

文章编号:1671-8860(2008)08-0834-04

文献标志码:A

# 基于载噪比及参数先验信息的抗差模型

戴吾蛟<sup>1</sup> 丁晓利<sup>2</sup> 朱建军<sup>1</sup>

(1 中南大学测绘与国土信息工程系,长沙市麓山南路,410083)

(2 香港理工大学土地测量与地理资讯学系,香港九龙红磡)

**摘要:**结合 GPS 应用的特点,建立了一种综合载噪比(C/No)及参数先验信息的抗差模型。试验结果表明该模型具有更高的抗差性能,从而能更有效地削弱 GPS 观测量中各种误差的影响。

**关键词:**GPS;随机模型;抗差估计

**中图法分类号:**P207.2; P228.42

在 GPS 相对定位中,观测值的主要误差来源包括大气延迟、多路径效应以及衍射等。衍射误差是 GPS 信号经过障碍物体边缘时,使直射信号发生弯曲而产生的多余路径。在 GPS 载波相对定位中,这种误差最大可达一个波长,使定位精度受到严重影响<sup>[1]</sup>。通常,低高度角卫星的观测值含有较大的大气延迟及多路径效应误差,可以根据高度角的大小给相应的观测值定权。基于这种思想,Euler 等人利用固定的卫星高度角函数模型来计算观测值方差<sup>[2,3]</sup>。Brunner 等人利用 C/No(载波信号与噪声的能量密度比,简称载噪比)观测值建立了 SIGMA- $\epsilon$  模型<sup>[4]</sup>,随后又对该模型进行了补充,建立了 SIGMA- $\Delta$  模型<sup>[5]</sup>。研究结果表明,SIGMA 模型能有效地削弱衍射误差的影响,但 C/No 值不能完全反映信号的变化,一般会有一定时间的延迟。为了克服 SIGMA- $\epsilon$  模型和 SIGMA- $\Delta$  模型的不足,Wieser 利用抗差估计的方法<sup>[6]</sup>以及模糊理论<sup>[7]</sup>对 SIGMA 模型进行了扩展。基于验后残差的随机模型是利用现代统计方法对观测值残差进行估计的,从而得到 GPS 观测值的方差-协方差矩阵。近年来,有关方面的研究愈来愈多<sup>[8-12]</sup>。在许多 GPS 应用中,有一些先验信息可以利用,如在高层建筑的变形监测中,以水平振动变形为主,高程方向变化很小等。这些先验信息可以通过顾及先验信息的平差方法<sup>[13]</sup>加以利用。另外,虽然 C/No 观测值不能完全反映出载波相位观测值的质量,但它仍然是反

映载波相位观测值质量的最佳指标,而且在一个历元的观测值中,多数卫星信号的 C/No 值能够反映出其相应观测值的质量,未能正确反映的则可当粗差来处理。基于这一思想,本文提出利用顾及先验信息的最小二乘抗差估计法对 SIGMA 随机模型进行补充,从而建立了一种综合 C/No 观测值及参数先验信息的抗差模型,以达到提高 GPS 动态定位精度的目的。

## 1 基于载噪比的随机模型

C/No 是载波信号能量与噪声能量在 1 Hz 带宽上的比值,它与多路径效应、接收机天线增益、天线电缆的衰减、卫星信号的发射水平以及对流层延迟有关,通常这个值为 45 dBHz。Brunner 等人建立的 SIGMA- $\epsilon$  随机模型为:

$$\sigma^2 = C_i \cdot 10^{-\frac{C/No}{10}} \quad (1)$$

其中,  $\sigma$  为相位观测值的标准差;  $C_i = B_i \cdot (\lambda_i / 2\pi)^2$ ,  $B$  为相位跟踪环带宽(Hz);  $\lambda$  为载波相位波长(m),通常取  $C_{L_1} = 0.00224 \text{ m}^2 \text{ Hz}$ ,  $C_{L_2} = 0.00077 \text{ m}^2 \text{ Hz}$ 。GPS 相位观测值的信噪比与卫星的高度角相关,当接收机、天线与天线电缆一定,且无其他信号干扰的情况下,C/No 与卫星高度角的关系是固定的,可用一个函数关系定义。当信号发生衍射或其他因素干扰时,一般情况下,相同高度角所对应的 C/No 值要更小。根据这一

