0	−8.6
19	−3.0	−2.3	5.5	−35.5	−4.4	−15.2
23	−18.2	11.2	−3.0	−22.7	6.7	−2.6

为了验证本算法的全局搜索能力,给定两个不同的初始值,一个离最优解近,$[\lambda\quad a\quad b\quad c]$ 取为 $[1\ 0\ 0\ 0]$,另一个离最优解远,$[\lambda\quad a\quad b\quad c]$ 取为 $[2\ 2\ 2\ 2]$,在公共点、原点等条件相同的情况下,分别采用本文算法求解,最终得到的结果是相同的。可知,本文算法具有搜索全局最优解的能力。

为了分析原点的精度对转换精度的影响,同样将8、10、14号点作为公共点,以1、5号点(5号

点相对 1 号点精度较高)分别作为原点,重新计算,此时 $\delta_{外}$ 分别为 27.7 mm、23.3 mm。可见,原点选择为精度较高的点时,坐标转换的精度也相应较高。

为了分析公共点的个数对坐标转换精度的影响,均以 1 号点作为原点,采用 3～7 个公共点进行实验,结果如表 3 所示。

表 3　公共点的个数与转换精度

Tab. 3　Different Numbers of Common Points and Its Transformation Precision

点数	选用的点	转换精度/mm
3	1 11 23	29.9
4	1 11 12 23	21.1
5	1 11 12 19 23	23.1
6	1 6 11 12 19 23	22.3
7	1 5 6 11 12 19 23	22.1

如表 3 所示,用 5 个公共点比 4 个公共点坐标转换精度还低,其原因是增加的 19 号点点位精度较低。可见,增加公共点的数量不一定能使转换精度提高,即便精度提高了,也不显著,故采用 3～5 个公共点比较适合。

参　考　文　献

[1]　曾文宪,陶本藻. 三维坐标转换的非线性模型[J]. 武汉大学学报·信息科学版,2003,28(5):566-568

[2]　陈义,沈云中,刘大杰. 适用于大旋转角的三维基准转换的一种简便模型[J]. 武汉大学学报·信息科学版,2004,29(12):1 101-1 105

[3]　姚吉利,韩保民,杨元喜. 罗德里格矩阵在三维坐标转换严密解算中的应用[J]. 武汉大学学报·信息科学版,2006,31(12):1 094-1 096

[4]　熊介. 椭球大地测量学[M]. 北京:解放军出版社,1988

[5]　朱华统. 常用大地坐标系及其变换[M]. 北京:解放军出版社,1990

[6]　曾怀恩,黄声享,杨保岑,等. 变异函数理论模型的参数估计[J]. 测绘信息与工程,2007,32(3):31-33

第一作者简介:曾怀恩,博士生。现主要研究卫星定位技术及其工程应用。

E-mail:zenghuaien_2003@yahoo.com.cn

A Kind of Direct Search Method Adapted to Solution of 3D Coordinate Transformation Parameters

ZENG Huai'en[1]　*HUANG Shengxiang*[1]

(1　School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)

Abstract: In view of 3D coordinate transformation nonlinear model, in order to adapt direct search method to solve the transformation parameters, it is necessary to make the model simple and operand small by way of two step measurements as follows. One is to transform the 7 parameters model to 4 parameters model by eliminating translation 3 parameters; the other is to replace 3 rotation angles of rotation matrix with antisymmetric matrix 3 independent elements. A kind of direct search method which integrates genetic algorithm and pattern search method is used to solve the transformation parameters; and it is suitable to rotation of random angle. The example indicates the algorithm is feasible. Lastly, for some factors effecting coordinate transformation precision, some conclusions are made by analysis, including the higher coordinate precision of original point of baseline vector model the better coordinate transformation precision and 3-5 common points are fit to solve the parameters.

Key words: 3D coordinate transformation; nonlinear model; antisymmetric matrix; baseline vector model; direct search method; pattern search method

About the first author: ZENG Huai'en, Ph.D candidate, majors in the satellite positioning and navigation technology and its engineering application.

E-mail: zenghuaien_2003@yahoo.com.cn