

# 利用 GOCE 卫星轨道反演地球重力场模型

游 为<sup>1</sup> 范东明<sup>1</sup> 贺全兵<sup>1</sup>

(1 西南交通大学地球科学与环境工程学院, 成都市二环路北一段 111 号, 610031)

**摘 要:**根据积分方程法反演地球重力场的数学模型, 利用 GOCE 卫星 2009-11-02~2010-01-02 共 61 d 的精密轨道数据反演了几组地球重力场模型。结果表明, GOCE 卫星轨道能有效提取地球重力场的长波信息, 弥补了 GOCE 卫星重力梯度带宽的限制, 在 106 阶次的大地水准面误差为 ±9.6 cm, 该阶次精度优于 EIGEN-CHAMP03S 及 GRACE 卫星两个月轨道反演地球重力场的精度, 但由于两极空白, 反演的带谐位系数精度偏低。联合 GOCE 及 GRACE 卫星轨道反演的模型在 106 阶次的大地水准面误差为 ±6.9 cm, 弥补了 GOCE 卫星轨道的缺陷。

**关键词:**GOCE 卫星; 积分方程法; 大地水准面; 卫星轨道

**中图分类号:**P223.0

GOCE 卫星的梯度数据有带宽限制, 仅适合反演中短波地球重力场信息, 长波重力场信息需要轨道数据来反演。目前, 利用低轨卫星轨道反演地球重力场的方法主要有动力学积分法<sup>[1]</sup>、加速度法<sup>[2]</sup>、能量守恒法<sup>[3]</sup>、天体力学法<sup>[4]</sup>及积分方程法<sup>[5]</sup>。积分方程法克服了前几种方法的缺点, 适合于反演高精度地球重力场。本文利用 GOCE 卫星 2009-11-02~2010-01-02 时间段共 61 d 的精密轨道数据, 本文采用积分方程法反演了几组地球重力场模型, 并与 CHAMP、GRACE 卫星反演的模型进行了比较。

## 1 GOCE 卫星精密轨道数据预处理

ESA 提供了 GOCE 卫星的几何轨道及约化动力学轨道两种数据<sup>[6]</sup>, 由于几何轨道不包含先验地球重力场信息, 而约化动力学轨道受先验地球重力场的影响, 本文采用几何轨道数据反演地球重力场。由于几何轨道包含粗差, 而约化动力学轨道比较平滑, 一般不含粗差, 可通过两种轨道对比来探测几何轨道的粗差。几何轨道历元间隔约 1 s, 约化动力学轨道间隔为 10 s。先采用基于移动窗口的 9 次多项式<sup>[7]</sup>将约化动力学轨道内插

到几何轨道对应各个历元的数据, 内插精度高于 5 mm, 再分别统计两种轨道在地固系 3 个方向的差值在一天之内的均方根误差(暂不考虑几何轨道粗差), 如图 1 所示, 可知除有 2 d 轨道 Z 方向的均方根误差超过 35 mm, 大部分在 20 mm 以下。取每一天各方向的 3 倍均方根误差为限差, 若该天内某历元在某一方向的误差小于该限差, 说明数据不含粗差, 反之则包含粗差, 应剔除。

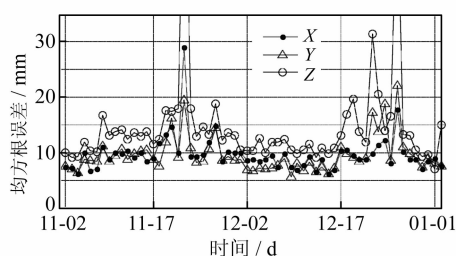


图 1 几何轨道精度统计

Fig. 1 Precision Statistics of Kinematical Orbits

上述轨道数据都是基于地固系建立的, 而积分方程法的观测方程是基于惯性系建立的。不同于 GRACE 卫星观测数据, ESA 提供了各个历元由地固系转化到惯性系的四方位元素( $q_1, q_2, q_3, q_0$ ), 可精确求得旋转矩阵  $\mathbf{R}$ , 因此, 可由式(1)、(2)完成地固系轨道  $\mathbf{X}_{\text{EFRF}}$  与惯性系轨道  $\mathbf{X}_{\text{IRF}}$  的转换<sup>[11,12]</sup>。由于 ESA 所提供的是基于历元间隔 1 s

