文章编号：1671-8860(2008)08-0831-03　　文献标志码：A

观测结构的度量

卢秀山[1]　冯遵德[2]

（1　山东科技大学基础地理信息与数字化技术重点实验室，青岛市经济技术开发区前湾港路579号，266510）
（2　徐州师范大学测绘学院，徐州市铜山新区上海路101号，221116）

摘　要：给出了超平行多面体体积的表达式，论证了超平行多面体体积与Gram行列式的值之间的关系，提出了一种度量观测结构优劣的方法，并通过实例对该方法进行了验证。

关键词：观测结构；超平行多面体；Gram行列式；病态性

中图法分类号：P207.2

分析参数估计系统病态性问题产生的原因，减弱病态性对参数估计的影响，一直是测绘科技工作者关注的问题。根据系统病态性产生的主要原因，病态性问题可分为两类[1]：参数设置不合理或设置过多，参数间存在较严重的复共线性（Ⅰ类）；观测结构不合理，观测组所含的信息量少于确定参数所必需的信息量（Ⅱ类）。文献[1-4]研究了观测向量之间、观测向量与观测子空间之间、观测子空间之间的关系，以及观测信息量的度量等观测结构优劣的度量方法。研究发现，由观测向量构成的超平行多面体体积反映了观测结构的优劣。本文以欧氏空间分析理论为工具，提出了一种度量观测结构优劣的方法。

1　观测结构的度量

观测结构是观测向量组在欧氏空间中几何特征的一种表达。由实践可知，独立的观测向量之间既不正交，也不线性相关。笔者认为，仅度量向量间的正交性[5]来反映观测结构的优劣是有缺陷的[3]，由观测向量构成的超平行多面体体积反映了向量模大小、向量之间的夹角等观测结构的几何特征。

1.1　超平行多面体体积

对于二维空间，两观测向量 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$ 构成的平行四边形面积为：

$$S = \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 = \|\boldsymbol{a}_1\| \cdot \|\boldsymbol{a}_2\| \sin\theta \tag{1}$$

式中，θ 为 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$ 向量的夹角；$\|\boldsymbol{a}_2\|\sin\theta$ 可看作与向量 $\boldsymbol{a}_1$ 正交的向量 $\boldsymbol{\beta}_2$ 的模，则式(1)可表示为：

$$S = \|\boldsymbol{a}_1\| \cdot \|\boldsymbol{\beta}_2\| \tag{2}$$

对于三维空间，平行六面体的体积为：

$$U = \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_3 \tag{3}$$

设向量 $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2$，则 $\boldsymbol{k}\perp\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{\beta}_2$，此时有：

$$U = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{a}_3 = \|\boldsymbol{k}\| \cdot \|\boldsymbol{a}_3\|\cos\theta \tag{4}$$

式中，θ 为 $\boldsymbol{a}_3$ 与 $\boldsymbol{k}$ 之间的夹角；$\|\boldsymbol{a}_3\|\cos\theta$ 为 $\boldsymbol{a}_3$ 在 $\boldsymbol{k}$ 上的投影，可看作与 $\boldsymbol{k}$ 方向相同向量的模长，此向量记作 $\boldsymbol{\beta}_3$，则

$$U = \|\boldsymbol{k}\| \cdot \|\boldsymbol{\beta}_3\| = \|\boldsymbol{a}_1\| \cdot \|\boldsymbol{\beta}_2\| \cdot \|\boldsymbol{\beta}_3\| \tag{5}$$

同理，可推广到 n 维观测空间：

$$U = \|\boldsymbol{a}_1\| \cdot \|\boldsymbol{\beta}_2\| \cdots \|\boldsymbol{\beta}_n\| \tag{6}$$

式中，向量为正交向量，在具体计算时，观测向量 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、…、$\boldsymbol{a}_n$ 可按G-S法进行正交化。

1.2　超平行多面体体积与Gram行列式的关系

设 $\boldsymbol{a}_i=(a_{i1},\cdots,a_{in})^{\mathrm{T}}$ 为第 i 次观测向量，其中 n 是参数维数。记 $\boldsymbol{B}=(a_1,\cdots,a_m)$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}$ 为观测方程系数矩阵，m 是观测向量维数。$\boldsymbol{B}$ 的Gram行列式可简记为 $G(\boldsymbol{B})$，其数值表达式为：

$$G(\boldsymbol{B}) = \begin{cases} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_1 = \|\boldsymbol{a}_1\|^2, i = 1 \\ \|\boldsymbol{a}_1\|^2 \|\boldsymbol{a}_2\|^2 \cdot \sin^2\langle\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\rangle = S^2, \\ \quad i = 2 \end{cases} \tag{7}$$

收稿日期：2008-06-15。

项目来源：国家自然科学基金资助项目(40474005)；武汉大学地球空间环境与大地测量教育部重点实验室测绘基础研究基金资助项目(1469990324233-04-05)。

