

# 基于岭参数的谱修正迭代法及其在 有理多项式参数求解中的应用

刘 斌<sup>1</sup> 龚健雅<sup>1</sup> 江万寿<sup>1</sup> 祝小勇<sup>2</sup>

(1 武汉大学测绘遥感信息工程国家重点实验室,武汉市珞喻路 129 号,430079)  
(2 国家测绘地理信息局卫星测绘应用中心,北京市海淀区莲花池西路 28 号,100830)

**摘 要:**通过比较基于  $L$ -曲线法求取岭参数的岭估计法与谱修正迭代法,分析了两种方法的特性,为选择合适的方法进行病态方程求解作参考。针对谱修正迭代法收敛慢、效率低这一缺点,提出了一种利用狭义岭估计中的岭参数(或广义岭估计的岭参数对角矩阵)进行谱修正,改进谱修正迭代法的方法。利用模拟算例对改进的方法进行实验,在不同噪声情况下,改进方法效率有不同程度的提高。把改进方法应用到 SPOT 影像 RPC 求解中,发现改进的方法在应用中具有一定的优势。

**关键词:**RPC 参数;谱修正迭代法;岭估计; $L$ -曲线法

**中图法分类号:**P207; P237.3

在测量数据处理中,病态性是个棘手而又无法避免的问题。使用最小二乘法解算卫星遥感影像的有理多项式参数(RPC)时,控制点非均匀分布或模型过度参数化,其法方程系数矩阵很容易产生病态<sup>[1]</sup>。病态问题的存在使得方程的解很不稳定,甚至得不到正确的解。Hoerl 和 Kennard 提出的岭估计法被认为是求解病态方程的有效方法之一<sup>[2]</sup>,该方法改变了方程的等量关系,使得估计结果有偏。为此,王新洲等提出了谱修正迭代法,该方法是一种既保持了法方程解算过程中的数值稳定性,又不改变方程的等量关系,计算结果无偏的方法<sup>[3]</sup>。但该方法需要迭代求解,迭代收敛速度并没有达到最优。

本文提出了一种利用狭义岭估计中的岭参数(或广义岭估计的岭参数矩阵)进行谱修正的改进算法。该算法不仅具有谱修正迭代法的无偏优良特性,还使计算过程中的迭代次数达到优化,提高计算效率。

## 1 两种病态方程求解方法

设有观测方程:

$$L = AX + \Delta, \text{权为 } P \tag{1}$$

式中, $L$  为  $n \times 1$  观测向量; $A$  为  $n \times m$  设计矩阵; $\text{rank}(A) = m$ ; $X$  为  $m \times 1$  未知参数向量; $\Delta$  为  $n \times 1$  观测误差向量; $P$  为权矩阵。

式(1)的最小二乘估计为:

$$\hat{x}_{LS} = (A^T P A)^{-1} A^T P L \tag{2}$$

如果法矩阵  $A^T P A$  的条件数(这里定义为  $\text{cond}(A^T P A) = \|A^T P A\| \| (A^T P A)^{-1} \|$ )很大,则式(1)称为病态方程。它的法矩阵求逆会出现不稳定,从而很难得到比较好的最小二乘估值<sup>[4]</sup>。

### 1.1 岭估计

根据 Tikhonov 正则化原理<sup>[5]</sup>,式(1)的狭义岭估计的解为:

$$\hat{x}(k) = (A^T P A + kE)^{-1} A^T P L \tag{3}$$

式中, $k$  为岭参数,一般为正小数; $\hat{x}(k)$  是  $X$  的岭参数为  $k$  的估计值; $E$  为单位阵。

当把岭参数与单位阵乘积项  $kE$  替换为对角矩阵  $K$  时可以得到广义岭估计法:

$$\hat{x}_G = (A^T P A + K)^{-1} A^T P L \tag{4}$$

式中, $\hat{x}_G$  是  $X$  的估计值; $K = \text{diag}(k_1, \dots, k_m)$  是广义岭参数。当广义岭参数  $k_1 = k_2 = \dots = k_m = k$  时,式(4)即可等价于式(3),可见狭义岭估计是广义岭估计的特殊情况。

与最小二乘法矩阵相比,式(3)、式(4)通过加

入稳定泛函的方式,使得求逆矩阵在  $A^T PA$  上增加了  $kE$  或  $K$  项,矩阵条件数变小,求逆变得正常,因而能得到可靠的估值。但正因如此,方程的等量关系也发生了变化,导致估计结果有偏。

