第 33 卷 第 2 期
2008 年 2 月
武汉大学学报·信息科学版
Geomatics and Information Science of Wuhan University
Vol. 33 No. 2
Feb. 2008

文章编号:1671-8860(2008)02-0183-04 **文献标志码**:A

附加约束条件的序贯平差

曾安敏[1,2] 杨元喜[3] 欧阳桂崇[2]

(1 长安大学地测学院,西安市雁塔路 126 号,710054)
(2 西安测绘信息技术总站,西安市西影路 36 号,710054)
(3 西安测绘研究所,西安市雁塔路中段 1 号,710054)

摘 要:从观测量分组的参数平差出发,详细推导了附加约束条件的序贯平差及其精度估计,讨论了附加约束条件的抗差序贯平差的计算过程。算例表明,推导的公式正确有效,简单实用,附加约束条件的序贯平差抗差估计能有效地抵制粗差的影响。

关键词:约束条件;序贯平差;附加约束条件的序贯平差;抗差估计
中图法分类号:P207.2

在研究地壳形变时,认为网中所有参数都不是已知的,因而网是秩亏的,从理论上推导了序贯秩亏平差法,解决了复测网等秩亏网如何应用序贯平差[1,2]的问题。当观测样本、先验参数有粗差时,粗差必然对当前和后继参数及其方差、协方差估值造成扭曲。文献[3-7]从等价权原理出发,推导了序贯平差抗差估计[7]和自适应序贯抗差估计[8],采用抗差估计方法,能有效地抵制粗差的影响。在地面网、空间网观测数据中,参数间存在一些约束条件,如固定某些点的坐标、固定边长、固定方位角等[9,10],平差时,要将参数估值强制附合于这些约束条件。有学者从实践角度出发,把约束条件看成权无穷大的观测量[9],同其他观测量一并处理。本文从观测量分组的参数平差出发,顾及参数间的约束条件,从理论上详细推导了附加约束条件的序贯平差。当观测样本、先验参数有粗差时,为抵制粗差的影响,讨论了附加约束条件的抗差序贯平差。

1 附加约束条件的序贯平差

1.1 基本原理

设观测样本为 $\underset{n\times 1}{\boldsymbol{L}}$,将其分为两组 $\underset{n_1\times 1}{\boldsymbol{L}_1}$、$\underset{n_2\times 1}{\boldsymbol{L}_2}$,相应的权矩阵分别为 $\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}$,$\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{\Sigma}_2^{-1}$,其中,$\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}$、$\boldsymbol{\Sigma}_2^{-1}$ 分别为 $\boldsymbol{L}_1$、$\boldsymbol{L}_2$ 的协方差矩阵。观测方程为[1,2]:

$$\boldsymbol{V}_1=\boldsymbol{A}_1\hat{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{L}_1 \tag{1}$$

$$\boldsymbol{V}_2=\boldsymbol{A}_2\hat{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{L}_2 \tag{2}$$

式中,$\boldsymbol{A}_1$ 为 $n_1\times t$ 维设计矩阵;$\boldsymbol{A}_2$ 为 $n_2\times t$ 维设计矩阵;$\hat{\boldsymbol{X}}$ 为 $t\times 1$ 维待估参数向量。

由式(1)单独平差可得到参数向量估值 $\hat{\boldsymbol{X}}^{(1)}$ 和协因数矩阵 $\boldsymbol{Q}_{\hat{X}}^{(1)}$。依据序贯平差原理[1-6],对式(1)、式(2)进行序贯平差,参数估值及其验后协因数矩阵为:

$$\hat{\boldsymbol{X}}=\hat{\boldsymbol{X}}^{(1)}+\delta\hat{\boldsymbol{X}}^{(2)}=\hat{\boldsymbol{X}}^{(1)}+\boldsymbol{J}(\boldsymbol{L}_2-\boldsymbol{A}_2\hat{\boldsymbol{X}}^{(1)}) \tag{3}$$

$$\boldsymbol{Q}_{\hat{X}}=\boldsymbol{N}^{-1}=\boldsymbol{Q}_{\hat{X}}^{(1)}-\boldsymbol{J}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{Q}_{\hat{X}}^{(1)} \tag{4}$$

式中,矩阵 $\boldsymbol{J}$ 为序贯平差增益矩阵,

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{Q}_{\hat{X}}^{(1)}\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}_2^{-1}+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{Q}_{\hat{X}}^{(1)}\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}})^{-1} \tag{5}$$

约束条件的具体形式多种多样,其统一的形式为[1]:

$$\boldsymbol{B}_X\hat{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{W}=0 \tag{6}$$

式中,$\boldsymbol{B}_X$ 为 $r\times t$ 维系数矩阵;$\boldsymbol{W}$ 为 $r\times 1$ 维常数向量。

以 $\boldsymbol{X}_0$ 为初值,由式(1)单独平差,有:

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{X}}^{(1)}=\boldsymbol{X}_0+\delta\hat{\boldsymbol{X}}^{(1)}=\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{N}_1^{-1}\boldsymbol{U}_1\\ \boldsymbol{V}_1^{(1)}=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}^{(1)}-\boldsymbol{L}_1\end{cases} \tag{7}$$

式中,$\boldsymbol{N}_1=\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}_1$;$\boldsymbol{U}_1=\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{L}_1-\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}_0)$。

以 $\hat{\boldsymbol{X}}^{(1)}$ 为初值,代入式(1)、式(2)、式(6),则

收稿日期:2007-12-17。
项目来源:国家自然科学基金资助项目(40474001,40774001);国家 863 计划资助项目(2007AA12Z331)。

