

附有系统参数和附加约束条件的 GPS 城市沉降监测网数据处理方法研究

张 勤¹ 黄观文¹ 王 利¹ 丁晓光¹

(1 长安大学地测学院,西安市雁塔路 126 号,710054)

摘 要:在城市地面沉降监测方面,为获取 mm 级垂向形变,仍存在诸如垂向误差削弱、基准选取、系统参数对高程形变影响等多项提高精度和可靠性的技术难题。分析了不同基准模型用于形变监测的作用和特征,推导了系统参数对平差结果的影响公式。通过对西安地区布设的 GPS 地面沉降和地裂缝监测网进行附加系统参数和附有约束条件的网平差进行计算,比较了不同平差方案的结果,得出了有参考价值的结果。

关键词:系统参数;秩亏自由网平差;沉降监测

中图法分类号:P207.2; P228.41

随着 GPS 技术的不断成熟和完善,其平面精度可达±1~3 mm,而高程精度一般是平面精度的 1/2~1/3^[1]。目前,GPS 被广泛应用于二维坐标测量和平面监测方面^[2]。随着我国地面沉降和地裂缝等地质灾害的加重,许多城市都利用 GPS 技术进行垂直形变监测,如西安、北京、上海、天津等^[3,4]。通常,GPS 监测网的数据处理在利用精密解算软件(如 GAMIT、Bernese、GIPSY 等)获得高精度 GPS 基线向量及其协因数后,为了获取正确的变形信息,必须进行 GPS 基线网平差,以合理削弱粗差、系统误差和配赋偶然误差等,将监测网置于合适的监测基准框架下。考虑到不同时期的 GPS 尺度基准与方位基准间存在系统误差,有的软件也提供了系统参数来消除这种系统偏差。针对这些问题,本文分析了不同平差基准模型对变形监测网的作用、特点及适用性,并以西安地区的 GPS 沉降监测网为例进行了分析,得出了有参考价值的结果。

1 GPS 基线网平差模型

1.1 基线平差数学模型^[1,5-7]

设第 m 期 GPS 网中含有 t 个监测点、 n 条基线,则线性化后的误差方程组为:

$$\underset{3n \times 1}{V(m)} = \underset{3n \times 3t}{A_x} \cdot \underset{3t \times 1}{d\hat{X}(m)} + \underset{3n \times 4}{A_\beta} \cdot \underset{4 \times 1}{\hat{\beta}(m)} - \underset{3n \times 1}{L(m)} \tag{1}$$

式中, $d\hat{X}(m)$ 为未知点待定参数; $\hat{\beta}(m)$ 为系统参数; A_x 、 A_β 为参数 $d\hat{X}(m)$ 和 $\hat{\beta}(m)$ 对应的系数矩阵; $L(m)$ 为观测向量。具体形式可参见文献[1, 6, 7]。

式(1)对应的随机模型为:

$$\underset{3n \times 3n}{P} = Q^{-1} \tag{2}$$

对于协因数阵 Q 有两种求法:一种是认为任一条基线间都是独立的,直接采用单个基线间的自协方差作为 Q 的对角元素,构成协因数阵;另外一种考虑是考虑基线间的相关性。一些高精度基线解算软件如 GAMIT 等会同时提供点位相关系数阵,为此,也可以通过协因数传播律求出基线的协因数。但第二种方法必须考虑选取独立基线组成观测方程。

1.2 网平差基准模型

由分析可知,式(1)所提供的 GPS 基线平差数学模型属于带有系统参数的秩亏模型,因为 $R(A_x)=3t-3$, $R(A_\beta)=4$, $R(A_x \ A_\beta)=3t-7$ 。为求其惟一解,同时也为了将 GPS 监测网置于一定的坐标框架内,选取一定的基准条件:

$$G_x^T d\hat{X} + G_\beta^T \hat{\beta} + W = 0 \tag{3}$$

式中,系数矩阵 G_X^T, G_P^T, W 参见文献[8,9]。

1.2.1 带有系统参数的重心基准

当 GPS 监测网中没有已知点或稳定点,即监测点均在变形区域内,可采用重心基准,使得全部未知参数的范数最小^[5]:

$$d\hat{X}^T d\hat{X} + \hat{\beta}^T \hat{\beta} = \min \tag{4}$$

三个位置基准为:

$$\sum_1^m d\hat{x}_i = 0, \sum_1^m d\hat{y}_i = 0, \sum_1^m d\hat{z}_i = 0 \tag{5}$$