1.2 岭参数的确定

岭估计的关键在于确定合适的岭参数,常用的狭义岭估计法有岭迹法、广义交叉核实法(GCV 法)、 $L$ -曲线法以及经验公式法。许多学者对广义岭参数的确定作了研究,如 Hemmerle-Brantle 公式<sup>[6]</sup>、基于岭迹分析的迭代公式<sup>[7]</sup>以及游扬声等提出的直接解法<sup>[6]</sup>。本文仅对其中一种公认为较优的狭义岭估计算法—— $L$ -曲线法进行介绍。

$L$ -曲线是在考虑了中误差  $\|Ax - L\|^2$  和估值  $\|x\|^2$  取值平衡的基础上作出的。 $\|Ax - L\|^2$  和  $\|x\|^2$  都是岭参数  $k$  的函数,选择不同的  $k$  值,即可得到相应的  $\|Ax - L\|^2$  和  $\|x\|^2$ 。以  $\|Ax - L\|^2$  为横坐标,  $\|x\|^2$  为纵坐标画图,拟合得到一条曲线,这条曲线恰好像“ $L$ ”形状,利用这条曲线来选择岭参数的方法被称为  $L$  曲线法。选择  $L$  曲线上曲率最大的那个点,选择其所对应的  $k$  值作为岭估计值<sup>[7-10]</sup>。

1.3 谱修正迭代法

针对岭估计法求解结果有偏这一特性,王新洲等提出了估计值无偏的谱修正迭代法<sup>[3]</sup>。误差方程(1)的法方程为:

(A^T PA)X = A^T PL (5)

将上面式子两边同时加上  $X$ ,得到:

(A^T PA + E)X = A^T PL + X (6)

式中,  $E$  为  $n$  阶单位矩阵,由于式子两边都含有未知参数  $X$ ,则只能采用迭代的方法求解,其迭代公式为:

x^(n) = (A^T PA + E)^-1 (A^T PL + x^(n-1)) (7)

式中,  $x^{(n)}$  为  $X$  的第  $n$  次谱修正迭代估计值。

由于在法矩阵  $A^T PA$  上加了单位阵  $E$ ,从而

A = [ 2.000 0   -5.000 0   1.000 0   1.000 0   -9.500 0 ; -2.000 0   4.000 0   1.000 0   -1.050 0   8.500 0 ; -2.000 0   1.000 0   1.000 0   -1.000 0   2.400 0 ; -1.000 0   2.500 0   4.000 0   -0.500 0   7.000 0 ; -1.000 0   3.200 0   4.000 0   -0.500 0   8.400 0 ; 1.000 0   1.000 0   -3.000 0   0.400 0   0.490 0 ; 3.000 0   7.000 0   -3.000 0   1.500 0   12.700 0 ; 5.000 0   -1.000 0   -2.000 0   2.500 0   -3.000 0 ; 4.000 0   2.000 0   -2.000 0   2.010 0   3.000 0 ; 4.000 0   3.000 0   -2.000 0   2.000 0   5.000 0 ]

综上所述,法方程系数阵  $N=A^T PA$  的条件数为  $1.289\ 2\times 10^5$ ,病态性严重。未知参数有 5 个,它们的真值为  $x=[1\ 1\ 1\ 1\ 1]^T$ ,观测噪

变为  $(A^T PA + E)$ ,减小了条件数,方程的病态得到了改善。对于任意的初值  $x^{(0)}$ ,有  $\lim_{n\rightarrow\infty} x^{(n)} = (A^T PA)^{-1} A^T PL$ ,即求解是无偏估计。

2 谱修正迭代法的改进

结合上述两种病态方程求解方法,本文提出了谱修正迭代法的改进形式。对于法方程(5),方程两边同时加上  $KX$  得:

(A^T PA + K)X = A^T PL + KX (8)

式中,  $K$  为对角矩阵,  $K=\text{diag}(k_1, \cdots, k_m)$ 。同理,方程两边同时含有未知数  $X$ ,因此,也需要迭代求解,其迭代公式为:

x^(n) = (A^T PA + K)^-1 (A^T PL + Kx^(n-1)) (9)

根据谱修正迭代法原理,对于任意的初值  $x^{(0)}$ ,同样有  $\lim_{n\rightarrow\infty} x^{(n)} = (A^T PA)^{-1} A^T PL$ ,即方程是无偏的估计。又根据岭估计原理可知,  $K$  为岭估计参数时(狭义岭估计  $K=kE$ ),不仅方程求解能达到稳定,而且方程迭代求解中解的估计值接近真值的程度较谱修正迭代法高。这在一定程度上提高了谱修正迭代法的收敛度,减少了迭代次数,达到提高效率的目的。

3 算例分析

使用模拟算例和 SPOT 影像的 RPC 求解分别对改进方法进行对比分析,实验硬件环境为 Dell Precision T3400, CPU 主频 2.66G, 2G 内存。以 Windows XP 和 Visual C++ 6.0 为实验的软件平台。

