

基于四元数的三维空间相似变换解算

赵双明¹ 郭秋燕² 罗 研³ 吴 巍⁴

(1 武汉大学遥感信息工程学院,武汉市珞喻路 129 号,430079)
(2 陕西省测绘局,西安市友谊东路 334 号,710054)
(3 黑龙江测绘局产业发展处,哈尔滨市测绘路 2 号,150086)
(4 青海省第一测绘院,西宁市黄河路 13 号,810001)

摘 要:提出一种基于四元数构造旋转矩阵、解算三维空间相似变换模型的平差算法。模拟数据试验表明,该算法是稳健的,摄影测量中用四元数构造旋转矩阵具有明显的优越性。
关键词:四元数; 旋转矩阵; 三维空间相似变换; 平差精度
中图法分类号:P231.4

1 四元数构造旋转矩阵

如图 1 所示,考虑以角度 θ 绕三维空间矢量 $\vec{OA}=[X_A, Y_A, Z_A]$ 旋转的所有旋转矩阵。分别定义四个元素: $x=cX_A; y=cY_A; z=cZ_A; w=s$ 。其中, $c=\sin(\theta/2), s=\cos(\theta/2)$,则定义 $Q=[x, y, z, w]$ 为四元数^[1]。从定义看出,空间任意一个旋转由一个旋转轴和一个转角即可描述。

四元数是复数的扩展,形式表示为 $q=w+xi+yj+zk$ 。若 $w^2+x^2+y^2+z^2=1$,则 q 称为

$$\begin{bmatrix} 1-2(y^2+z^2) & 2(xy-wz) & 2(xz+wy) & 0 \\ 2(xy+wz) & 1-2(x^2+z^2) & 2(yz-wx) & 0 \\ 2(xz-wy) & 2(yz+wx) & 1-2(x^2+y^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & \mathbf{R_Q} & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

可以证明 $\mathbf{R_Q}$ 为正交矩阵,并且 $\mathbf{R_Q}$ 中仅有三个参数是独立的。对于单位四元数,满足 $N(q)=w^2+x^2+y^2+z^2=1$,因此,计算过程只需解算其中三个参数^[3-5]。

此外,四元数在描述三维空间目标的坐标旋转时,不涉及三角函数计算,具有运算速度快、模型表达严密的特点^[4-5]。

基于四元数的旋转矩阵和基于欧拉角的几何旋转矩阵分别用式(2)、式(3)表示:

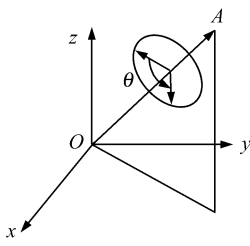


图 1 四元数物理含义(以角度 θ 绕轴旋转)
Fig.1 Quaternion Physical Meaning

单位四元数。根据四元数运算性质,单位四元数的等价矩阵为^[2]:

$$\mathbf{R_Q} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\mathbf{R_E} = \mathbf{R_wR_\varphi R_\kappa} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \tag{3}$$

本质上,对于空间的同一个旋转问题 $\mathbf{R_E}=\mathbf{R_Q}$,根据(2)、式(3)可以进行四元数与欧拉角的相互转换。

2 空间相似变换模型解算

2.1 相似变换模型

设 $[X \ Y \ Z]^T$ 表示地面坐标;
 $[X_0 \ Y_0 \ Z_0]^T$ 表示表示平移量; λ 表示缩放系
数; \mathbf{R} 表示旋转矩阵; $[X_p \ Y_p \ Z_p]^T$ 表示模型坐
标。则三维空间相似变换模型为^[8]:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + \lambda \mathbf{R} \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix} \tag{4}$$

相对定向立体模型可视作刚体,设有 n 个控
制点,模型坐标系、地面坐标系的重心坐标分别表
示为式(5)和式(6);模型点、地面点的重心化坐标
表示为式(7)和式(8):

$$X_{pg} = \frac{\sum X_p}{n}, Y_{pg} = \frac{\sum Y_p}{n}, Z_{pg} = \frac{\sum Z_p}{n} \tag{5}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 - 2(b^2 + c^2) & 2(ab - dc) & 2(ac + db) \\ 2(ab + dc) & 1 - 2(a^2 + c^2) & 2(bc - da) \\ 2(ac - db) & 2(bc + da) & 1 - 2(a^2 + b^2) \end{bmatrix} \tag{11}$$