即 $i=2$ 时，$G(\boldsymbol{B})$ 为两观测向量组成的平行四边形面积的平方。

为推证方便，假设 $m\leqslant n$，且当 $i=m-1$ 时，$G(\boldsymbol{B})$ 表示 $m-1$ 个观测向量构成的 $m-1$ 维超平行多面体体积的平方，则当 $i=m$ 时[5]，

$$U_m^2=\det(\boldsymbol{B}_{m-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{m-1})\,\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_{m-1}(\boldsymbol{B}_{m-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{m-1})^{-1}\boldsymbol{B}_{m-1}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{a}_m\|_2^2=\det([\boldsymbol{B}_{m-1}\quad \boldsymbol{a}_m]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{B}_{m-1}\quad \boldsymbol{a}_m])=G(\boldsymbol{B}) \tag{8}$$

由此可知，$G(\boldsymbol{B})$ 的数值是所有观测向量构成的超平行多面体体积的平方。因此，$G(\boldsymbol{B})$ 在度量观测结构上与超平行多面体体积 U 的作用一样。可以将观测向量构成的超平行多面体体积 U 表示为[3,6]：

$$U=\sqrt{G(\boldsymbol{B})}=\sqrt{\det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})} \tag{9}$$

由矩阵理论可得：

$$\det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i \tag{10}$$

式中，λ_i 为矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的特征值。如果 n 个 λ_i 中至少有一个(如 λ_n)接近于0(这是特征分析法诊断系统病态性的衡量指标)，则 U 接近0。因此，U 的大小反映了矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的性态。

1.3 观测结构的度量

超平行多面体体积 U 的大小反映了观测结构的几何特征，但不能说明观测结构的优劣。因为：① U 的大小与向量模的大小有关；② U 没有相对性。另一方面，对于观测矩阵 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{m\times n}$，一般有 $m>n$，仅考虑 $m=n$ 是不够的。

1) 对于观测矩阵 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{m\times n}$，当 $m=n$ 时，$\boldsymbol{A}$ 的行向量 $\boldsymbol{a}_i=(a_{i1},\cdots,a_{in})^{\mathrm{T}}$。令 $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_2=\cdots=\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{a}_0$，$U_0=\|\boldsymbol{a}_0\|^n$，式中，$U_0$ 表示可能的最大体积。一般的超平行多面体体积与理想结构状态下的超平行多面体体积的比例可反映观测结构的优劣。

设观测向量 $\boldsymbol{a}_1$ 为组中的最大观测向量，则诊断公式为：

$$E=\frac{\sqrt{\det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})}}{\|\boldsymbol{a}_1\|^n}=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\|\boldsymbol{a}_1\|^n} \tag{11}$$

若 U 用欧氏范数表示，则有诊断公式：

$$E=\frac{\|\boldsymbol{\beta}_1\|\cdot\|\boldsymbol{\beta}_2\|\cdots\|\boldsymbol{\beta}_n\|}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|^n} \tag{12}$$

式中，$\boldsymbol{\beta}_1$ 为正交化(未单位化)后的最大向量。

2) 当 $m>n$ 时，观测矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可表示为[3,6]：

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{G} \tag{13}$$

式中，$\boldsymbol{Q}_1$ 是正交列满秩矩阵；$\boldsymbol{G}$ 是行满秩矩阵。将矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的行向量记为 $\boldsymbol{g}_i=(g_{i1},\cdots,g_{in})^{\mathrm{T}}$，假设 $\boldsymbol{g}_1$ 为最大行向量，则有诊断公式：

$$E=\frac{\sqrt{\det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})}}{\|\boldsymbol{g}_1\|^n} \tag{14}$$

E 的值域为 $0\leqslant E\leqslant 1$。显然，若 $E=1$，说明观测结构最优；$E=0$，说明观测向量组中有向量共线或共面的情况，此时观测结构最差。因此，式(11)、式(12)、式(14)可以较好地反映观测结构的优劣。

为了便于分析观测结构与Ⅱ类病态性的关系，取 $F=1/E$ 作为诊断观测结构优劣的标准。由式(14)得：

$$F=\frac{\|\boldsymbol{g}_1\|^n}{\sqrt{\det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})}} \tag{15}$$

由式(15)知，$1\leqslant F<\infty$。F 的大小反映了观测空间的几何特征。F 越小，表明观测结构越好；F 越大，表明观测结构越差。

2 算例与分析

设 A、B、C 为3个已知点，坐标分别为 (x_A,y_A,z_A)、(x_B,y_B,z_B)、(x_C,y_C,z_C)，p 为待定点，在 p 点观测至已知点 A、B、C 的边长分别为 L_1、L_2、L_3。表1为三组模拟测距空间交会的观测数据，这三组数据中的已知点大概位于半径为10的球面上，p 点大体位于球心。为了比较分析观测结构与病态性的关系，在计算 F 的同时计算观测矩阵的条件数，计算结果见表2。