一个尺度基准为:

$$\sum_1^m S_{ig}^{0^2} \cdot \delta \hat{\mu} - \sum_1^m (x_{ig}^0 d\hat{x}_i + y_{ig}^0 d\hat{y}_i + z_{ig}^0 d\hat{z}_i) = 0 \tag{6}$$

三个方位基准为:

$$\begin{cases} \sum_1^m (-z_{ig}^0 d\hat{y}_i + y_{ig}^0 d\hat{z}_i) + \sum_1^m S_{igx}^{0^2} \cdot \hat{\epsilon}_x = 0 \\ \sum_1^m (z_{ig}^0 d\hat{x}_i - x_{ig}^0 d\hat{z}_i) + \sum_1^m S_{igy}^{0^2} \cdot \hat{\epsilon}_y = 0 \\ \sum_1^m (-y_{ig}^0 d\hat{x}_i + x_{ig}^0 d\hat{y}_i) + \sum_1^m S_{igz}^{0^2} \cdot \hat{\epsilon}_z = 0 \end{cases} \tag{7}$$

重心基准是以网中所有点的近似坐标的重心为基准,也就是监测网的平均基准在各期间保持不变。因此,在网中没有已知点,且变形体具有均匀变形的特点,可采用重心基准。当监测网缺少约束条件时,重心基准能够较为客观地反映监测网的整体变形情况;但重心基准对监测网的整体稳定性依赖较大,如果监测网各点变化不一致,采用重心基准会导致变形结果失真。

1.2.2 带有系统参数的固定基准

当 GPS 网中含有已知稳定点或已知基线、已知方位时,可以采用固定基准。分以下三种情况进行讨论:① GPS 网中含有已知点,附加点位约束条件为:

$$dX_i = 0, dY_i = 0, dZ_i = 0 \tag{8}$$

② GPS 网含有已知边,附加尺度约束条件为:

$$\begin{aligned} &((X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + \\ &(Z_j - Z_i)^2)^{1/2} - S_{ij} = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

③ GPS 网含有已知方位,附加方位约束条件为:

$$\arctan \frac{(Z_k - Z_i)}{((X_k - X_i)^2 + (Y_k - Y_i)^2)^{1/2}} - \alpha_{ik} = 0 \tag{10}$$

固定基准是以网中的已知点、已知尺度或已知方位作为强约束条件建立基准方程的。对于 GPS 变形监测网,当基准条件数少于 7 个时(含一个尺度、三个方位),网为秩亏(如 2 个已知点);

当基准条件数大于 7 个时(如 3 个已知点),则存在多余基准。采用固定基准框架,要求各已知条件之间必须具有很好的一致性,这除了要求各点的尺度、方位、精度一致外,还要求各基准点具有很好的一致稳定性。否则,不一致或不稳定的基准框架将导致网的平差结果扭曲变形,从而导致所获取的变形监测结果失真。

1.2.3 带有系统参数的拟稳基准

当 GPS 网中含有 3 个或以上稳定点时,可以采用这些稳定点组成拟稳基准。其基准条件同前,但 G_X^T 阵中非拟稳点对应的元素均为零, G_P^T, W 阵不变。

拟稳基准是以稳定点的重心为基准,而不是强制符合到这些点上,所以,稳定点存在小的变形或不一致不会对变形结果产生大的影响。事实上,绝对的或不一致或稳定是不存在的,因此, GPS 变形网宜采用拟稳基准。

1.2.4 其他情况

当 GPS 网中所含的已知点(或稳定点)少于 3 个时,分以下三种情况进行讨论:① 当监测网中没有已知点或稳定点时,基准模型为重心基准,具体形式同前。② 当监测网中只有一个已知点或稳定点时,固定位置,全网的重心提供方位和尺度。③ 当监测网中有两个已知点或稳定点时,固定位置和方位,全网的重心提供尺度。

