

文章编号:1671-8860(2009)08-0996-04

文献标志码:A

# 正交 Procrustes 分析及其在旋转矩阵估计中的应用

周拥军<sup>1</sup> 寇新建<sup>1</sup>

(1 上海交通大学船舶海洋与建筑工程学院,上海市东川路800号,200240)

**摘要:**采用正交 Procrustes 分析来估计旋转矩阵,该方法是一种直接解法,只需要将一特征矩阵进行奇异值分解即可,可以用于直接估计旋转矩阵,也可以作为光束法平差的初值。介绍了正交 Procrustes 分析在相对定向的直接解法和绝对定向中的应用,并以一组近景摄影测量数据进行了验证。

**关键词:**正交 Procrustes 分析;摄影测量;定向

中图法分类号:P207;P234

摄影测量解析处理的诸多方法如相对定向、绝对定向、空间后方交会、光束法平差等均需估计旋转矩阵。传统方法用欧拉角表示旋转矩阵,在已知初值的情况下求最小二乘解,但该方法有以下缺点:①需要已知欧拉角的初值,而在很多情况下不易确定;②由于将旋转矩阵转换为欧拉角涉及三角函数的逆运算,造成对应的角值不惟一,容易导致迭代不收敛或错误收敛。Procrustes 分析是一种用最小二乘法直接估计坐标变换的平移和旋转参数的方法,该方法只需将一个特征矩阵进行奇异值分解,既不需要初值,又能极大地简化计算;既可以用于直接估计旋转矩阵,也可以作为高精度光束法平差的初值。20世纪90年代,Arun<sup>[1]</sup>、Umeyama<sup>[2]</sup>等将其用于刚体变换参数的估计中。近年来,有学者将该方法引入摄影测量领域,其中最具代表性的是 Crosilla 等<sup>[3]</sup>将其用于摄影测量的区域网平差中。

Procrustes 问题就是求解一个矩阵  $\mathbf{R}$ ,使得  $\mathbf{AR}$  尽可能地接近  $\mathbf{B}$ ,其中  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  是已知的,即求解以下问题<sup>[4]</sup>:

$$f(\mathbf{R}) = \min_{\mathbf{R}} \|\mathbf{AR} - \mathbf{B}\|_F \quad (1)$$

式中,  $\|\cdot\|_F$  表示 Frobenius 范数。若给矩阵  $\mathbf{R}$  加上约束条件,则式(1)就成了约束条件下的 Procrustes 问题。定义  $\mathbb{R}^{n \times k}$  的正交矩阵集为正交 Stiefel 流形:

$$\mathbf{S} = \{\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times k}, \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}\} \quad (2)$$

若约束条件为  $\mathbf{R} \in \mathbf{S}$ ,则式(1)即为正交约束

下的 Procrustes 问题,给定矩阵  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times k}$ ,其中  $m > k$ ,求标准正交矩阵  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times k}$ ,使它满足如下约束问题的解:

$$f(\mathbf{R}) = \min_{\substack{\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}}} \|\mathbf{AR} - \mathbf{B}\|_F^2 \quad (3)$$

一般而言,  $m \geq n$ 。如果  $m \gg n$ ,可通过 QR 分解降低原问题的规模。为不失一般性,假设矩阵  $\mathbf{R}$  是  $n$  阶方阵,则式(3)可以写成如下形式:

$$\min_{\substack{\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}}} \|\mathbf{AR} - \mathbf{B}\|_F^2, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times k}, n \geq k \quad (4)$$

当  $k = n$  时,式(4)称为均衡 Procrustes 问题;当  $k < n$  时,则称为非均衡 Procrustes 问题。均衡 Procrustes 分析以及相关的广义 Procrustes 分析在测绘领域有着广泛的应用。对于均衡 Procrustes 问题,可通过矩阵  $\mathbf{A}^T \mathbf{B}$  的奇异值分解或极分解得到其显式解。令  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{AR} - \mathbf{B}$ ,则式(4)可写成  $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}) = \min$ ,根据拉格朗日原理构造极值函数:

$$F(\mathbf{R}) = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}) - \text{tr}[\mathbf{K}(\mathbf{R}^T \mathbf{R} - \mathbf{I})] \quad (5)$$

式中,  $\mathbf{K}$  为乘数因子矩阵,是  $3 \times 3$  的对称矩阵,欲求式(5)的极值则函数对矩阵  $\mathbf{R}$  的一阶导数应等于零。由于:

$$\frac{\partial F(\mathbf{R})}{\partial \mathbf{R}} = 2\mathbf{A}^T \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{R}(\mathbf{K} + \mathbf{K}^T) = 2\mathbf{A}^T \mathbf{AR} - 2\mathbf{A}^T \mathbf{B} - \mathbf{R}(\mathbf{K} + \mathbf{K}^T) \quad (6)$$