性质, 可对一固定接收机天线组合在开阔的环境下预先建立高度角与 C/No 关系的模板, 然后建立 SIGMA- $\Delta$  模型, 即

$$\sigma^2 = C_i \cdot 10^{-(C/No_{\text{measured}} - \Delta)/10} \quad (2)$$

式中,  $\Delta$  为模板值与实际观测值之间的差值;  $\alpha$  为经验系数, 一般取 2。

遗憾的是, C/No 值的变化并不能完全反映衍射或多路径误差的变化, 而是有一个时间延迟。这个时间延迟量是所有多路径分量的一个函数值, 当反射信号个数未知时, 时间延迟量很难被模型化<sup>[12]</sup>, 因此需要对 SIGMA 模型进行补充。

## 2 综合 C/No 观测值及参数先验信息的抗差模型

### 2.1 顾及先验信息的抗差最小二乘估计法

设观测方程为:

$$\mathbf{l} = \mathbf{Ax} + \boldsymbol{\Delta} \quad (3)$$

式中,  $\mathbf{l}$  为观测值;  $\mathbf{A}$  为系数阵;  $\mathbf{x}$  为待估参数;  $\boldsymbol{\Delta}$  为测量误差。设  $\mathbf{x}$  的先验值为  $\bar{\mathbf{x}}$ , 先验协方差矩阵为  $\mathbf{Q}_{xx}$ , 测量误差  $\boldsymbol{\Delta}$  的协方差阵为  $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$ , 根据广义最小二乘准则可得:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{Q}_{xx}^{-1} + \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_{\Delta\Delta}^{-1} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{Q}_{xx}^{-1} \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_{\Delta\Delta}^{-1} \mathbf{l}) \quad (4)$$

$\hat{\mathbf{x}}$  的验后协方差阵为:

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{Q}_{xx}^{-1} + \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_{\Delta\Delta}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \quad (5)$$

假设观测值服从污染分布, 而先验信息准确, 未受污染, 那么根据 M-LS 估计准则, 可得最小二乘抗差解为:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{Q}_{xx}^{-1} + \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{Q}}_{\Delta\Delta}^{-1} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{Q}_{xx}^{-1} \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{Q}}_{\Delta\Delta}^{-1} \mathbf{l}) \quad (6)$$

其中,  $\bar{\mathbf{Q}}_{\Delta\Delta}^{-1}$  为等价协方差矩阵。考虑到 GPS 中一般利用双差观测值进行定位, 而双差观测值又具有相关性, 因此, 应按相关观测的抗差估计理论进行抗差估计。这里采用杨元喜教授提出的异常观测方差膨胀模型<sup>[14]</sup>来构造等价协方差矩阵。

设  $L_i, L_j$  的方差、协方差分别为  $\sigma_i^2, \sigma_{ij}^2$  和  $\sigma_{jj}^2$ , 则等价方差、协方差分别为  $\bar{\sigma}_i^2 = \lambda_{ii}\sigma_i^2, \bar{\sigma}_j^2 = \lambda_{jj}\sigma_{jj}^2, \bar{\sigma}_{ij}^2 = \lambda_{ij}\sigma_{ij}^2$ , 其中  $\lambda_{ij} = \lambda_{ii}\lambda_{jj}$ ,  $\lambda$  称为方差膨胀因子, 实质上为等价权的倒数, 可用权函数的倒数定义为方差膨胀因子函数。这里采用三段法的 IGG III 方案等价权函数<sup>[15]</sup>的倒数计算, 即

$$\lambda_{ii} = \begin{cases} 1, & |\bar{v}_i| = |v_i/\sigma_{v_i}| \leq k_0 \\ \frac{|\bar{v}_i|}{k_0} \left[ \frac{k_1 - k_0}{k_1 - |\bar{v}_i|} \right]^2, & k_0 < |\bar{v}_i| \leq k_1 \\ \infty, & |\bar{v}_i| > k_1 \end{cases} \quad (7)$$

式中,  $v$  为观测值残差;  $\sigma_{v_i}$  为  $v_i$  的方差, 可以用  $\sigma_{v_i}$

$= \sigma_0 \sqrt{q_{v_i}}$  计算而得,  $q_{v_i}$  为权倒数, 方差因子  $\sigma_0$  可用残差的绝对中位差作为此阶段的单位权中误差;  $k_0$  和  $k_1$  为两个常量, 其经验值为  $k_0 \in (1.5, 2.5)$ ,  $k_1 \in (3.0, 8.5)$ 。