的四方位元素,而几何轨道的历元包含小数,因

此,要将四方位元素线性内插到几何轨道历元处。

$$\mathbf{X}_{\text{IRF}} = \mathbf{R} \mathbf{X}_{\text{EFRF}} \tag{1}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_0^2 & 2(q_1 q_2 + q_3 q_0) & 2(q_1 q_3 - q_2 q_0) \\ 2(q_1 q_2 - q_3 q_0) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_0^2 & 2(q_2 q_3 + q_1 q_0) \\ 2(q_1 q_3 + q_2 q_0) & 2(q_2 q_3 - q_1 q_0) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_0^2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

## 2 重力场模型解算

在观测方程的建立中,保守力模型包括地球中心引力、非球形引力、日月引力、固体潮、海潮、固体极潮、海洋极潮、相对论效应等<sup>[8]</sup>。GOCE 卫星在沿轨道方向的非保守力可采用无阻力控制系统进行补偿<sup>[6]</sup>,这个系统是通过测量 6 个加速度计在普通模式下的加速度来进行无阻尼控制的。但是,这只是在一个方向的无阻尼控制,并且由于卫星姿态调控、卫星质量中心变化、各加速度计的偏差尺度因子不一致等原因,使得非保守力不能完全补偿掉,仍存在系统性偏差。对于残余部分,本文采用估计加速度计在 3 个方向的偏差参数和 1 周期的振幅参数来求解。因此,非保守力可用下式表示:

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_x + a_{cx} \cos(2\pi ft) + a_{sx} \sin(2\pi ft) \\ b_y + a_{cy} \cos(2\pi ft) + a_{sy} \sin(2\pi ft) \\ b_z + a_{cz} \cos(2\pi ft) + a_{sz} \sin(2\pi ft) \end{bmatrix} \tag{3}$$

其中,  $(f_x, f_y, f_z)$  为加速度计在 3 个方向的非保守力;  $(b_x, b_y, b_z)$  为加速度计在 3 个方向的偏差;  $(a_{cx}, a_{sx}, a_{cy}, a_{sy}, a_{cz}, a_{sz})$  为加速度计在 3 个方向的 6 个振幅参数;  $f$  为 GOCE 卫星旋转运动的频率。需要注意的是,式(3)是基于局部轨道坐标系建立的,因为加速度计的偏差及振幅只有在该坐标系下才表现出一定规律性。由于积分方程法是基于惯性系建立的,需要将式(3)由局部轨道坐标系转换到惯性系,只要已知任意历元的轨道位置及速度,就可直接进行转换。

剔除粗差后的几何轨道存在不同程度的间断,而积分方程法选择 0.5 h 的弧段长度,弧段内数据必须是连续的。对于弧段有间断的数据,选择跳过间断数据,继续选取下一个连续的弧段进行处理。每个弧段解算一组边界轨道改正向量及偏差参数,由于 GOCE 卫星周期约为 1.5 h,故每 3 个弧段解算一组一周期的振幅参数。这样,每个弧段的局部参数有 15 个,全局参数为 90 阶次

的球谐位系数(8 277 个,不包含 0 阶及 1 阶项),误差方程如式(4)所示:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \mathbf{y}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{y}_2 - \mathbf{l} \tag{4}$$