基于代数旋转矩阵,对重心化的空间相似变
换模型(9)式平差模型推导如下(为了简化省去重
心化坐标表示的上划线):

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \lambda \mathbf{R} \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix} \tag{12}$$

令

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix} \tag{13}$$

式(12)微分关系为:

$$\begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} d\lambda + \lambda \begin{bmatrix} dp \\ dq \\ dr \end{bmatrix} \tag{14}$$

因为 $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{E}$ (单位矩阵),故 $d\mathbf{R}\mathbf{R}^T + \mathbf{R}d\mathbf{R}^T =$
0,可知 $d\mathbf{R}\mathbf{R}^T$ 为反对称矩阵。设有三个独立参数
 $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta = [\delta_1 \ \delta_2 \ \delta_3]^T$,则有^[4]:

$$d\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & \delta_3 & -\delta_2 \\ -\delta_3 & 0 & \delta_1 \\ \delta_2 & -\delta_1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R} \tag{15}$$

对式(11)取微分,并对比式(15)有^[5]:

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} = -2/d \begin{bmatrix} d^2 + a^2 & ab - cd & ac + bd \\ ab + cd & d^2 + b^2 & bc - ad \\ ac - bd & bc + ad & d^2 + c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta b \\ \Delta c \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$X_g = \frac{\sum X}{n}, Y_g = \frac{\sum Y}{n}, Z_g = \frac{\sum Z}{n} \tag{6}$$

$$\bar{X} = X - X_g, \bar{Y} = Y - Y_g, \bar{Z} = Z - Z_g \tag{7}$$

$$\bar{X}_p = X_p - X_{pg}, \bar{Y}_p = Y_p - Y_{pg}, \bar{Z}_p = Z_p - Z_{pg} \tag{8}$$

对(4)式作重心化处理后,重心化的空间相似
变换模型为:

$$\begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} = \lambda \mathbf{R} \begin{bmatrix} \bar{X}_p \\ \bar{Y}_p \\ \bar{Z}_p \end{bmatrix} \tag{9}$$

模型缩放和旋转参数计算之后,平移参数为:

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_g \\ Y_g \\ Z_g \end{bmatrix} - \lambda \mathbf{R} \begin{bmatrix} X_{pg} \\ Y_{pg} \\ Z_{pg} \end{bmatrix} \tag{10}$$

2.2 相似变换平差模型

设单位四元数 $q = [a, \ b, \ c, \ d]$,构造代
数旋转矩阵 \mathbf{R} 如下:

对式(13)微分,将 $d\mathbf{R}$ 用式(15)代替,经进一
步推导可得:

$$\begin{bmatrix} dp \\ dq \\ dr \end{bmatrix} = d\mathbf{R} \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} \tag{17}$$

其中,

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

将式(16)代入式(17)、式(17)代入式(14),
有:

$$\bar{\mathbf{M}} = -2/d\lambda \mathbf{S} \begin{bmatrix} d^2 + a^2 & ab - cd & ac + bd \\ ab + cd & d^2 + b^2 & bc - ad \\ ac - bd & bc + ad & d^2 + c^2 \end{bmatrix} \tag{19}$$

则式(14)变形为:

$$\begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} d\lambda + \bar{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta b \\ \Delta c \end{bmatrix} \tag{20}$$

令 $(X), (Y), (Z)$ 表示近似坐标值,三维空间
相似变换误差方程形式为:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} d\lambda + \bar{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta b \\ \Delta c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (X) \\ (Y) \\ (Z) \end{bmatrix} \tag{21}$$

将式(21)写成矩阵方程为:

$$\underset{3n\times 1}{V}=\underset{3n\times 4}{A}\underset{4\times 1}{x}-\underset{3n\times 1}{L}\underset{3n\times 3n}{P}\quad (22)$$

间接平差方法^[8]解算式(22):

$$x=(A^T P A)^{-1}(A^T P L)\quad (23)$$

由式(22)可知,平差解算的未知数是 $d\lambda$ 、 Δa 、 Δb 、 Δc 。由于采用单位四元数构造旋转矩阵,因此, $\Delta d=-\left(a\Delta a+b\Delta b+c\Delta c\right)/d$ 。

