

病态加权总体最小二乘平差的岭估计解法

王乐洋¹ 许才军¹ 鲁铁定^{1,2}

(1 武汉大学测绘学院, 武汉市珞喻路 129 号, 430079)

(2 东华理工大学地球科学与测绘工程学院, 抚州市学府路 56 号, 344000)

摘要:采用岭估计法处理加权总体最小二乘平差的病态性问题, 推导了相应的求解公式及均方误差评定精度的方法, 定义了病态加权总体最小二乘平差中的模型参数分辨矩阵, 并讨论了岭参数的含义及其作用, 给出了确定病态加权总体最小二乘岭估计中岭参数的岭迹法、广义交叉核实法和 L 曲线法。算例计算了普通最小二乘、普通总体最小二乘的结果, 并比较了三种确定岭参数的方法在处理病态加权最小二乘岭估计和病态加权总体最小二乘岭估计中的优缺点。

关键词:总体最小二乘平差; 病态模型; 岭迹法; 广义交叉核实法; L 曲线法; 岭估计法

中图分类号: P207

总体最小二乘方法是一种可以估计包含所有变量误差的 EIV (errors in all variables) 线性模型中参数的一种新的平差方法, 与最小二乘方法的最大区别是, 它不但考虑了观测值的误差, 还同时顾及了系数矩阵的误差; 对于大部分线性模型来说, 其系数阵并非常数阵 (如全部由 0 或 1 等常数元素组成的矩阵), 而是由其他方法计算得到的、具有一定误差的变量矩阵, 考虑了系数阵误差的总体最小二乘方法因而可以得到比最小二乘更加合理的结果。自从 1980 年 Golub 等引入总体最小二乘 (total least squares, TLS) 的概念之后, 总体最小二乘方法在系统识别、信号处理、测量数据处理等领域得到了广泛的研究和应用^[1-6]。在控制网平差、大地测量反演、GPS 快速定位及重力场向下延拓等数据处理中存在大量的病态问题, 但是当系数阵病态时, 普通总体最小二乘将得不到稳定的解, 且估值的均方误差也较大, 因而必须针对系数矩阵的病态性进行处理。在等权条件下, 病态总体最小二乘模型的研究都是基于正则化方法的^[7], 并需要进行迭代求解。针对这些问题, 本文采用岭估计法处理加权总体最小二乘的病态性问题, 推导了相应的求解公式及均方误差评定精度的方法。

1 病态加权总体最小二乘平差的岭估计解法

对于线性模型:

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{X}} - \mathbf{L} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{e}_l \\ \mathbf{e}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_l \\ \text{vec}(\mathbf{E}_B) \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \sigma_0^2 \mathbf{Q}(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_B) \end{cases} \quad (1)$$

式中, \mathbf{e}_l 是观测值的随机误差向量; $\mathbf{e}_B = \text{vec}(\mathbf{E}_B)$ 是系数矩阵元素的随机误差向量, 即将矩阵 \mathbf{E}_B 按行拉直得到的列向量; $\mathbf{Q}(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_B)$ 是观测值与系数矩阵元素之间的协因数阵。

设参数 $\tilde{\mathbf{X}}$ 的估值为 $\hat{\mathbf{X}} (\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{X}^0 + \mathbf{x})$, 观测值误差 \mathbf{A} 的估值为 $\mathbf{V}_L (\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{L} + \mathbf{V}_L)$, 观测值个数为 n , 待估未知参数个数为 t 。总体最小二乘平差除了考虑观测值 \mathbf{L} 的误差外, 同时还要考虑系数矩阵 \mathbf{B} 的误差。设 \mathbf{V}_B 为系数矩阵 \mathbf{B} 误差的估值, 即 $\mathbf{B} = \mathbf{B}^0 + \mathbf{V}_B$, 所以有:

$$\mathbf{L} + \mathbf{V}_L = (\mathbf{B}^0 + \mathbf{V}_B)(\mathbf{X}^0 + \mathbf{x}) \quad (2)$$

将式(2)展开, 并舍去二次项 $\mathbf{V}_B\mathbf{x}$, 得:

$$\mathbf{V}_L - \mathbf{V}_B\mathbf{X}^0 = \mathbf{B}^0\mathbf{x} - (\mathbf{L} - \mathbf{B}^0\mathbf{X}^0) \quad (3)$$

令 $\mathbf{V} = \mathbf{V}_L - \mathbf{V}_B\mathbf{X}^0$, $\mathbf{W} = \mathbf{L} - \mathbf{B}^0\mathbf{X}^0$, 则式(3)变

为:

$$\mathbf{V} = \mathbf{B}^0 \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{W} \quad (4)$$

加权总体最小二乘准则为^[2]:

$$\mathbf{V}_L^T \mathbf{P}_L \mathbf{V}_L + (\text{vec}(\mathbf{V}_B))^T \mathbf{P}_B (\text{vec}(\mathbf{V}_B)) = \min \quad (5)$$

式中, $\text{vec}(\mathbf{V}_B)$ 是指将矩阵 \mathbf{V}_B 按行拉直所得到的列向量, 排列的顺序为从上到下; \mathbf{P}_L 为观测值 L 的权阵; \mathbf{P}_B 为 $\text{vec}(\mathbf{V}_B)$ 中元素的权阵, 即有准则 $\mathbf{V}^T \bar{\mathbf{P}} \mathbf{V} = \min$.