令  $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{P}$ ,  $\mathbf{A}^T \mathbf{B} = \mathbf{Q}$ ,  $(\mathbf{K} + \mathbf{K}^T)/2 = \mathbf{S}$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{S}$  矩阵为对称矩阵,欲使  $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon})$  取极值,则式(6)应等于零,即

$$\mathbf{PR} - \mathbf{Q} - \mathbf{RS} = 0 \quad (7)$$

将式(7)左乘以  $\mathbf{R}^T$ , 得到:

$$\mathbf{S} = \mathbf{R}^T \mathbf{P} \mathbf{R} - \mathbf{R}^T \mathbf{Q} \quad (8)$$

由于  $\mathbf{R}^T \mathbf{P} \mathbf{R}$  也为对称矩阵, 因此,  $\mathbf{R}^T \mathbf{Q}$  也必为对称矩阵, 即  $\mathbf{R}^T \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \mathbf{R}$ 。将其分别左乘  $\mathbf{R}$ 、右乘  $\mathbf{R}^T$ , 并顾及矩阵  $\mathbf{R}$  的正交性, 分别得到:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{R} \mathbf{Q}^T \mathbf{R} \\ \mathbf{Q}^T &= \mathbf{R}^T \mathbf{Q} \mathbf{R}^T \end{aligned} \quad (9)$$

将式(9)分别左右相乘, 可得到:

$$\mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{R} \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{R}^T \quad (10)$$

将  $\mathbf{Q}$  进行奇异值分解, 得到  $\text{svd}(\mathbf{Q}) = \mathbf{U} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{V}^T$ 。其中,  $\boldsymbol{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$  ( $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r$ ) 称为矩阵  $\mathbf{Q}$  的奇异值(即方阵  $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}$  特征值的算术平方根),  $\mathbf{U}, \mathbf{V}$  为正交矩阵, 满足  $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}$ 。代入式(10)得:

$$\mathbf{U} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{V}^T \mathbf{V} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{U}^T = \mathbf{R} \mathbf{V} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{U}^T \mathbf{U} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{V}^T \mathbf{R}^T \quad (11)$$

从而得到  $\mathbf{R} = \mathbf{U} \mathbf{V}^T$ 。上面的解没考虑特征矩阵  $\mathbf{Q}$  为秩亏和  $\mathbf{U}, \mathbf{V}$  行列式的值可能为  $-1$  的特殊情况。文献[2]对上述结果进行了改进, 得到均衡正交 Procrustes 问题解的统一形式:

$$\mathbf{R} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^T \quad (12)$$

式中,  $\mathbf{D}$  为一对角矩阵, 由下式确定:

$$\mathbf{D} = \begin{cases} \mathbf{I}, \det(\mathbf{Q}) \geq 0, \text{ 或 } \det(\mathbf{U}) \det(\mathbf{V}) = 1 \\ \text{diag}(1, 1, -1), \det(\mathbf{Q}) < 0, \\ \text{或 } \det(\mathbf{U}) \det(\mathbf{V}) = -1 \end{cases}$$

## 1 OPA 在相对定向直接解中的应用

相对定向的目的是恢复构成立体像对的两张像片的相对方位, 建立被摄物体的相似几何模型。相对定向直接解广泛采用相对定向线性变换模型<sup>[5]</sup>, 即先求 8 个线性变换系数, 然后求出基线向量和旋转矩阵。但由于未考虑旋转矩阵的正交性, 从而导致解算出的参数有较大偏离, 影响后续计算。本文用 OPA 方法估计相对定向中的旋转矩阵。设同一空间点在左右影像的像空间坐标分别为  $\mathbf{X}_L = (x_L \ y_L \ z_L)^T$ ,  $\mathbf{X}_R = (x_R \ y_R \ z_R)^T$ , 摄影基线向量为  $\mathbf{b} = (b_x \ b_y \ b_z)^T$ , 右影像空间相对于左影像空间的旋转矩阵为  $\mathbf{R}$ , 根据共面条件, 存在以下关系:

$$\mathbf{b} \cdot (\mathbf{X}_L \times \mathbf{R} \mathbf{X}_R) = 0 \quad (13)$$

上式可写成  $\mathbf{X}_L^T \mathbf{E} \mathbf{X}_R = 0$ , 其中,

$$\mathbf{E} = \mathbf{b} \times \mathbf{R} = \mathbf{B} \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -b_z & b_y \\ b_z & 0 & -b_x \\ -b_y & b_x & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R} \quad (14)$$