2.3 计算过程

- 1) 数据准备。包括参与解算的所有模型点坐标、相应的地面控制点坐标(3~4 个点)。
- 2) 重心化坐标计算。依据式(5)~式(8)计算模型点、相应的地面控制点重心化坐标。
- 3) 确定平差初始值。四元数 $a^0=b^0=c^0=0,d^0=1;\lambda^0$ 由参加计算的任意两对模型点和相应的地面控制点的距离比简单计算即可。
- 4) 按照式(21)建立误差方程并逐点法化,组成法方程。
- 5) 按照式(23)解算未知数改正数 $d\lambda$ 、 Δa 、 Δb 、 Δc ;更新未知参数 $\lambda=\lambda^0+d\lambda,a=a^0+\Delta a,b=b^0+\Delta b,c=c^0+\Delta c,d=d^0+\Delta d(\Delta d=-\left(a\Delta a+b\Delta b+c\Delta c\right)/d)$ 。
- 6) 重复上述步骤 4)、步骤 5),至未知数改正数小于规定限差($\delta<10^{-6}$),迭代过程结束。
- 7) 按式(10)计算平移参数;将四元数转换为欧拉角,计算完成。

2.4 试验结果

本文用五组模拟数据进行试验。表 1 为控制点模拟坐标;模拟的相似变换 7 参数(视为理论值)中,平移和缩放参数均为 $X_0=358\ 575.811\text{ m},Y_0=63\ 715.782\text{ m},Z_0=214.687\text{ m},\lambda=200$;3 个旋转参数见表 2。依据式(14)严格计算 5 个模型的全部模型点坐标(表 3,精度保留至小数点后 6 位数字)。根据表 1、表 3 模拟数据,按照 § 2.3 进行计算。所有模型取四元数 $a^0=b^0=c^0=0,d^0=1$ 作为初始值,平差解算相似变换参数,表 4 为计算结果。

表 1 控制点模拟坐标(下标 c 表示控制点坐标)

Tab. 1 Analog Control Point Coordinates

点号	X_c/m	Y_c/m	Z_c/m
23	363 321.652	61 167.561	570.484
24	363 402.845	62 061.106	593.802
50	361 776.758	61 196.792	493.196
51	362 043.118	61 996.721	574.623

表 2 相似变换模拟参数(旋转参数)

Tab. 2 Analog Similarity Transformation Parameters

模型号	ω	φ	κ
1	1.5°	0.5°	1°
2	55°	45°	95°
3	-85°	75°	-80°
4	-75°	-89°	125°
5	-89°	-79°	179°

表 3 模型点模拟坐标(下标 p 表示模型点坐标)

Tab. 3 Analog Model Point Coordinates

模型	点号	X_p/m	Y_p/m	Z_p/m
1	23	23.484 787	-13.102 032	2.318 892
	24	23.968 677	-8.640 552	2.322 033
	50	15.767 565	-12.831 318	1.861 365
	51	17.166 439	-8.846 192	2.175 273
2	23	-6.584 774	-8.134 611	24.880 606
	24	-4.183 244	-11.183 124	22.627 122
	50	-6.361 602	-2.913 558	19.177 192
	51	-4.013 592	-6.224 104	17.967 336
3	23	6.008 297	17.474 076	19.675 689
	24	5.009 222	13.381 576	21.222 384
	50	5.250 695	15.467 808	12.243 391
	51	4.692 414	11.973 426	14.570 240
4	23	2.447 444	12.240 456	-23.932 341
	24	0.806 149	8.076 782	-24.262 402
	50	2.837 919	12.081 381	-16.208 330
	51	1.074 393	8.443 648	-17.470 663
5	23	7.910 753	2.139 465	-25.718 056
	24	3.446 328	2.100 143	-25.263 821
	50	9.254 408	1.773 927	-18.108 910
	51	5.062 503	2.038 078	-18.651 833

3 结 语

- 1) 传统的基于几何旋转矩阵的空间相似变换平差算法,在大角度的情况下,必须提供足够精度的未知数初始值,否则,迭代过程可能是发散的。
- 2) 试验中,模型 1 为小角度,无初值迭代 4 次平差收敛;其余模型为大角度,无初值迭代 12 次平差收敛,计算精度均高达 10^{-5} 量级。试验可知,基于四元数的空间相似变换平差解算,尽管没有提供未知数近似初值,平差过程仍能收敛且数值计算精度高。因此,该算法适用于相似变换模型大旋转角的情况。
- 3) 从平差模型的建立、解算过程及计算结果可知,用代数旋转矩阵替代几何旋转矩阵进行空间相似变换平差解算时,无需提供初始值且算法稳健。