若系数矩阵 \mathbf{B} 是病态的, 必须采取一定的方法降低其病态性, 使得法矩阵的求逆变得稳定. 本文引入岭参数 α , 采用岭估计法处理加权总体最小二乘的病态性问题, 根据 Tikhonov 正则化原理, 得式(1)的总体最小二乘岭估计的估计准则为:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & -x_1^0 & -x_2^0 & \cdots & -x_t^0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & -x_1^0 \\ & & & & & & -x_2^0 \\ & & & & & & \cdots \\ & & & & & & -x_t^0 \end{bmatrix}, \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times (n+t+n)}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{l_1} & \mathbf{e}_{b_{1,1}} & \mathbf{e}_{b_{1,2}} & \cdots & \mathbf{e}_{b_{1,t}} \\ \mathbf{e}_{l_2} & \mathbf{e}_{b_{2,1}} & \mathbf{e}_{b_{2,2}} & & \mathbf{e}_{b_{2,t}} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \mathbf{e}_{l_n} & \mathbf{e}_{b_{n,1}} & \mathbf{e}_{b_{n,2}} & \cdots & \mathbf{e}_{b_{n,t}} \end{bmatrix}, \mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times (t+1)}; \text{vec}(\mathbf{G}) \in \mathbb{R}^{(n \times (t+n)) \times 1}, \text{它是将矩阵 } \mathbf{G} \text{ 按行拉直所得到的列向量, 排列的顺序为从上到下}.$$

若已知列向量 $\text{vec}(\mathbf{G})$ 中的所有元素 \mathbf{e}_{l_1} , $\mathbf{e}_{b_{1,1}}$, $\mathbf{e}_{b_{1,2}}$, \cdots , $\mathbf{e}_{b_{n,t}}$ 之间的互协因数及协因数组成的矩阵 $\mathbf{Q}_{\text{vec}(\mathbf{G})}$ ($\mathbf{Q}_{\text{vec}(\mathbf{G})} \in \mathbb{R}^{(n \times (t+n)) \times (n \times (t+n))}$), 即 $\mathbf{Q}_{\text{vec}(\mathbf{G})} = \mathbf{Q}(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_B)$, 则由式(8)根据协因数传播律得:

$$\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{K} \mathbf{Q}_{\text{vec}(\mathbf{G})} \mathbf{K}^T \quad (9)$$

由式(7)可知, 在得到 $\bar{\mathbf{Q}}$ 之后, 还必须求得岭参数 α , 然后才能得到模型参数改正数的总体最小二乘岭估计值.

单位权方差的估计为:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \mathbf{V}^T \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \mathbf{V} / (n - t) \quad (10)$$

由式(7)根据协因数传播律得:

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{B}^0 \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \mathbf{B}^0 + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{B}^0 \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \mathbf{B}^0 (\mathbf{B}^0 \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \mathbf{B}^0 + \alpha \mathbf{I})^{-1} \quad (11)$$

由均方误差定义^[8,9]:

$$\text{MSE}(\hat{\mathbf{x}}) = E\{(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})^T (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})\} \quad (12)$$

将式(7)及式(11)代入上式得均方误差为:

$$\begin{aligned} \text{MSE}(\hat{\mathbf{x}}) = & \hat{\sigma}_0^2 (\mathbf{B}^0 \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \mathbf{B}^0 + \\ & \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{B}^0 \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \mathbf{B}^0 (\mathbf{B}^0 \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \mathbf{B}^0 + \alpha \mathbf{I})^{-1} + \\ & \alpha^2 (\mathbf{B}^0 \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \mathbf{B}^0 + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{x} \mathbf{x}^T (\mathbf{B}^0 \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \mathbf{B}^0 + \alpha \mathbf{I})^{-1} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\mathbf{V}^T \bar{\mathbf{P}} \mathbf{V} + \alpha \hat{\mathbf{x}}^T \hat{\mathbf{x}} = \min \quad (6)$$

结合式(1)对式(6)求导, 得到总体最小二乘岭估计的解为:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{B}^{0T} \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \mathbf{B}^0 + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{B}^{0T} \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \mathbf{W} \quad (7)$$

式中, $\hat{\mathbf{x}}$ 为参数改正数的估值; α 为岭参数; \mathbf{I} 为单位阵; $\bar{\mathbf{Q}}^{-1} = \bar{\mathbf{P}}$.