3.1 模拟数据实验

3.1.1 实验数据

以文献[5]中的经典算例考察本文算法,其设计矩阵为:

声为高斯分布( $\Delta\sim N(0, \sigma_0^2 E)$ ),分别添加  $\sigma_0=0, \sigma_0=0.1, \sigma_0=0.2, \sigma_0=1$  的高斯白噪声进行对比实验。

3.1.2  实验方法

确定岭参数的方法很多,部分算法数值随意性大。为了对本文算法有一个比较客观的评价,实验中选择了数值稳定、适用性好的  $L$ -曲线法作为自适应确定岭参数的方法。为了消除谱修正迭代法和改进方法参数的初值对实验结果产生影响,本算例中采用同样的初值进行实验,初值为  $\mathbf{x}^{(0)}=[0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ 。

利用  $L$ -曲线、谱修正迭代法以及改进的谱修

正迭代法进行病态方程求解,计算估计值  $\hat{\mathbf{x}}$ ,并进行精度分析。分别利用如下两种方式进行精度评价:

$$Q = \| \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{L} \|_p \tag{10}$$

$$\| \Delta \hat{\mathbf{x}} \| = \| \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x} \| \tag{11}$$

式(10)以方程误差的欧氏 2-范数作为精度评价手段;式(11)以估计值与真值差的欧氏 2-范数作为精度评价手段。

表 1  精度对比分析  
Tab.1  Comparison of Accuracy

噪声	精度					
	精度 $Q$			精度 $\  \Delta \hat{\mathbf{x}} \ $		
	$L$ 曲线法	谱修正迭代法	改进的谱修正迭代法	$L$ 曲线法	谱修正迭代法	改进的谱修正迭代法
$\sigma_0=0$	$1.060\ 9\times 10^{-3}$	0.000 0	0.000 0	$7.683\ 2\times 10^{-1}$	0.000 0	0.000 0
$\sigma_0=0.1$	$1.472\ 29\times 10^{-2}$	$1.273\ 4\times 10^{-2}$	$1.273\ 4\times 10^{-2}$	$8.166\ 5\times 10^{-1}$	1.906 4	1.906 4
$\sigma_0=0.2$	$6.678\ 79\times 10^{-2}$	$2.847\ 9\times 10^{-2}$	$2.847\ 9\times 10^{-2}$	$7.580\ 9\times 10^{-1}$	4.761 9	4.761 9
$\sigma_0=1$	1.928 29	1.816 8	1.816 8	$6.831\ 6\times 10^{-1}$	9.966 9	9.966 9

3.1.3  结果分析

1) 改进方法与原始方法对比分析

由表 1 可知,改进的谱修正迭代法与原始的方法具有相同的精度。因此,改进方法的无偏估计优良特性依然能够保存,从而验证了 § 2 的理论推导。如图 1 所示,改进方法的迭代收敛性明显变好,其迭代效率在不同噪声条件下可以增加 2~5 倍不等。

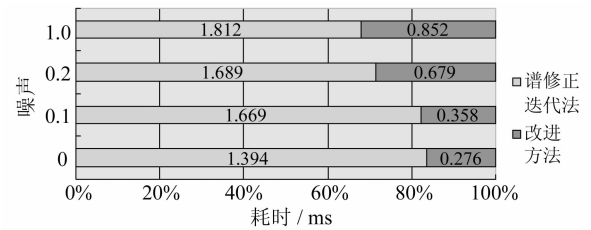


图 1  改进方法与原始方法计算速度对比

Fig.1  Compared Calculation Speed of Improved Method With Calculation Speed of Original Method

2) 迭代效率提高倍数与噪声的关系分析

如图 1 所示,随着噪声的增加,迭代效率提高的倍数降低。这是由于噪声增大,使得方程病态加剧,岭估计参数也相应调整,导致了岭估计结果与无偏估计结果的差距加大,从而需要更多的迭代以求取无偏估计结果。

3) 改进方法与  $L$ -曲线法对比分析

在以  $Q$  为精度评价标准时,改进方法与  $L$ -曲线法在噪声增加的情况下,精度表现平稳,符合最小二乘求解的特征。当噪声为 0 时,谱修正迭代法  $Q$  值为 0,体现了其无偏估计的特性。而且在各个

噪声水平下,谱修正迭代法的  $Q$  值均小于  $L$ -曲线法。也说明了无偏估计相对有偏估计的优越特性。但由  $\| \Delta \hat{\mathbf{x}} \|$  的精度可知,改进方法的抗噪性不强,如何提高该方法的抗噪性还有待进一步研究。