表 4 计算结果($\sigma_0=\sqrt{\frac{(\sum v_x^2+\sum v_y^2+\sum v_z^2)}{r}}$)

Tab. 4 Results of Adjustment Calculation

模型	迭代次数	解算的相似变换参数	σ_0/m
1	4	$X_0=358\ 575.811, Y_0=63\ 715.782, Z_0=214.687, \lambda=200.0,$ $\omega=1^{\circ}29'59.997\ 6'', \varphi=0^{\circ}30'00.004\ 0'', \kappa=0^{\circ}59'59.998\ 7''$	0.000 061
2	12	$X_0=358\ 575.811, Y_0=63\ 715.782, Z_0=214.687, \lambda=200.0$ $\omega=54^{\circ}59'59.984\ 3'', \varphi=44^{\circ}59'59.994\ 7'', \kappa=95^{\circ}00'00.011\ 1''$	0.000 044
3	12	$X_0=358\ 575.811, Y_0=63\ 715.782, Z_0=214.687, \lambda=200.0$ $\omega=-84^{\circ}59'59.980\ 7'', \varphi=75^{\circ}00'00.005\ 3'', \kappa=-80^{\circ}00'00.016\ 2''$	0.000 053
4	12	$X_0=358\ 575.811, Y_0=63\ 715.782, Z_0=214.687, \lambda=200.0$ $\omega=-75^{\circ}00'00.064\ 2'', \varphi=-88^{\circ}59'59.982\ 5'', \kappa=124^{\circ}59'59.936\ 0''$	0.000 047
5	12	$X_0=358\ 575.811, Y_0=637\ 15.782, Z_0=214.687, \lambda=200.0$ $\omega=-88^{\circ}59'59.966\ 8'', \varphi=-78^{\circ}59'59.993\ 3'', \kappa=-179^{\circ}00'00.043\ 5''$	0.000 045

参 考 文 献

[1] Glassner A. Graphics Gems[M]. USA: Academic Press,1990

[2] Downs L. Using Quaternions to Represent Rotation [OL]. <http://www.genesis3d.com>, 2009

[3] Pope A. An Advantageous, Alternative Parametrization of Rotations for Analytical Photogrammetry. ESSA Technical Report CaGS39, Rockville, Maryland, USA,2970

[4] Hinsken L. A Singularity Free Algorithm for Spatial Orientation of Bundles[J]. International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing, 1988, 27 (B5): 262-272

[5] Hinsken L, Miller S, Tempelmann U, et al. Triangulation of LH Systems' ADS40 Imagery Using ORIMA GPS/IMU[J]. IAPRSSIS, 2001, 34(B3/A): 156-162

[6] 李德仁,赵双明,陆宇红,等. 机载三线阵传感器影像区域网联合平差[J]. 测绘学报,2007(3):245-250

[7] 李德仁,郑肇葆. 解析摄影测量[M]. 北京:测绘出版社,1992

[8] 武汉大学测绘学院. 误差理论与测量平差基础[M]. 武汉:武汉大学出版社,2003

第一作者简介:赵双明,博士,副教授。主要从事摄影测量与遥感、GIS等方面的教学及科研工作。
E-mail:smzhao2000@126.com

Quaternion-based 3D Similarity Transformation Algorithm

ZHAO Shuangming¹ GUO Qiuyan² LUO Yan³ WU Wei⁴

- (1 School of Remote Sensing and Information Engineering, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)
- (2 Bureau of Surveying and Mapping of Shanxi Province, 334 East Youyi Road, Xi'an 710054, China)
- (3 Bureau of Surveying and Mapping of Heilongjiang Province, 2 Cehui Road, Harbin 150086, China)
- (4 First Surveying and Mapping Institute of Qinghai Province, 13 Yellow River Road, Xining 810001, China)

Abstract: This paper presents solution of 3D space similarity transformation model adjustment algorithm, which is based on quaternion rotation matrix. The algorithm is not required to provide initial value and results can be calculated with high accuracy. Analog data tests have proved that the algorithm is robust. Photogrammetry using quaternion rotation matrix has a very clear superiority.

Key words: quaternion; rotation matrix; 3D similarity transformation; adjustment accuracy

About the first author: ZHAO Shuangming, Ph.D, associate professor. He is engaged in the research and education in Photogrammetry and Remote Sensing, geographic information system development.
E-mail: smzhao2000@126.com