与普通总体最小二乘相比, 式(7)右端求逆部分增加了 $\alpha \mathbf{I}$ 项, 这样由于系数阵 \mathbf{B} 的病态所引起的法方程系数阵 $\mathbf{B}^{0T} \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \mathbf{B}^0$ 的病态性得到抑制, $(\mathbf{B}^{0T} \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \mathbf{B}^0 + \alpha \mathbf{I})$ 的求逆变得正常, 因而可以得到可靠稳定的总体最小二乘估值.

下面给出 $\bar{\mathbf{Q}}$ 的求解方法. 由 $\mathbf{V} = \mathbf{V}_L - \mathbf{V}_B \mathbf{X}^0$ 及 $\mathbf{W} = \mathbf{L} - \mathbf{B}^0 \mathbf{X}^0$ 得:

$$\mathbf{e} = \mathbf{K} \cdot \text{vec}(\mathbf{G}) \quad (8)$$

2 确定病态加权总体最小二乘平差中岭参数的方法

岭参数 α 除了能够改善法方程的系数阵 $\mathbf{B}^{0T} \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \mathbf{B}^0$ 的病态性外, 还起到了平衡数据拟合及系数阵残差 $\mathbf{V}^T \bar{\mathbf{P}} \mathbf{V}$ 和解部分 $\|\hat{\mathbf{x}}\|^2$ 的作用(如式(6)). 定义模型参数分辨矩阵 \mathbf{R} 为^[10]:

$$\mathbf{R} = (\mathbf{B}^{0T} \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \mathbf{B}^0 + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{B}^{0T} \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \mathbf{B}^0 \quad (14)$$

\mathbf{R} 表示模型参数的病态加权总体最小二乘岭估计值与真实模型参数的接近程度. 当 $\alpha = 0$ 时, $\mathbf{R} = \mathbf{I}$, 估计模型参数的分辨率最高(完全分辨), 但是对于病态总体最小二乘问题来说, 求解是不稳定的, 只要岭参数 $\alpha \neq 0$, 病态加权总体最小二乘岭估计的模型参数分辨矩阵 \mathbf{R} 不可能等于单位阵, 也就不可能完全分辨. 这意味着岭参数 α 降低了分辨率, α 越大, 分辨率就越低. 由于矩阵 \mathbf{B} 的奇异值(接近零的值)只出现在求逆元素的 denominator 里, 当 α 增大时, denominator 就越大, 从而减小了模型的误差. 这样, 岭参数 α 起到了在模型参数分辨率与误差之间的平衡作用. 因此, 岭参数 α 的确定对于病态加权总体最小二乘有着重要的作用和意义.

2.1 L 曲线法

在式(7)中, $\|\mathbf{B}^0 \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{W}\|$ 和 $\|\hat{\mathbf{x}}\|$ 都是岭参数 α 的函数. L 曲线法确定病态加权总体最小二乘岭估计中岭参数的主要步骤是: 选择不同的 α 值, 以 $\|\mathbf{B}^0 \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{W}\|$ 为横坐标、 $\|\hat{\mathbf{x}}\|$ 为纵坐标画图, 得到一

系列的点 $(\|B^0x - W\|, \|x\|)$, 经过曲线拟合得到一条曲线, 即 L 曲线, 选择 L 曲线上曲率最大的那个点所对应的 α 值作为所求的岭参数。

令

$$\eta = \|x\|^2, \rho = \|B^0x - W\|^2 \quad (15)$$

两边取对数, 得:

$$\bar{\eta} = \lg \eta = 2 \lg \|x\|, \bar{\rho} = \lg \rho = 2 \lg \|B^0x - W\| \quad (16)$$

则 L 曲线是由许多 $(\bar{\rho}/2, \bar{\eta}/2)$ 拟合而成的。 L 曲线上点的曲率计算公式为^[11-13]:

$$\kappa = 2 \frac{\bar{\rho}'\bar{\eta}'' - \bar{\rho}''\bar{\eta}'}{[(\bar{\rho}')^2 + (\bar{\eta}')^2]^{3/2}} \quad (17)$$

式中, $\bar{\rho}'$ 、 $\bar{\eta}'$ 、 $\bar{\rho}''$ 和 $\bar{\eta}''$ 分别表示 $\bar{\rho}$ 、 $\bar{\eta}$ 的一阶导数和二阶导数, 并且都是岭参数 α 的函数。