其中,  $\mathbf{v}$  为观测值改正向量;  $\mathbf{x}$  为位系数向量;  $\mathbf{y}_1$  为轨道边界改正及加速度计偏差向量;  $\mathbf{y}_2$  为加速度计振幅参数向量;  $\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$  为各未知参数系数阵;  $\mathbf{l}$  为常数阵。根据式(4)基于最小二乘原理建立方程:

$$\begin{bmatrix} N_{xx} & N_{xy_1} & N_{xy_2} \\ N_{y_1x} & N_{y_1y_1} & N_{y_1y_2} \\ N_{y_2x} & N_{y_2y_1} & N_{y_2y_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_x \\ \mathbf{L}_{y_1} \\ \mathbf{L}_{y_2} \end{bmatrix} \tag{5}$$

其中,  $N_{xx} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$ ;  $N_{xy_1} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{B}_1$ ;  $N_{xy_2} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{B}_2$ ;  $N_{y_1y_1} = \mathbf{B}_1^T \mathbf{P} \mathbf{B}_1$ ;  $N_{y_1y_2} = \mathbf{B}_1^T \mathbf{P} \mathbf{B}_2$ ;  $N_{y_2y_2} = \mathbf{B}_2^T \mathbf{P} \mathbf{B}_2$ ;  $\mathbf{L}_x = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}$ ;  $\mathbf{L}_{y_1} = \mathbf{B}_1^T \mathbf{P} \mathbf{l}$ ;  $\mathbf{L}_{y_2} = \mathbf{B}_2^T \mathbf{P} \mathbf{l}$ ;  $\mathbf{P}$  为权阵。通过消去这两类局部参数,并将各弧段法方程累加,得:

$$\sum_{j=1}^n (N_{xx} - N_{xy_1} N_{y_1y_1}^{-1} N_{y_1x} - \mathbf{H}_4 \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{H}_3) \mathbf{x} = \sum_{j=1}^n (\mathbf{L}_x - N_{xy_1} N_{y_1y_1}^{-1} \mathbf{L}_{y_1} - \mathbf{H}_4 \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{H}_2) \tag{6}$$

其中,  $n$  为总弧段个数;  $\mathbf{H}_1 = \sum_{i=1}^3 (N_{y_2y_2} - N_{y_2y_1} \cdot N_{y_1y_1}^{-1} N_{y_1y_2})$ ;  $\mathbf{H}_2 = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{L}_{y_2} - N_{y_2y_1} N_{y_1y_1}^{-1} \mathbf{L}_{y_1})$ ;  $\mathbf{H}_3 = \sum_{i=1}^3 \mathbf{H}_i^T$ ;  $\mathbf{H}_4 = N_{xy_2} - N_{xy_1} N_{y_1y_1}^{-1} N_{y_1y_2}$ 。若不考虑非保守力振幅参数,则将式(6)中的  $\mathbf{H}_4 \mathbf{H}_1^{-1} \cdot \mathbf{H}_3$  及  $\mathbf{H}_4 \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{H}_2$  两部分去掉,就转化为一般意义下只考虑一类局部参数的法方程。

不需要先验地球重力场模型,通过积分方程法有无梯度改正反演了两组 90 阶次的地球重力场模型 Model 1 及 Model 2,选择 ICGEM 通用的 EIGEN-5C 模型作为参考模型,求得两组模型相对于参考模型的大地水准面误差。同时,采用上述考虑局部参数的策略,加速度计尺度采用 JPL 所提供的参考值,根据积分方程法利用 JPL 所提供的 GRACE-A 卫星 2008-01-01~2008-03-01 时间段 60 d 的精密轨道数据反演了 90 阶次的地球重力场模型 GRACE Orbit Model,与参考模型进行比较;并将 GFZ 利用 CHAMP 卫星轨道反演的 EIGEN-CHAMP03S 模型与参考模型进行比