另外,如果不加系统参数,即观测方程中 $A_P^T = 0$,基准模型中 $G_P^T = 0$,此时的基准模型如下:

$$G_X^T d\hat{X} + W = 0 \tag{11}$$

2 附加系统参数的秩亏自由网平差

由以上分析可以看出,带有系统参数的约束基准是一种概括基准,当对广义 Gauss-Marcov 模型进行最小二乘约束时,可得法方程:

$$N_{bb} \begin{bmatrix} d\hat{X} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_X^T \\ A_P^T \end{bmatrix} PL = 0 \tag{12}$$

其中,

$$N_{bb} = \begin{bmatrix} A_X^T P A_X & A_X^T P A_P \\ A_P^T P A_X & A_P^T P A_P \end{bmatrix}, R(N_{bb}) = 3t - 7 \tag{13}$$

约束条件(3)可重写为:

$$\begin{bmatrix} G_X G_X^T & G_X G_P^T \\ G_P G_X^T & G_P G_P^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\hat{X} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_X W \\ G_P W \end{bmatrix} = 0 \tag{14}$$

令

$$N_{cc} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} = N_{bb} + \begin{bmatrix} G_X G_X^T & G_X G_P^T \\ G_P G_X^T & G_P G_P^T \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_x^T \mathbf{P} \mathbf{A}_x + \mathbf{G}_x \mathbf{G}_x^T & \mathbf{A}_x^T \mathbf{P} \mathbf{A}_\beta + \mathbf{G}_x \mathbf{G}_\beta^T \\ \mathbf{A}_\beta^T \mathbf{P} \mathbf{A}_x + \mathbf{G}_\beta \mathbf{G}_x^T & \mathbf{A}_\beta^T \mathbf{P} \mathbf{A}_\beta + \mathbf{G}_\beta \mathbf{G}_\beta^T \end{bmatrix}$$

(15)

则有：

$$R(N_\alpha) = 3t + 4, R(N_{11}) = 3t, R(N_{22}) = 4$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_x^T \\ \mathbf{A}_\beta^T \end{bmatrix} \mathbf{P}_x \mathbf{L} - \begin{bmatrix} \mathbf{G}_x \mathbf{W} \\ \mathbf{G}_\beta^T \mathbf{W} \end{bmatrix}$$

(16)

因此可得：

$$[\mathbf{d}\hat{\mathbf{x}} \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}]^T = \mathbf{N}_\alpha^{-1} \mathbf{U}$$

(17)

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{d}\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\beta}}} = \mathbf{N}_\alpha^{-1}$$

(18)

平差后求出的系统参数必须通过统计假设检验,以判断其是否显著,如不显著,这些参数的存在会影响平差系统的性态,应予以剔除。对于系统参数的显著性检验,一般采用 t 检验法^[7]进行。

3 系统参数对坐标估值的影响

由式(17)可得：

$$[\mathbf{d}\hat{\mathbf{x}} \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}]^T =$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11}^{-1} + \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{N}_{12} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{N}_{21} \mathbf{N}_{11}^{-1} & -\mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{N}_{12} \mathbf{M}^{-1} \\ -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{N}_{21} \mathbf{N}_{11}^{-1} & \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{U}$$

(19)

其中, $\mathbf{M} = \mathbf{N}_{22} - \mathbf{N}_{21} \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{N}_{12}$ 。当无系统参数 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 时,则有 $\mathbf{d}\hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{U}_1$;当有系统参数时, $\mathbf{d}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{d}\hat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{N}_{12} \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{U}_2 - \mathbf{N}_{21} \mathbf{d}\hat{\mathbf{x}}_1)$, $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{U}_2 - \mathbf{N}_{21} \mathbf{d}\hat{\mathbf{x}}_1)$, $\Delta \mathbf{d}\mathbf{x}_1 = \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{N}_{12} \hat{\boldsymbol{\beta}}$ 。将其转换为地理坐标增量为：

$$[\delta B \quad \delta L \quad \delta H]^T = \mathbf{R} \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{N}_{12} \hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{R} \Delta \mathbf{d}\mathbf{x}_1$$

