文章编号：1671-8860(2009)03-0277-03　　　　**文献标志码**：A

高斯投影与墨卡托投影解析变换的复变函数表达式

李厚朴[1]　边少锋[1,2]

（1　海军工程大学导航工程系，武汉市解放大道717号，430033）
（2　中国科学院测量与地球物理研究所，武汉市徐东大街340号，430077）

摘　要：给出了高斯投影和墨卡托投影正反解的复变函数表达式，在此基础上推导出了这两种投影解析变换的复数形式的直接公式和间接公式，将其表示为含椭球第一偏心率 e 的符号形式，可解决两种投影在不同地球参考椭球下的变换问题。算例结果表明，复数变换公式的计算精度在0.000 1 m以上，可供实际使用。

关键词：地图投影；高斯投影；墨卡托投影；复变函数；解析变换
中图法分类号：P282.1

高斯投影与墨卡托投影是地图投影理论中两种重要的等角投影。在实际应用中，陆图一般采用高斯投影，海图一般采用墨卡托投影，在制图生产中，经常会遇到两者之间的解析变换问题。对此，已有学者进行了深入的研究[1-4]。总的来看，解决这一问题的方法主要有解析法[1,2]和数值法[3]，其中解析法最为常用。根据研究思路的不同，解析法又可分为直接变换法和间接变换法[4]。杨启和曾导出了高斯投影与墨卡托投影变换的常系数及变系数计算公式[5]，但所给公式涉及大量的幂级数展开和冗长的求导过程，应用起来较为不便；华棠借助横轴墨卡托投影导出了两种投影变换的闭合表达式[4]。

笔者注意到，目前，利用间接变换法得到的高斯投影与墨卡托投影坐标变换公式仍然是复杂的实数形式，应用时，需要经过繁琐的参数求解过程，并且有的计算公式表现为具体的数值形式，仅可解决某一特定参考椭球下的计算问题[1,2]。鉴于此，本文给出了高斯投影和墨卡托投影正反解的复变函数表达式，并在此基础上导出了这两种投影解析变换的复数形式的直接公式和间接公式。

1　高斯投影的复变函数表示

文献[6]讨论了高斯投影的复变函数表示，但在由等量纬度求解大地纬度时采用了迭代法，计算较为不便。本文引入等量纬度反解的直接计算式，导出了不需迭代的高斯投影正反解公式。

1.1　高斯投影正解的复变函数表示

等量纬度 q 与大地纬度 B 有如下关系[5]：

$$q = \operatorname{arctanh}(\sin B) - e \cdot \operatorname{arctanh}(e \cdot \sin B) \tag{1}$$

式中，e 为参考椭球的第一偏心率。等量纬度反解的直接公式为[7]：

$$\begin{aligned} B_0 &= \arcsin(\tanh q) \\ B &= B_0 + \left(\frac{1}{2}e^2 + \frac{5}{24}e^4 + \frac{1}{12}e^6 + \frac{13}{360}e^8\right)\cdot \\ &\quad \sin 2B_0 + \left(\frac{7}{48}e^4 + \frac{29}{240}e^6 + \frac{811}{11\,520}e^8\right)\sin 4B_0 + \\ &\quad \left(\frac{7}{120}e^6 + \frac{81}{1\,120}e^8\right)\sin 6B_0 + \frac{4\,279}{161\,280}e^8 \sin 8B_0 \end{aligned} \tag{2}$$

将等量纬度 q 向复数域开拓，用 $w = q + \mathrm{i}l$（l 表示经差）代替 q，并将相应的实变函数向复变函数开拓，则原实数纬度亦变为复变量，称其为复数纬度，用 Φ 表示，可由式(2)作复数域开拓后直接得到：

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \arcsin(\tanh w) \\ \Phi &= \Phi_0 + \left(\frac{1}{2}e^2 + \frac{5}{24}e^4 + \frac{1}{12}e^6 + \frac{13}{360}e^8\right)\cdot \\ &\quad \sin 2\Phi_0 + \left(\frac{7}{48}e^4 + \frac{29}{240}e^6 + \frac{811}{11\,520}e^8\right)\sin 4\Phi_0 + \end{aligned}$$

收稿日期：2009-01-15。
项目来源：国家自然科学基金资助项目(40644020，40774002)；国家杰出青年科学基金项目(40125013)。

$$\left(\frac{7}{120}e^6+\frac{81}{1\,120}e^8\right)\sin6\Phi_0+\frac{4\,279}{161\,280}e^8\sin8\Phi_0 \tag{3}$$