抗差序贯平差解 $\delta\hat{\boldsymbol{X}}_S$、$\boldsymbol{Q}_{\hat{X}_S}$ 计算引入约束条件对参数、协方差和残差平方和的贡献。

3　算例分析

采用两个算例进行计算，一个是模拟的水准网数据，人为地加入粗差检验抗差估计情况；另一个是实测的重力网数据，用于检验实际运用效果。在抗差估计计算中，采用 IGGⅢ 方案（$k_0=1.0$，$k_1=3.5$）。

3.1　模拟数据计算

利用文献[7]模拟的水准网及其观测数据，将 3-4 点间的高差作为约束条件（3-4 点间高差为 5 m），考察其对平差结果的影响。计算结果见表 1、表 2。

表 1　参数间无约束条件的序贯平差结果/m

Tab. 1　Sequential Adjustment Without Constraints

点号	2	3	4	5	6
第二期	10.001 1	2.003 0	7.002 2	5.001 4	7.003 7
第三期	10.001 8	2.002 4	7.002 5	5.001 4	7.003 3

表 2　附加 3-4 点间高差为 5 m 的约束平差结果/m

Tab. 2　Sequential Adjustment with 5 m Between No. 3-4

点号	2	3	4	5	6
第二期	10.001 0	2.002 4	7.002 4	5.001 2	7.003 4
第三期	10.002 0	2.002 6	7.002 6	5.001 7	7.003 6

从表 1、表 2 可以看出，当观测网中约束条件与原始观测精度一致时，点位参数结果变化不大。

为了研究观测样本粗差对当前和后续参数估值的影响，并分析附加条件的抗差序贯平差的抗差能力，在第三期的 h_3、h_8 中分别加入粗差 +2.3 cm 和 −2.6 cm，约束条件为 3-4 点间高差 5 m。采用 3 种方案进行计算：① 无粗差时，附加条件的序贯最小二乘平差，估值为 X_0^{LS}；② 含粗差时，附加条件的序贯最小二乘平差，估值为 X_S^{LS}；③ 含粗差时，附加条件的序贯抗差估计，估值为 X_S^{IGGIII}。计算结果见表 3。

从表 3 可以看出，当观测样本中存在粗差时，$|X_S^{\mathrm{LS}}-X_0^{\mathrm{LS}}|$ 的最大差值为 2.3 mm，这说明基于最小二乘原理的序贯平差的抗差性差。当加入降权因子后，$|X_S^{\mathrm{IGGIII}}-X_0^{\mathrm{LS}}|$ 的最大差值为 0.4 mm，这说明抗差序贯平差能有效地削弱粗差对参数估值的影响，即具有较强的抗差性。

表 3　第三期计算参数估值及其参数差值表/m

Tab. 3　Comparison Among Results of Different Methods in the Third Period Data

点号	2	3	4	5	6	与 X_0^{LS} 之差(10 mm)				
X_0^{LS}	10.002 0	2.002 6	7.002 6	5.001 7	7.003 6					
X_S^{LS}	10.003 5	2.004 9	7.004 9	5.001 9	7.005 1	15	23	23	2	15
X_S^{IGGIII}	10.001 9	2.002 6	7.002 6	5.001 3	7.003 6	1	0	0	4	0

3.2　实测重力网数据计算

为考察实际计算效果，利用一实测重力网数据进行计算，该网结构良好，共有 382 个重力点，分别采用飞机、汽车等交通工具进行相对重力测量。先采用部分观测量进行平差计算，得到 382 个重力点的先验重力值和协方差，然后用 396 条相对重力测量数据作为新增观测量，分别把 22 个绝对重力点、9 段段差固定，作为参数间的约束条件进行序贯平差计算。为考察计算效果，采用如下 8 种方案进行计算：① 序贯最小二乘平差，估值为 X_0^{LS}；② 序贯抗差估计，估值为 X_0^{IGGIII}；③ 固定 22 个绝对重力点，附加条件的序贯最小二乘平差，估值为 X_{C22}^{LS}；④ 固定 22 个绝对重力点，附加条件的序贯抗差估计，估值为 $X_{C22}^{\mathrm{IGGIII}}$；⑤ 固定 9 段段差作为条件，附加条件的序贯最小二乘平差，估值为 X_{D9}^{LS}；⑥ 固定 9 段段差作为条件，附加条件的序贯抗差估计，估值为 X_{D9}^{IGGIII}；⑦ 固定 22 个绝对重力点和 9 段段差作为条件，附加条件的序贯最小二乘平差，估值为 X_{C22D9}^{LS}；⑧ 固定 22 个绝对重力点和 9 段段差作为条件，附加条件的序贯抗差估计，估值为 $X_{C22D9}^{\mathrm{IGGIII}}$。计算结果见表 4、表 5。

从表 4、表 5 可以看出：

1）采用不同方案计算得到的单位权中误差和参数中误差均优于 20 μGal 和 10 μGal，抗差序贯平差与序贯平差结果的最大、最小差值分别为 1.8 μGal、−1.9 μGal，说明重力点的先验重力值

表 4　不同方案计算的内部精度/μGal

Tab. 4　Result Precisions of Different Methods

计算方案	X_0^{LS}	X_0^{IGGIII}	X_{C22}^{LS}	$X_{C22}^{\mathrm{IGGIII}}$	X_{D9}^{LS}	X_{D9}^{IGGIII}	X_{C22D9}^{LS}	$X_{C22D9}^{\mathrm{IGGIII}}$
单位权中误差	19.6	18.9	19.8	19.1	19.6	18.8	19.5	19.1
参数平均精度	10.3	9.9	7.3	7.0	9.1	8.8	7.2	6.2