较。4组模型精度对比如图2所示。由于GOCE卫星轨道低于CHAMP及GRACE卫星轨道, Model 1及Model 2模型总体精度高于EIGEN-CHAMP03S及GRACE Orbit Model模型,但在6阶以前精度低于EIGEN-CHAMP03S模型,19阶以前的精度低于GRACE Orbit Model模型,这说明低轨道数据不适合反演超低阶(19阶以前)位系数。Model 1及Model 2模型精度几乎相同,这说明有无梯度改正对反演的模型结果几乎无影响。这是由于轨道观测值本身精度(约2 cm)有限,单纯力模型积分精度的提高对模型结果起不到实质性作用,但可以肯定对于GRACE卫星间观测数据,力模型梯度改正能提高反演模型的精度<sup>[7]</sup>。Model 1及Model 2模型在80阶以后的截断误差显著增大,说明这61 d的GOCE卫星轨道数据能反演更高阶次的地球重力场模型,为此基于同样的数据采用积分方程法反演了一组110阶次的Model 3模型,并与参考模型进行比较(见图3),可得这61 d的GOCE卫星轨道数据大约能反演到106阶次的球谐位系数,在106阶次的大地水准误差为±9.6 cm,106阶以后的大

地水准面误差超出EIGEN-5C模型的信号,22阶以前的精度仍低于GRACE Orbit Model模型。将Model 3模型与参考模型位系数差值的绝对值取对数(见图4),可得带谐位系数的误差较大,这是由于GOCE卫星轨道没有覆盖到南北两极的范围,两极各6.64°的范围是空白的。由于GRACE卫星轨道具有全球覆盖的特点,为了弥补GOCE卫星轨道的缺陷,将上述GOCE卫星61 d轨道与GRACE卫星60 d轨道数据联合,将两种观测值的法方程等权叠加处理,解算得110阶次的联合处理模型Model 4,并与参考模型进行比较,如图3所示,可得联合处理模型除在二阶项精度稍低于GRACE Orbit Model模型以外,在其他阶次的精度都要高于GOCE及GRACE轨道单独解算的结果,联合模型在106阶次的大地水准面误差为±6.9 cm。将Model 4模型与参考模型位系数差值的绝对值取对数,如图5所示,可得带谐位系数的误差显著降低,106阶以上的位系数精度明显偏低,这说明本文观测数据仅适合反演106阶的地球重力场模型。

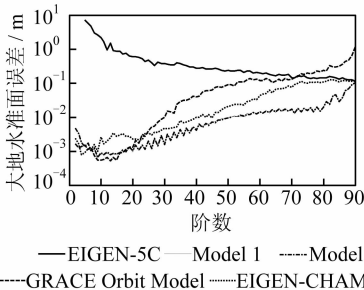


图2 4组模型大地水准面误差比较  
Fig. 2 Comparison of Geoid Errors Among Four Models

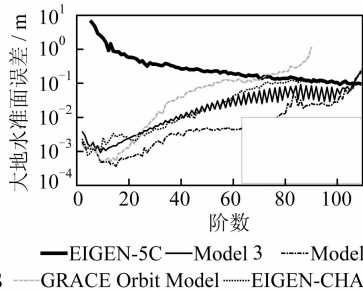


图3 Model 3及Model 4模型大地水准面误差比较  
Fig. 3 Comparison of Geoid Errors Between Model 3 and Model 4

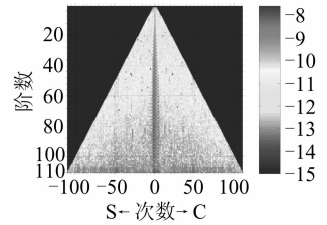


图4 Model 3模型与参考模型的位系数差值  
Fig. 4 Coefficient Differences Between Model 3 and Reference Model

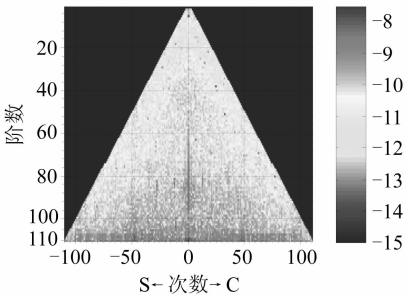


图5 Model 4模型与参考模型的位系数差值  
Fig. 5 Coefficient Differences Between Model 4 and Reference Model