(20)

其中，

$$\mathbf{R} =$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{\rho \sin B_i \cos L_i}{M_i + H_i} & -\frac{\rho \sin B_i \sin L_i}{M_i + H_i} & \frac{\rho \cos B_i}{M_i + H_i} \\ -\frac{\rho \sin L_i}{(N_i + H_i) \cos B_i} & \frac{\rho \cos L_i}{(N_i + H_i) \sin B_i} & 0 \\ \cos B_i \cos L_i & \cos B_i \sin L_i & \sin B_i \end{bmatrix}$$

由式(20)可以得到系统参数对求解坐标估值的影响。

4 算例分析

本文算例数据来源于西安 GPS 地面沉降和地裂缝监测网工程,该监测网共布施了 20 个测量点。数据处理中,引进了三个连续跟踪站 XIAA、XANY、BJFS 作为已知点。基线解算采用 GAMIT 软件处理。

分别对监测网两期的观测数据进行数据处理,时间间隔为 1 a,选择相同的基准和初始坐标,采用以下 4 种方案进行分析对比:① 固定三个已知点,进行不带系统参数的 GPS 网平差;② 固定三个已知点,进行附加系统参数的 GPS 网平差,同时检验系统参数的显著性;③ 三个已知点组成拟稳基准,进行不带系统参数的 GPS 网平差;④ 三个已知点组成拟稳基准,进行附加系统参数的 GPS 网平差,同时检验系统参数的显著性。其结果如表 1、表 2、表 3 所示。

表 1 4 种不同方案监测点沉降结果对比/mm
Tab. 1 Settlement Results Comparison of Four Different Schemes/mm

点名	方案①	方案②	方案③	方案④	点名	方案①	方案②	方案③	方案④
XJ01	-7.2	-7.4	-7.3	-7.7	XJA1	-86.4	-81.5	-86.4	-81.5
XJ02	-43.8	-45.2	-43.8	-45.5	XJA2	-10.3	-4.4	-10.3	-4.5
XJ03	-19.1	-19.6	-19.0	-19.9	XJA3	-15.7	-18.5	-15.7	-18.9
XJ04	1.8	4.7	1.7	4.5	XJA4	-14.0	-14.7	-14.0	-15.0
XJ06	-28.0	-28.6	-28.0	-28.9	XJA5	-4.2	-4.9	-4.2	-4.9
XJ13	-4.1	0.5	-4.1	0.4	XJA6	-6.9	-7.4	-7.0	-7.8
XJ14	-0.6	1.5	-0.6	1.3					

表 2 方案②、④的第二期系统参数显著性
检验结果(α=0.05)

Tab. 2 Significance Examination Results of
Schemes ② and ④(α=0.05)

	$\delta u/10^{-8}$	ϵ_x	ϵ_y	ϵ_z	显著性检验
方案②	-1.51	-0.079	-0.084	0.056	参数显著
方案④	0.75	-0.019	-0.012	-0.019	参数显著

分析表 1 可以看出,方案①和方案③的沉降结果差异较小,最大的沉降量差异仅为 0.1 mm;方案②和方案④的沉降结果差异也较小,最大的沉降量差异为 0.4 mm。这说明三个已知点 XIAA、XANY、BJFS 的初始坐标准确,且没有发

生相对变形,也说明三个已知点作为连续跟踪站,其地质条件相对稳定。同时证明,当已知点十分稳定时,固定基准和拟稳基准是近似等价的。

比较表 1、表 2 可以得出,在系统参数显著 的情况下,附加系统参数的固定基准平差后得到的沉降量与不加系统参数的平差结果存在一定的差异,其沉降量差异最大的点为 XJA2,差值达到了 5.9 mm。同样,对于拟稳基准,附加系统参数得到的平差结果与不加系统参数相比较,其沉降量差异最大的点也为 XJA2,差值达到了 5.8 mm。对于高精度 GPS 沉降监测而言,这样的差异是不容忽视的。

表 3 四种方案中各点高程解算的中误差比较/ $\pm 1\text{ mm}$
Tab. 3 Comparison of Each Point's Height RMS of Four Schemes/ $\pm 1\text{ mm}$