主观确定的先验信息可能含有偏差, 因此, 实际工作中的关键是如何依据先验知识确实有关先验参数, 对此, 文献[16]进行了系统的研究。

### 2.2 综合随机模型算法

综合 C/No 观测值及先验信息的 GPS 观测量抗差随机模型的计算步骤如下:

- 1) 利用 SIGMA- $\epsilon$  方法定出初始的协方差矩阵  $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$ 。
- 2) 根据实际应用给出先验信息  $\bar{\mathbf{x}}$  及  $\mathbf{Q}_{xx}$ 。
- 3) 利用式(4)及式(5)求出参数以及观测值残差的协方差矩阵。计算步骤为: ① 计算残差  $\mathbf{v} = \mathbf{Ax} - \mathbf{l}$ ; ② 计算残差协方差阵  $\mathbf{Q}_w = \mathbf{Q}_{ll} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_{xx}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{Q}_{\Delta\Delta}^{-1})^{-1} \mathbf{A}^T$ ; ③ 计算单位权中误差<sup>[14]</sup>  $\sigma_0 = \alpha \cdot \text{med}_i |v_i - \text{med}_j |v_j||, \alpha = 1.483, i, j = 1, 2, \dots, n$ ; ④ 计算残差的均方差  $\sigma_{v_i} = \sigma_0 \cdot \sqrt{\mathbf{Q}_w(i, i)}$ 。
- 4) 对残差进行标准化  $\bar{v}_i = |v_i / \sigma_{v_i}|$ 。
- 5) 根据式(7)计算方差膨胀因子, 调整异常观测值的方差及协方差。
- 6) 循环步骤 3)~5), 直到  $|\lambda_{ii}(k+1) - \lambda_{ii}(k)| < \epsilon$  时停止 ( $\epsilon$  为一个很小的正数)。

## 3 试验结果及分析

本次试验的参考站位于香港理工大学教学楼的 Core E 天台, 流动站位于与参考站相距约 2 km 处的一幢 83 层高楼的楼顶上。采用 Topcon GB1000 接收机进行静态观测; 天线为 Topcon 抗流圈天线; 卫星截止高度角为 5°; 数据采样间隔为 1 s; 观测时间为 2006 年 5 月 18 日 18 时至 19 时。数据处理采用笔者开发的 GPSSM 软件进行单历元解算。为了进行比较分析, 分别采用 4 种随机模型进行解算: ① 等权模型, 仅考虑数学相关; ② SIGMA- $\epsilon$  模型; ③ 未含先验信息的综合抗差模型; ④ 顾及先验信息的综合抗差模型。

高楼的原始位置是在风力较小的情况下进行一周静态观测获得的, 其精度在 1 mm 左右。当风力较大时, 高楼将发生水平位移, 此时, 高楼在任意时刻的位置应该为其原始位置与高楼位移变形之和, 即

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \Delta \mathbf{D} \quad (8)$$

式中,  $\mathbf{X}$  为任意时刻的位置;  $\mathbf{X}_0$  为原始位置;  $\Delta \mathbf{D}$

为变形量。由于变形量未知,把变形量归入先验误差中,即取  $\mathbf{X}_0$  为坐标的先验值,则先验值的方差为:

$$\sigma_x^2 = \sigma_{\mathbf{X}_0}^2 + \sigma_{\Delta D}^2 \quad (9)$$

式中,  $\sigma_{\Delta D}^2$  表示由于变形未知而带来的位置不确定性;  $\sigma_{\mathbf{X}_0}^2$  为原始位置的方差。

高楼楼顶的位移变形与风力、风向、楼高、建筑材料等有关。根据试验当天的风力观测数据及高楼风洞试验得出的经验公式计算,该高楼的水平振动位移小于 2 cm,高程方向小于 1 mm,即由变形引起的位置不确定性为  $\sigma_{\Delta D} = 2$  cm,  $\sigma_h = 1$  mm。考虑经验公式的误差、风力、风向观测的误差及其他不可知因素的影响,从稳健的角度<sup>[15]</sup>,实际处理时,大大降低了先验坐标的精度,即  $\sigma_x = 10$  cm,  $\sigma_y = 10$  cm,  $\sigma_h = 1$  cm。模型③和④中的抗差经验值  $k_0 = 1.5$ ,  $k_1 = 3.0$ 。