3.2  SPOT 影像 RPC 求解实验

3.2.1  实验数据

采用摄于 2002 年 8 月的一景 SPOT 影像作为实验数据,影像大小为 12 000 像素×12 000 像素,影像覆盖区域地势比较平坦。

3.2.2  实验方法

本文使用与地形无关方案求解 RPC,根据影像辅助文件,建立 SPOT 影像严密成像几何模型,生成虚拟控制点格网。使用相同经验估计的岭参数和相同初值进行对比实验时(初值采用低次数的 RPC 参数),比较改进方法与原始谱修正迭代法的效率。

3.2.3  结果分析

由于谱修正迭代法求解精度与数据质量相关,因此,本文只对谱修正迭代法与改进方法的精度和效率进行对比。如表 2,改进方法与原始方法有相同的 RPC 求解精度,该精度能满足测图需求,而改进方法能提高 RPC 求解的效率。在批量处理多张影像时,改进方法作用将

表 2  改进方法用于 RPC 求解实验

Tab.2  RPC Solution Using Improved Method

方法	控制点精度/像素			解方程耗时/ms
	$m_x$	$m_y$	$m_{xy}$	
谱修正迭代法	0.035	0.092	0.099	156.174
改进方法	0.035	0.092	0.099	92.276

更为明显。

参 考 文 献

[1] 袁修孝,林先勇. 基于岭估计的有理多项式参数求解方法[J]. 武大大学学报·信息科学版,2008,32(11):1 130-1 133

[2] 方开泰,全辉,陈庆云. 实用回归分析[M]. 北京:科学出版社,1988

[3] 王新洲,刘丁酉,黄海兰. 谱修正迭代结果的协因素矩阵[J]. 武大大学学报·信息科学版,2003,28(4):429-431

[4] 李德仁,袁修孝. 误差处理与可靠性理论[M]. 武汉:武汉大学出版社,2002

[5] 王振杰. 大地测量中不适定问题的正则化解法研究[D]. 武汉:中国科学院大地测量与地球物理研究所,2002

[6] 游扬声,王新洲,刘星. 广义岭估计的直接解法[J]. 武大大学学报·信息科学版,2002,27(2):176-178

[7] 崔希璋,於宗伟,陶本藻,等. 广义测量平差(新版)[M]. 武汉:武汉测绘科技大学出版社,2001

[8] 丁士俊,靳祥升. 平差不适定问题解的性质与正则参数的确定方法[J]. 测绘科学,2006,31(2):22-24

[9] 王振杰,欧吉坤. 用  $L$ -曲线法确定岭估计中的岭参数[J]. 武汉大学学报·信息科学版,2004,29(3):235-238

[10] Hansen P C,O’Leary D P. The Use of the  $L$ -curve in the Regularization of Discrete Ill-posed problems[J]. SIAM J Sci Comput,1993,14(6):1 487-1 503

[11] Hansen P C. The  $L$ -curve and Its Use in the Numerical Treatment of Inverse Problems[C]. Computational Inverse Problems in Electrocardiology, Southampton,2001

[12] Hansen P C. Analysis of Discrete Ill-posed Problems by Means of  $L$ -curve[J]. SIAM Review,1992,34(4):561-580

第一作者简介:刘斌,博士生。现主要从航天摄影测量理论与应用研究。  
E-mail:Benjamin\_lb@163.com

Improvement of the Iteration by Correcting Characteristic Value Based on Ridge Estimation and Its Application in RPC Calculating

LIU Bin<sup>1</sup> GONG Jianya<sup>1</sup> JIANG Wanshou<sup>1</sup> ZHU Xiaoyong<sup>2</sup>

(1 State Key Laboratory Information Engineering in Surveying, Mapping and Remote Sensing, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)  
(2 Satellite Mapping Application Center, National Administration of Surveying, Mapping and Geoinformation, 28 West Lianhuachi Road, Haidian District, Beijing 100830,China)

**Abstract:** As an effective method for solving the morbidity normal equation, Ridge estimation has been widely studied and applied in processing of the measurement data, but the method changes the equivalent relationship and the result is a biased estimate. The iteration by correcting characteristic value does not change the equivalent relationship, but there are few studies on the limitations and the application scope of the method. With comparing the Ridge estimation method and the Iteration by correcting characteristic value, and analysing the characteristics of two methods to guide the application, an improved iteration by correcting characteristic value using the ridge parameters was proposed in this paper. This method not only reduces the iterative times and advances efficiency, but also has the same precision with the originality method.

**Key words:** rational polynomial coefficients(RPC); iteration by correcting characteristic value; ridge estimation;  $L$ -curve method

About the first author: LIU Bin, Ph. D candidate. His major research is high precision photogrammetric point determination.  
E-mail: Benjamin\_lb@163.com