将式(3)得到的Φ代入复数形式的子午线弧长公式[6]，即可完成高斯投影的正解计算：

$$Z_G=X_G+\mathrm{i}Y_G=a(1-e^2)(\alpha\Phi+\beta\sin2\Phi+\gamma\sin4\Phi+\delta\sin6\Phi+\varepsilon\sin8\Phi) \tag{4}$$

1.2 高斯投影反解的复变函数表示

高斯投影反解的复变函数表达式为[6]：

$$\begin{cases}\Psi=(X_G+\mathrm{i}Y_G)/[a(1-e^2)\alpha]\\ \Phi=\Psi+a_2\sin2\Psi+a_4\sin4\Psi+a_6\sin6\Psi+a_8\sin8\Psi\\ w=q+\mathrm{i}l=\operatorname{arctanh}(\sin\Phi)-e\cdot\operatorname{arctanh}(e\cdot\sin\Phi)\end{cases} \tag{5}$$

将式(5)解得的q代入式(2)便可求出B。

2 墨卡托投影的复变函数表示

记X_M、Y_M为墨卡托投影后的纵横坐标，引入复变量$Z_M=X_M+\mathrm{i}Y_M$，则墨卡托投影正解的复变函数表达式为：

$$Z_M=r_0(q+\mathrm{i}l)=r_0w \tag{6}$$

式中，$r_0=a\cos B_0^1/\sqrt{1-e^2\sin^2B_0^1}$，$B_0^1$为基准纬度。式(6)稍加变形，便可得到墨卡托投影反解的复变函数表达式：

$$w=q+\mathrm{i}l=Z_M/r_0 \tag{7}$$

3 高斯投影与墨卡托投影解析变换的复变函数表达式

3.1 解析变换的间接公式

利用本文给出的高斯投影反解公式和墨卡托投影正解公式，可以得到由高斯投影坐标(X_G，Y_G)计算墨卡托投影坐标(X_M，Y_M)的复变函数表达式由式(5)和式(8)组成：

$$Z_M=X_M+\mathrm{i}Y_M=r_0w \tag{8}$$

由(X_M，Y_M)计算(X_G，Y_G)的复变函数表达式由式(9)和式(3)、式(4)组成：

$$w=q+\mathrm{i}l=(X_M+\mathrm{i}Y_M)/r_0 \tag{9}$$

3.2 解析变换的直接公式

间接公式虽然直观、容易理解，但在使用时，需要经过四步计算方可完成坐标变换，较为复杂，因此有必要导出更为实用的直接公式。从理论上讲，可将间接公式中的变量Φ和w消去，建立高斯投影坐标和墨卡托投影坐标换算的直接公式。但是，该过程人工推导起来极其繁琐，甚至不可能实现。本文借助计算机代数系统Mathematica[8]强大的数学分析能力，成功地解决了这一难题。

这里省略Mathematica中推导高斯投影到墨卡托投影解析变换的直接公式的主要步骤。在$e=0$处，将w、Z_G展开为e的幂级数形式，取至e^8项，则高斯投影到墨卡托投影解析变换的直接公式可以表示为：

$$\begin{cases}\Psi=(X_G+\mathrm{i}Y_G)/[a(1-e^2)\alpha]\\ Z_M=r_0\{\operatorname{arctanh}(\sin\Psi)-(\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{64}e^4-\frac{1}{3\,072}e^6-\frac{33}{16\,384}e^8)\sin\Psi-(\frac{1}{96}e^4+\frac{13}{3\,072}e^6+\frac{13}{8\,192}e^8)\sin3\Psi-(\frac{11}{7\,680}e^6+\frac{29}{24\,576}e^8)\sin5\Psi-\frac{25}{86\,016}e^8\sin7\Psi\}\end{cases} \tag{10}$$

墨卡托投影到高斯投影解析变换的直接公式可以表示为：

$$\begin{cases}\Phi_0=\arcsin(\tanh(X_M+\mathrm{i}Y_M)/r_0)\\ Z_G=a\{(1-\frac{1}{4}e^2-\frac{3}{64}e^4-\frac{5}{256}e^6-\frac{175}{16\,384}e^8)\Phi_0+(\frac{1}{8}e^2-\frac{1}{96}e^4-\frac{9}{1\,024}e^6-\frac{901}{184\,320}e^8)\sin2\Phi_0+(\frac{13}{768}e^4+\frac{17}{5\,120}e^6-\frac{311}{737\,280}e^8)\sin4\Phi_0+(\frac{61}{15\,360}e^6+\frac{899}{430\,080}e^8)\sin6\Phi_0+\frac{49\,561}{41\,287\,680}e^8\sin8\Phi_0\}\end{cases} \tag{11}$$