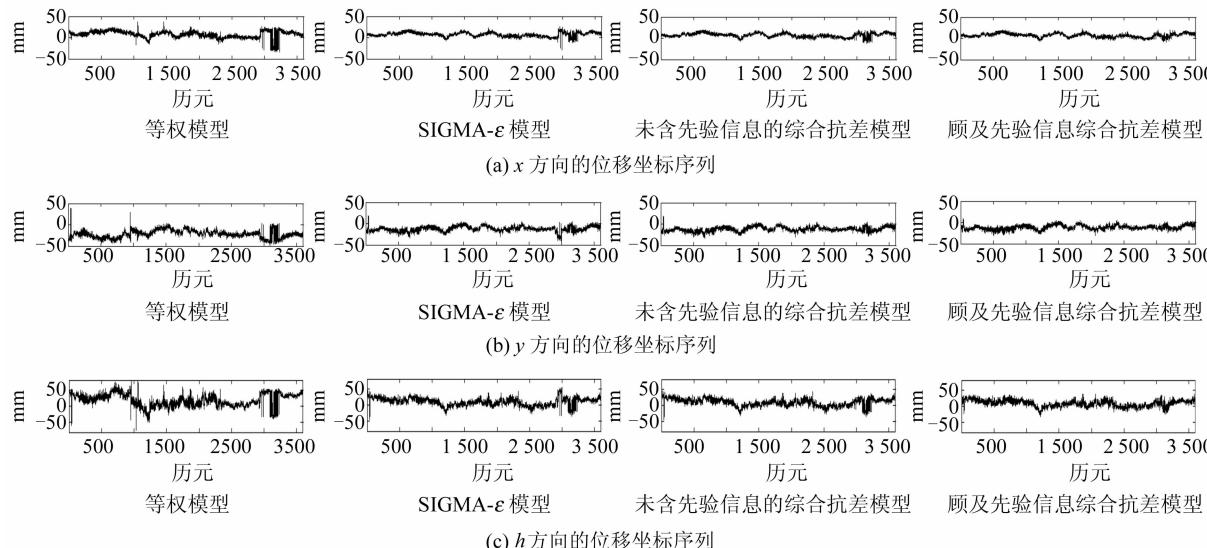


图 1 分别用 4 种模型计算得到的位移坐标序列

Fig. 1 Coordinate Series of Using Four Different Stochastic Models

以上结果表明,SIGMA 模型可以有效地削弱衍射误差和多路径误差的影响,抗差模型可以进一步削弱 SIGMA 模型未能削弱的较大误差,顾及先验信息的综合模型则具有更强的抗差性能。从试验结果还可以看出,抗差模型和顾及先验信息的综合模型都不能削弱较小且具有系统性的误差,这主要是因为仅当观测值的污染率较低时,抗差模型才会有较好的效果所致。在一般的 GPS 应用中,通常至多只有 1~2 颗卫星信号可能发生衍射,若把发生衍射的观测值视为含粗差的观测值,而把主要受多路径误差影响的观测值视为正常观测值,则此时观测值的污染率较低,抗

图 1 为单历元解算结果减去高楼的原始位置而得的  $x$ 、 $y$  和  $h$  三个方向的坐标位移序列图。从图 1 可以看出,当采用等权模型时,由于受信号衍射的影响,位移序列图中发生了跳跃现象;采用 SIGMA- $\epsilon$  模型处理后,结果明显得到改善,坐标位移序列曲线更光滑,但从 55~68 历元、2 952~3 262 历元仍然存在数据跳跃现象;采用抗差处理后,2 952~3 002 历元的跳跃现象基本上被平滑,但 3 002~3 262 历元仍有较大的跳跃;在抗差模型中加入先验信息,即采用顾及参数先验信息的综合模型后,所有较大的跳跃都被平滑。表 1 为采用四种不同模型进行单历元解算的结果减去高楼的原始位置而得的坐标位移序列的 RMS 值,可以看出,SIGMA- $\epsilon$  模型的精度比等权模型的精度提高了约 50%,抗差模型的精度比 SIGMA- $\epsilon$  模型稍有提高。

差模型可以有效地削弱其影响。当未发生信号衍射时,观测值的误差主要受多路径效应的影响。一般来说,在一个多路径环境中,大部分卫星的观测值都受到其影响,只是影响的程度有所差异,若把这些较大的多路径效应误差都看成粗差,则此时的污染率较高,抗差模型不起作用。