表1 仿真测量数据

Tab.1 Simulating Observations Data

点号	x	y	z	L
A_1	−0.500 0	0.500 0	9.975	10.001
B_1	0.500 0	−0.500 0	9.976	10.000
C_1	0.100 0	−0.500 0	9.987	10.001
A_2	−5.000	5.000	7.071	10.001
B_2	5.000	5.000	7.071	10.002
C_2	0.100	−7.071	7.071	10.002
A_3	7.071	7.071	0.010	10.002
B_3	7.071	7.071	0.010	10.002
C_3	0.100	−10.000	0.010	10.001

表2 测距空间交会计算结果

Tab.2 Calculating Results of Distance-Measuring Space Intersection

组别	U	F	F^2	$k(\boldsymbol{A})$	$k(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$
1	4	250	62 500	80	6 400
2	852	1.2	1.4	1.7	3
3	24	42	1 764	82	6 724

根据对模拟测量数据的计算分析可知：

1) 已知点和未知点 p 构成的几何体成细长的锥体时(顶角接近于0°)，观测向量构成的平行

多面体的体积 U 较小，F 较大。第一组数据对应的观测矩阵的条件数较大，病态较严重。

2）随着交会图形结构逐渐变得较合理，即已知点和未知点 p 构成的锥体顶角接近 90°时，多面体体积接近最大。第二组数据中，观测向量的夹角均为 80°以上，观测向量接近正交，观测矩阵处于良态。

3）锥体的顶角大于 90°，未知点 p 与已知点渐进共面时，U 变小，趋向于 0，观测结构变差。第三组数据算出的结果说明渐近共面所形成的交会图形均不是较好的图形[3,7]。

该算例说明观测结构的度量 F 可以较好地反映观测结构的特征。观测结构好，即观测向量构成的平行多面体的体积 U 较大，其度量 F 较小，参数估计系统处于良态；反之则反。

3 结　语

参数设置不合理将导致参数估计系统存在Ⅰ类病态性问题，特征分析法是一种诊断单个冗余参数的有效方法。观测结构不合理是导致参数估计系统存在Ⅱ类病态性问题的原因之一，度量观测结构是诊断系统是否存在Ⅱ类病态性问题的有效措施[8]。F 作为观测结构优劣的度量，不仅具有诊断Ⅱ类病态性问题的作用，而且客观地反映了观测结构的几何特征。基于 F 的诊断系统Ⅱ类病态性的指标，有待于进一步研究。

参　考　文　献

[1] 卢秀山. 病态系统分析理论及其在测量中的应用[D]. 武汉：中国科学院测量与地球物理研究所，1999

[2] 冯遵德，卢秀山，郭英. 测距空间交会测量模式中交会图形优劣的诊断[J]. 测绘通报，2004(12)：24-26

[3] 冯遵德. Ⅱ类病态系统分析理论及其应用研究[D]. 青岛：山东科技大学，2006

[4] 冯遵德，卢秀山，郭英，等. 基于欧氏范数的Ⅱ类病态性诊断[J]. 测绘科学，2006，31(4)：30-31

[5] 颜世建. 关于条件数的一个定理[J]. 南京师大学报(自然科学版)，2004，27(4)：25-27

[6] 程云鹏，张凯院，徐仲. 矩阵论[M]. 西安：西北工业大学出版社，1989

[7] 黄维彬. 近代平差理论及应用[M]. 北京：解放军出版社，1990

[8] 卢秀山，宁津生，冯遵德，等. 观测有效性的度量方法[J]. 武汉大学学报·信息科学版，2003，28(2)：144-148

第一作者简介：卢秀山，教授，博士，博士生导师。现主要从事测量数据处理理论及应用、GPS/Galileo 应用技术研究。

E-mail：xiushanl@vip.sina.com

Measurement of Observation Structure

LU Xiushan[1]　*FENG Zunde*[2]

(1　Key Laboratory of Fundamental Geo-information & DG-Technology, Shandong University of Science and Technology, 579 Qianwangang Road, Qingdao 266510, China)

(2　School of Geodesy and Geomatics, Xuzhou Normal University, 101 Shanghai Road, Xuzhou 221116, China)

Abstract: The irrationality of observation structure is one of the reasons resulting in ill-condition in parameter estimation, and measuring observation structure is an effective way to diagnose whether it is ill-conditioned in a system or not. An expression of the volume of hyper-parallel polyhedron is presented, the relationship between the volume and the value of Gram DET is proposed and a method is put forward to measure the advantages and disadvantages of observation structure.

Key words: observation structure; hyper-parallel polyhedron; Gram DET; ill-conditioned

About the first author: LU Xiushan, professor, Ph.D, Ph.D supervisor, majors in surveying data processing and GPS/Galileo applications.

E-mail: xiushanl@vip.sina.com