### 3 结 语

- 1) 对于轨道观测数据而言,积分方程法有无梯度改正对反演的模型结果几乎没有影响。
- 2) 除某些低阶位系数以外,利用GOCE卫星轨道反演模型的总体精度高于CHAMP或GRACE卫星轨道反演的模型。
- 3) 利用61 d的GOCE卫星轨道能反演到106阶的地球重力场模型,但带谐位系数精度偏低。通过GOCE与GRACE卫星轨道联合反演的模型在106阶次的大地水准面误差为±6.9 cm,显著提高了低阶位系数及带谐位系数的精

度,弥补了 GOCE 卫星轨道的缺陷。因此,未来在处理 GOCE 卫星梯度数据时,除联合 GOCE 卫星轨道以外,也应联合 GRACE 卫星轨道或星间观测数据,能显著提高反演模型中低阶位系数的精度。

致谢:感谢慕尼黑工业大学易维勇博士多方面的有益指点,感谢 ESA 提供的 GOCE 卫星数据。

### 参 考 文 献

- [1] Förste C, Schmidt R, Stubenvoll R, et al. The GeoForschungsZentrum Potsdam/Groupe de Recherche de Geodesie Spatiale Satellite-only and Combined Gravity Field Models; EIGEN-GL04S1 and EIGEN-GL04C[J]. *Journal of Geodesy*, 2008, 82: 331-346
- [2] 徐天河,杨元喜. 利用 CHAMP 卫星几何法轨道恢复地球重力场模型[J]. *地球物理学报*, 2005, 48(2): 288-293
- [3] Han S C. Efficient Global Gravity Field Determination from Satellite-to-Satellite Tracking[D]. Ohio: School of the Ohio State University, 2003

- [4] Beutler G, Jäggi A, Mervart L, et al. The Celestial Mechanics Approach; Theoretical Foundations[J]. *Journal of Geodesy*, 2010, 84: 605-624
- [5] Mayer-Gürr T. Gravitationsfeldbestimmung Aus Der Analyse Kurzer Bahnboegen am Beispiel der Satellitenmissionen CHAMP und GRACE[D]. Bonn: Institute fuer Theoretische Geodaesi der Universitaet Bonn, 2006
- [6] The European GOCE Gravity Consortium (EGGC). GOCE Level2 Product Data Handbook[R]. GOCE High Level Processing Facility, European, 2008
- [7] 游为,沈云中,范东明,等. 基于卫星轨道扰动理论的重力反演算法[J]. *地球物理学报*, 2010, 53(11): 2 574-2 581
- [8] McCarthy D D, Petit G. IERS Conventions[R]. IERS Technical Note No. 32, Verlag des Bundesamtes für Kartographie und Geodasie, Frankfurt am Main, 2004

第一作者简介:游为,博士生,现主要从事卫星重力测量研究。  
E-mail:1985youwei@163.com

## Recovering Earth's Gravitational Field Model Using GOCE Satellite Orbits

YOU Wei<sup>1</sup> FAN Dongming<sup>1</sup> HE Quanbing<sup>1</sup>

(1 School of Geoscience and Environment Engineering, Southwest Jiaotong University, 111 North 1 Section, Erhuan Road, Chengdu 610031, China)

**Abstract:** Mathematical models of integral equation approach to recover the Earth's gravitational field have been presented. Several gravitational field models have been recovered based on GOCE orbits of 61 days from 2009-11-02 to 2010-01-02. The results show that the long wavelength information of gravitational field can be effectively extracted from GOCE orbits, which complements the band-limitation of GOCE gradiometers. The geoid height error is  $\pm 9.6$  cm with degree and order 106. The precision is higher than that from EIGEN-CHAMP03S and GRACE model from 2 months orbits. But the precision of zonal coefficients is low due to the polar gap. The geoid error of the model which combines the orbits of GOCE and GRACE satellites is  $\pm 6.9$  cm with degree and order 106, which complements the orbital deficiency of GOCE satellite.

**Key words:** GOCE satellite; integral equation approach; geoid; satellite orbits