表 1 4 种模型得到的坐标序列 RMS 值/mm

Tab. 1 RMS of Coordinates Series Using Four Models

	模型①	模型②	模型③	模型④
$x$	11.4	8.7	8.7	8.5
$y$	23.5	13.1	13.0	12.7
$h$	26.9	15.9	14.7	13.7

## 4 结语

为了提高抗差估计的可靠性,本文结合GPS的实际应用,采用顾及先验信息的抗差最小二乘估计方法对SIGMA模型进行了补充。试验结果表明,该方法可以更有效地削弱一些较大的误差(如衍射误差),但不能削弱较小的系统误差。这些系统误差以多路径效应误差为主。当测站周围环境比较固定时,具有很强的重复性。因此,仍可以采用多路径重复性改正方法进一步削弱多路径效应误差。

## 参 考 文 献

- [1] 戴吾蛟,丁晓利,朱建军. GPS振动变形监测中单一衍射或反射信号误差处理研究[J]. 工程勘察, 2006(5):45-49
- [2] Euler H, Goad C C. On Optimal Filtering of GPS Dual-Frequency Observations Without Using Orbit Information [J]. Bull Geod, 1991, 65: 130-143
- [3] Gerdan G P. A Comparison of Four Methods of Weighting Double-Difference Pseudo-range Measurements[J]. Trans Tasman Surv, 1995, 1(1):60-66
- [4] Hartinger, Brunner F K. Variances of GPS Phase Observations: SIGMA- $\epsilon$  Model [J]. GPS Solutions, 1999, 4(2):24-35
- [5] Brunner F K, Hartinger, Troyer L. GPS Signal Diffraction Modeling: The Stochastic SIGMA- $\Delta$  Model[J]. Journal of Geodesy, 1999, 73:259-267
- [6] Wieser A, Brunner F K. An Extended Weight Model for GPS Phase Observations[J]. Earth Planets Space, 2000, 52:777-782
- [7] Wieser A. A Fuzzy System for Robust Estimation and Quality Assessment of GPS Data for Real-Time Applications [C]. ION GPS 2001, Salt Lake City, 2001
- [8] Wang J, Stewart M P, Tsakiri M. Stochastic Modelling for Static GPS Baseline Data Processing[J]. Journal of Surveying Engineering, 1998, 124(4): 171-181
- [9] Satirapod C. Improving the Accuracy of Static GPS Positioning with New Stochastic Modeling Procedure[C]. ION GPS 2001, Salt Lake City, 2001
- [10] Tiberius C, Kenselaar F. Variance Component Estimation and Precise GPS Positioning: Case Study [J]. Journal of Surveying Engineering, 2003, 129(1):11-18
- [11] 何海波,杨元喜. GPS观测量先验方差-协方差矩阵实时估计[J]. 测绘学报, 2001, 30(1):42-47
- [12] Wang J, Lee H K, Lee Y J, et al. Online Stochastic Modelling for Network-based GPS Real-Time Kinematic Positioning [J]. Journal of Global Positioning System, 2005, 4(1):113-119
- [13] 隋立芬,陶大欣. 多种顾及先验信息的平差及其比较[J]. 测绘工程, 2001, 10(4): 9-11
- [14] 杨元喜,宋力杰,徐天河. 大地测量相关观测量抗差估计理论[J]. 测绘学报, 2002, 31(2):95-99
- [15] 周江文,杨元喜,黄幼才,等. 抗差最小二乘法[M]. 武汉:华中理工大学出版社, 1997
- [16] Zhu Jianjun, Wang Xibo. Admissibility of Bayes Estimate with Inaccurate Prior in Surveying Adjustment [J]. Trans Nonferrous Met Soc of China, 2000, 10(1): 114-118

**第一作者简介:**戴吾蛟,讲师,博士。现主要从事GNSS数据處理及应用研究。

E-mail:daiwujiao@163.com

## Robust Model Based on C /No and Priori-information of Parameters

DAI Wujiao<sup>1</sup> DING Xiaoli<sup>2</sup> ZHU Jianjun<sup>1</sup>

(1) Department of Survey Engineering and Geomatics, Central South University, South Lushan Road, Changsha 410083, China)

(2) Department of Land Surveying and Geo-informatics, The Hong Kong Polytechnic University,  
Hung Hom, Kowloon, Hong Kong)

**Abstract:** Based on GPS application, a new stochastic model based on the combination of C/No and priori-information of parameters is proposed. The results show that the new model is more reliable and can mitigate the errors in the GPS observations effectively.

**Key words:** GPS; stochastic model; robust estimation