点名	方案①	方案②	方案③	方案④	点名	方案①	方案②	方案③	方案④
XJ01	3.0	1.5	2.9	2.1	XJA1	3.5	1.7	3.3	2.4
XJ02	4.1	2.1	3.8	2.8	XJA2	6.6	3.3	6.2	4.6
XJ03	3.3	1.7	3.1	2.3	XJA3	2.6	1.4	2.5	1.9
XJ04	2.4	1.2	2.4	1.8	XJA4	3.2	1.6	3.2	2.3
XJ06	2.9	1.5	2.8	2.1	XJA5	3.6	1.8	3.3	2.5
XJ13	2.8	1.4	2.8	2.0	XJA6	2.3	1.2	2.2	1.7
XJ14	3.1	1.6	2.8	2.1					
平均中误差	3.3	1.7	3.2	2.4					

分析表 3 可以看出,方案②和方案④的高程解算中误差要优于方案①和方案③。这说明系统参数显著的条件下,附加系统参数的平差方法解算的精度要优于不加系统参数进行平差解算的精度。

5 结 语

高精度 GPS 沉降监测网平差中,考虑到基准点的稳定性,宜采用附加系统参数的拟稳平差方法,但所加的系统参数需通过参数显著性检验。建议网平差之前,对已知点或稳定点的精确性、有效性进行检验,避免选择不合适的基准和平差模型而导致解算结果出现偏差。

参 考 文 献

[1] 张勤,李家权. GPS 测量原理及应用[M]. 北京: 科学出版社,2005
[2] 张晓亮,江在森,王敏,等. 利用 GPS 连续站资料研究地壳运动与地震的关系[J]. 大地测量与地球动力学,2006,26(4): 63-68

[3] 胡建国,成英燕,丁继新,等. 我国高精度 GPS 陆海垂直运动监测网的建立与精度分析[J]. 测绘学报,2000,29(4):289-292
[4] 杨建图,姜衍祥,周俊,等. GPS 测量地面沉降的可靠性及精度分析[J]. 大地测量与地球动力学,2006,26(1):70-75
[5] 陶本藻. 自由网平差与变形分析[M]. 武汉:武汉测绘科技大学出版社,2001
[6] 施闯. 大规模高精度 GPS 网平差与分析理论及其应用[M]. 北京: 测绘出版社,2002
[7] 隋立芬. 高精度 GPS 网的统一与数据处理若干问题研究[D]. 郑州: 信息工程大学,2001
[8] 刘大杰,施一民,余晓红. GPS 技术用于监测大城市三维形变[J]. 同济大学学报,1997,25(2):176-180
[9] 刘大杰,陶本藻. GPS 监测网形变分析基准和检验: GPS 卫星定位的应用与数据处理[M]. 上海: 同济大学出版社,1994: 92-102

第一作者简介:张勤,教授,博士生导师。主要从事动态大地测量与灾害、环境监测的理论与方法、GPS 与 InSAR 融合、现代数据处理理论与方法等方面的教学与科研工作。
E-mail:dczhangq@chd. edu. cn

Datum Design Study of GPS Height Monitoring Network
with Systematic Parameters and Constraints

ZHANG Qin¹ HUANG Guanwen¹ WANG Li¹ DING Xiaoguang¹

(1 College of Geology Engineering and Geomatics, Chang'an University, 126 Yanta Road, Xi'an 710054, China)

Abstract: GPS has been widely used in geodetic measuring, retains coordinate system, and monitor global plates movement or regional crust deformation. We analyze and compare the effects of different reference models and systematic parameters on adjustment result. Compared with some schemas of adjusting the Xi'an land subsidence monitor network with systematic parameters and constrains, a lot of valuable findings are concluded.

Key words: systematic parameters; rank defect network adjustment; subsidence monitor

About the first author: ZHANG Qin, professor, Ph.D supervisor. She is engaged in the research and teaching on kinematic geodesy, geological disaster and environmental monitoring, GPS and InSAR merging, and the theory and method of modern data processing, etc.
E-mail: dczhangq@chd. edu. cn