式中, 矩阵  $\mathbf{B}$  是由基线向量组成的反对称矩阵, 在计算机视觉领域  $\mathbf{E}$  称为本质矩阵<sup>[6]</sup>(essential ma-

trix)。若能先估计  $\mathbf{E}$ , 则可以分解出摄影基线向量和旋转矩阵。这里先根据旋转矩阵的正交约束条件求解基线向量, 然后再根据 OPA 方法得到旋转矩阵。将式(14)左右两边转置并与其分别相乘, 得到:

$$\mathbf{B} \mathbf{B}^T = \mathbf{E} \mathbf{E}^T \quad (15)$$

展开后得:

$$\begin{cases} E_{11}^2 + E_{12}^2 + E_{13}^2 = b_y^2 + b_z^2 \\ E_{21}^2 + E_{22}^2 + E_{23}^2 = b_x^2 + b_z^2 \\ E_{31}^2 + E_{32}^2 + E_{33}^2 = b_x^2 + b_y^2 \\ E_{11} E_{21} + E_{12} E_{22} + E_{13} E_{23} = -b_x b_y \\ E_{11} E_{31} + E_{12} E_{32} + E_{13} E_{33} = -b_x b_z \\ E_{21} E_{31} + E_{22} E_{32} + E_{23} E_{33} = -b_y b_z \end{cases} \quad (16)$$

通过上式中的前三式可以解出:

$$b_x^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 E_{ij}^2 - (E_{11}^2 + E_{12}^2 + E_{13}^2) \quad (17)$$

$b_x$  开方后有两个根, 分别对应摄影基线  $\mathbf{b}$  和  $-\mathbf{b}$ 。求出基线向量后, 可根据式(4)的 OPA 算法得到旋转矩阵。将矩阵  $\mathbf{Q} = \mathbf{B}^T \mathbf{E}$  进行奇异值分解可分别得到矩阵  $\mathbf{R}_1$  和  $\mathbf{R}_2$ , 因此, 存在四组可行解:  $(\mathbf{b}, \mathbf{R}_1)$ 、 $(\mathbf{b}, -\mathbf{R}_1)$ 、 $(-\mathbf{b}, \mathbf{R}_2)$ 、 $(-\mathbf{b}, -\mathbf{R}_2)$ 。其几何意义如图 1 所示, 可根据文献[7]的方法确定惟一解。基于 OPA 的相对定向解算过程如下。

- 1) 估计本质矩阵  $\mathbf{E}$ ;
- 2) 根据式(15)计算基线向量  $\mathbf{b}$ ;
- 3) 将  $\mathbf{B}^T \mathbf{E}$  进行 SVD 分解, 得到旋转矩阵  $\mathbf{R}$ ;
- 4) 根据成像约束条件确定  $\mathbf{b}, \mathbf{R}$  的惟一解。

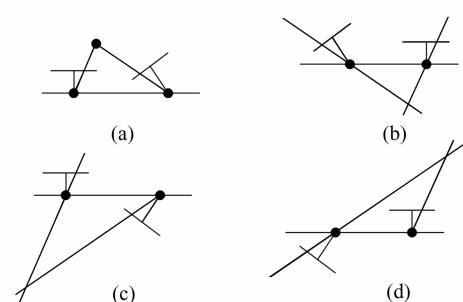


图 1 相对定向数值可行解对应的几何构形

Fig. 1 Geometry Configuration Corresponding to the Applicable Solutions

## 2 OPA 在绝对定向中的应用

摄影测量的绝对定向实际上是空间相似变换。设点  $i$  在自由模型坐标系和物方空间坐标系中的坐标值分别为  $(u_i, v_i, w_i)$ 、 $(x_i, y_i, z_i)$ , 则绝对定向的函数模型可表示为:

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} \quad (18)$$

式中,  $\lambda$  表示尺度参数;  $r_{ij}$  表示旋转矩阵  $\mathbf{R}$  的分量;  $(t_x, t_y, t_z)$  表示坐标原点的平移分量, 令  $\mathbf{Y}_i = (x_i \ y_i \ z_i)^T$ ,  $\mathbf{X}_i = (u_i \ v_i \ w_i)^T$ ,  $\mathbf{T} = (t_x \ t_y \ t_z)^T$ , 将式(18)写成矩阵形式:

$$\mathbf{Y}_i = \lambda \mathbf{R} \mathbf{X}_i + \mathbf{T} \quad (19)$$

当有  $n(n \geq 3)$  对公共点时, 空间相似变换参数的估计问题就是在最小二乘准则下求解估计尺度参数  $\lambda$ 、旋转矩阵  $\mathbf{R}$  和平移向量  $\mathbf{T}$ 。先将坐标重心化, 得到:

$$\mathbf{Y}'_i = \lambda \mathbf{R} \mathbf{X}'_i \quad (20)$$

其中,

$$\mathbf{Y}'_i = \mathbf{Y}_i - \frac{\sum_{k=1}^n \mathbf{Y}_k}{n}, \mathbf{X}'_i = \mathbf{X}_i - \frac{\sum_{k=1}^n \mathbf{X}_k}{n}$$

绝对定向问题就是在满足旋转矩阵正交的约束条件下求极值, 即

$$\arg\min_{\lambda, R} \sum_{i=1}^n [(\mathbf{Y}'_i - \lambda \mathbf{R} \mathbf{X}'_i)^T (\mathbf{Y}'_i - \lambda \mathbf{R} \mathbf{X}'_i)] \quad (21)$$

尺度参数由下式确定<sup>[8]</sup>:

$$\lambda = \sqrt{\sum_{i=1}^n \|\mathbf{Y}'_i\|^2 / \sum_{i=1}^n \|\mathbf{X}'_i\|^2} \quad (22)$$

解算出  $\lambda$  后, 式(21)的最小二乘解算问题等价于式(4)的均衡 Procrustes 问题, 此时将所有的重心化后的模型点坐标写成:

$$\mathbf{Y}' = \begin{bmatrix} x'_1 & y'_1 & z'_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x'_n & y'_n & z'_n \end{bmatrix}, \mathbf{X}' = \begin{bmatrix} u'_1 & v'_1 & w'_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u'_n & v'_n & w'_n \end{bmatrix} \quad (23)$$

按 Procrustes 问题的解算原理, 得到  $\mathbf{Q} = \lambda \mathbf{Y}'^T \mathbf{X}'$ , 并进行 SVD 分解, 即可解求旋转矩阵, 然后再求解平移向量。基于 OPA 的绝对定向解算过程如下。

- 1) 将模型点的两套坐标重心化;
- 2) 根据式(22)计算尺度参数;
- 3) 计算特征矩阵  $\mathbf{Q}$  并对其进行 SVD 分解得到旋转矩阵  $\mathbf{R}$ ;

#### 4) 计算平移参数

$$\mathbf{T} = \sum_{k=1}^n \mathbf{Y}_k / n - \lambda \mathbf{R} \sum_{k=1}^n \mathbf{X}_k / n$$

### 3 算例及分析

算例采用某近景摄影测量工程数据。该影像采用分辨率为 1 536 像素  $\times$  1 024 像素的 Kodak DCS 260 相机拍摄。拍摄过程中保持相机的内方位元素不变, 共拍摄 18 张像片, 并布设了若干控制点和检测点。经光束法平差得到相机的内方位元素为:  $f = 1703.489$  像素,  $u_0 = 764.821$  像素,  $v_0 = 509.368$  像素, 定向过程中不考虑镜头畸变, 选用其中的一个立体像对, 像点坐标和物方坐标值如表 1 所示。

表 1 控制点的量测坐标及物方坐标

Tab. 1 Image and Object Coordinates for

Control Points

点名	影像 1/像素		影像 2/像素		物方坐标/m		
	$u$	$v$	$u$	$v$	X	Y	Z
G03	340.1	329.9	897.1	292.3	-0.227	-0.001	3.884
G04	197.4	299.1	664.9	287.3	-2.954	-0.004	3.873
G16	510.6	447.3	1009.6	396.8	0.062	-1.745	2.615
G17	416.4	370.4	954.4	325.1	0.065	-0.712	3.454
G18	632.9	394.4	1079.6	335.8	-0.003	-3.087	3.094
G20	762.6	216.4	1139.6	126.6	-0.327	-4.537	4.743
G22	956.4	617.1	1328.4	587.9	0.003	-6.271	0.827
G24	1091.3	517.3	1455.7	461.3	0.002	-7.575	1.756
G27	428.4	200.9	681.1	184.6	-3.786	-2.599	4.416
G28	538.6	250.4	930.7	200.6	-1.279	-2.591	4.395