式(10)和式(11)在计算时不需要求出Φ和w，略去了间接公式中许多繁琐的过程，极大地简化了计算，本文称之为高斯投影与墨卡托投影解析变换的直接公式。

4 算例与误差分析

为说明本文导出的公式计算结果的准确性，选用WGS84椭球基本常数a=6 378 137 m，e^2=0.006 694 379 990 14，借助Mathematica代数系统进行了验算。

选取墨卡托投影的基准纬度$B_0^1=0$，并假设其中央子午线与高斯投影的中央子午线一致，即在高斯投影某一6°带内进行坐标换算。基本思路为：将由本文高斯投影正解公式得到的坐标代入间接公式(5)和(8)求得墨卡托投影坐标，并将所得坐标代入式(9)、式(3)、式(4)反解得到高斯投影坐标，将其与正解公式所得的坐标求差，即可

得到间接公式的计算误差 ΔX_G^1、ΔY_G^1。类似地，可以得到直接公式的计算误差 ΔX_G^2、ΔY_G^2。计算结果如表 1 所示。

表 1　间接公式和直接公式的计算误差比较

Tab. 1　Comparison of the Errors Computed by the Indirect and Direct Formulae

$B/(^\circ)$	$l/(^\circ)$	间接公式计算误差/m		直接公式计算误差/m	
		$\Delta X_G^1/10^{-5}$	$\Delta Y_G^1/10^{-6}$	$\Delta X_G^2/10^{-5}$	$\Delta Y_G^2/10^{-6}$
0	1.0	0	−1	0	1
20	1.5	0.1	3	2.1	2
40	2.0	4.2	1	4.1	1
60	2.5	5.1	0	6	1
80	3.0	2.8	−1	8	0

从表 1 中可以看出，间接公式与直接公式的计算误差相当，纵坐标的误差一般在 10^{-5} m 量级，横坐标的误差一般在 μm 量级；间接公式的纵坐标误差 ΔX_G^1稍小于直接公式的误差 ΔX_G^2，而两者横坐标的误差 ΔY_G^1和 ΔY_G^2相近。

5　结　语

与传统的实数型变换公式相比，本文给出的高斯投影与墨卡托投影的变换公式形式紧凑，结构简单，不仅是完全解析的表达式，而且是包含椭球第一偏心率e的符号形式，可以解决两种投影在各类参考椭球下的坐标变换问题。算例结果表明，本文公式有着相当高的计算精度，完全可以满足实际应用的要求。

参　考　文　献

[1]　丁佳波. 关于等角投影解析变换的补充[J]. 测绘学报，1982，11(1)：46-50

[2]　史国友，李伟，贾传荧，等. 高斯与墨卡托投影变换在船舶操纵模拟器中的应用[J]. 大连海事大学学报，2002，28(2)：25-28

[3]　杨启和. 等角投影数值变换的研究[J]. 测绘学报，1982，11(4)：268-282

[4]　华棠. 海图数学基础[M]. 北京：海潮出版社，1985

[5]　杨启和. 地图投影变换原理与方法[M]. 北京：解放军出版社，1989

[6]　边少锋，张传定. Gauss 投影的复变函数表示[J]. 测绘学院学报，2001，18(3)：157-159

[7]　李厚朴，边少锋. 辅助纬度反解公式的 Helmert 插值法新解[J]. 武汉大学学报・信息科学版，2008，33(6)：623-626

[8]　边少锋，许江宁. 计算机代数系统与大地测量数学分析[M]. 北京：国防工业出版社，2004

第一作者简介：李厚朴，博士生。研究方向为大地测量、卫星导航。

E-mail：lihoupu1985@126.com

Expressions for Analytical Transformation Between Gauss and Mercator Projections by Complex Numbers

LI Houpu[1]　*BIAN Shaofeng*[1,2]

(1　Department of Navigation, Naval University of Engineering, 717 Jiefang Road, Wuhan 430033, China)

(2　Institute of Geodesy and Geophysics, Chinese Academy of Sciences, 340 Xudong Street, Wuhan 430077, China)

Abstract: Expressions for the forward and inverse solution of Gauss and Mercator projections by complex numbers are given in this paper. Based on these expressions, direct and indirect formulas of the analytical transformation between Gauss and Mercator projections are derived. These formulae are symbolical forms which include the first eccentricity e of the reference ellipsoide. Hence, they can solve problems that deal with transformations between Gauss and Mercator projections when different reference ellipsoids are used. The numerical investigation shows that these formulas are sufficiently accurate up to 0.000 1 m and can satisfy practical applications.

Key words: map projection; Gauss projection; Mercator projection; complex numbers; analytical transformation

About the first author: LI Houpu, Ph.D candidate, majors in geodesy and satellite navigation.

E-mail: lihoupu1985@126.com