计算时先根据相机的内方位元素计算出像平面坐标, 然后分别利用传统方法、直接相对线性变换方法(RLT)以及本文方法完成相对定向, 所有的点均参加计算, 表 2 为计算结果。计算表明, 本文方法与传统方法的结果更为接近, 主要的原因是求解本质矩阵和求解相对线性变换系数本质上是一致的, 但在通过相对变换参数求解基线向量和旋转矩阵时, RLT 方法未考虑旋转参数间的相关性, 而基于 OPA 的结果是从旋转矩阵的正交约束条件出发推导出来的, 因此, 更接近于经典的严密平差结果。

表 2 相对定向结果

Tab. 2 Relative Orientation Results

估计方法	基线向量			Euler 角/°		
	$B_x$	$B_y$	$B_z$	Phi	Omiga	Kappa
传统方法	1.000 0	-0.005 6	0.497 2	49.467 0	-1.606 6	1.451 0
OPA 方法	1.000 0	-0.005 6	0.500 3	48.645 9	-0.819 3	1.259 1
RLT 法	1.0000	-0.021 9	0.406 3	42.319 3	-1.719 1	-0.435 8

根据传统相对定向的方法结果,先以 G04、G08、G22、G28 4 个控制点完成绝对定向和以所有的 10 个点完成绝对定向得到的计算结果如表 3。计算结果表明,本文方法与传统解算方法的计

算结果几乎完全相等,仅差  $10^{-6}$  数量级的计算方法误差。同时,本文方法既不需要初值也不需要迭代,只需要对一个  $3 \times 3$  的矩阵进行 SVD 分解,因而计算速度更快。

表 3 绝对定向结果

Tab. 3 Absolute Orientation Results

控制点数量	估计方法	尺度参数	平移向量			Euler 角 /°		
			$t_x$	$t_y$	$t_z$	Phi	Omiga	Kappa
四点定向	传统方法	0.111 4	-0.467 7	0.227 5	1.998 1	43.564 8	87.942 5	31.026 7
	OPA 方法	0.111 4	-0.467 7	0.227 5	1.998 1	43.564 8	87.942 5	31.026 7
十点定向	传统方法	0.113 3	-0.475 0	0.228 3	2.014 1	43.532 6	88.854 1	32.193 1
	OPA 方法	0.113 3	-0.475 0	0.228 3	2.014 1	43.532 6	88.854 1	32.193 1

## 参 考 文 献

- [1] Arun K, Huang T, Blostein S. Least-squares Fitting of Two 3-D Point Sets[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1987, 9(5):698-700
- [2] Umeyama S. Least-squares Estimation of Transformation Parameters Between Two Point Pattern[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1991, 13(4):376-380
- [3] Crosilla F, Beinat A. Use of Generalized Procrustes Analysis for the Photogrammetric Block Adjustment by Independent Models[J]. ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing, 2002, 56(3):195-209
- [4] 杜克勤. Procrustes 问题的若干研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2005
- [5] 张祖勋, 张剑清. 数字摄影测量[M]. 武汉: 武汉测绘科技大学出版社, 1997
- [6] 马颂德, 张正友. 计算机视觉——计算理论与算法基础[M]. 北京: 科学出版社, 1998
- [7] Pan H P. A Direct Closed-form Solution to General Relative Orientation of Two Stereo Views[J]. Digital Signal Processing, 1999, 9(27):195-221
- [8] Horn B K P, Hilden H M, Negahdaripour S. Closed-form Solution of Absolute Orientation Using Orthonormal Matrices[J]. Journal of the Optical Society of America, 1988, 5(7):1 127-1 135

第一作者简介: 周拥军, 博士, 讲师, 现从事未检校相机的数字近景摄影测量理论及 3S 技术在土木工程中的应用研究。

E-mail: yjzhou@sjtu.edu.cn

## Orthogonal Procrustes Analysis and Its Application on Rotation Matrix Estimation

ZHOU Yongjun<sup>1</sup> KOU Xinjian<sup>1</sup>

(1 School of Naval Architecture, Ocean and Civil Engineering, Shanghai Jiaotong University, 800 Dongchuan Road, Shanghai 200240, China)

**Abstract:** Rotation matrix estimation is a basic problem in photogrammetry field. Traditional approaches are the least square solution with prior initial values, whereas the initial values are hard to be obtained in some cases. Furthermore, the bad initial values are apt to lead wrong convergence in iterations. The orthogonal procrustes analysis (OPA) is applied for rotation matrix estimation in photogrammetry. OPA is a direct solution in parameters estimation, which needs to Singular Value Decompose (SVD) of a matrix. The solution could be used as either rotation matrix estimation or the initial values for bundle adjustment. OPA is applied for direct relative orientation and absolute orientation in this paper. The results of a close-range photogrammetry case are given to verify it.

**Key words:** orthogonal procrustes analysis; photogrammetry; orientation