对式(17)求最大值, 就可以得到 L 曲线的最大曲率 κ_{\max} , κ_{\max} 所对应点的 α 值就是所求的岭参数, 然后代入式(7)就可以得到病态加权总体最小二乘问题的解。

2.2 广义交叉核实法(GCV)

应用广义交叉核实法确定病态加权总体最小

$$A^0 = \begin{bmatrix} 2.000 & 0 & -5.000 & 0 & 1.000 & 0 & 1.000 & 0 & -9.500 & 0 \\ -2.000 & 0 & 4.000 & 0 & 1.000 & 0 & -1.050 & 0 & 8.500 & 0 \\ -2.000 & 0 & 1.000 & 0 & 1.000 & 0 & -1.000 & 0 & 2.400 & 0 \\ -1.000 & 0 & 2.500 & 0 & 4.000 & 0 & -0.500 & 0 & 7.000 & 0 \\ -1.000 & 0 & 3.200 & 0 & 4.000 & 0 & -0.500 & 0 & 8.400 & 0 \\ 1.000 & 0 & 1.000 & 0 & -3.000 & 0 & 0.400 & 0 & 0.490 & 0 \\ 3.000 & 0 & 7.000 & 0 & -3.000 & 0 & 1.500 & 0 & 12.700 & 0 \\ 5.000 & 0 & -1.000 & 0 & -2.000 & 0 & 2.500 & 0 & -3.000 & 0 \\ 4.000 & 0 & 2.000 & 0 & -2.000 & 0 & 2.010 & 0 & 3.000 & 0 \\ 4.000 & 0 & 3.000 & 0 & -2.000 & 0 & 2.000 & 0 & 5.000 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} -10.932 & 6 \\ 8.784 & 4 \\ 1.525 & 3 \\ 12.287 & 7 \\ 12.953 & 5 \\ 1.080 & 9 \\ 22.389 & 2 \\ 1.462 & 4 \\ 9.337 & 3 \\ 12.174 & 6 \end{bmatrix}$$

矩阵 $A^{0T}A^0$ 的条件数为 1.2892×10^5 , 病态性严重。未知参数有 5 个, $X = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5]^T$, 它们的真值为 $X = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ 。观测值 L 的噪声 $\Delta_L \sim N(0, \sigma^2 I)$, $\sigma = 1$, I 为单位阵。设计矩阵 $A(a_{ij})$ 是矩阵 A 中的元素, $i=1, 2, \dots, 10; j=1, 2, \dots, 5$ 是含有误差的, A^0 是其近似值矩阵, a_{ij} 与 $l_i (i=1, 2, \dots, 10)$ 之间相互独立, 且 $\text{vec}(\Delta_A) \sim N(0, \sigma^2 P_{\text{vec}(\Delta_A)})$, $\sigma = 1$, $P_{\text{vec}(\Delta_A)} = Q_{\text{vec}(\Delta_A)}^{-1}$ 为设计矩阵 A 的元素按行拉直后得到的列向量元素的权阵, 假设 $P_{\text{vec}(\Delta_A)}$ 是一个对角线元素为 0.5、非对角线元素为 0.2 的对称方阵, $P_{\text{vec}(\Delta_A)} \in R^{50 \times 50}$ 。为了比较各种方法的结果, 本文设计了多个方案: ① 不考虑设计矩阵 A 误差的普通最小二乘解法; ② 不考虑设计矩阵 A 误差的最小二乘岭估计解法; ③ 考虑设计矩阵 A 误差的普通总体最小二乘解法; ④ 考虑设计矩阵

二乘岭估计中的岭参数时, 需要求解 GCV 函数的最小值, 由式(1)和式(7)得 GCV 函数为^[13]:

$$GCV(\alpha) = \frac{\|I - H(\alpha)L\|^2/n}{[\text{trace}(I - H(\alpha))/n]^2} \quad (18)$$

式中, $H(\alpha) = B^0(B^{0T}Q^{-1}B^0 + \alpha I)^{-1}B^{0T}Q^{-1}$; n 为观测值 L 的个数。

根据式(18)求解的最小值 α 就是 GCV 所确定的岭参数。

2.3 岭迹法

岭迹法确定病态加权总体最小二乘岭估计中岭参数的原理如下^[8,13]: 在式(7)中, 当 α 在 $[0 \ +\infty)$ 之间变化时, 将 \hat{x} 的各个分量 $\hat{x}_i(\alpha)$ 的岭迹画在同一张图上, 选取使 $\hat{x}_i(\alpha)$ 的岭迹大都稳定的那个点所对应的 α 值作为岭参数。

3 算例及分析

将文献[13]中的算例 5.2 进行改化, 病态设计矩阵为:

A 误差的病态加权总体最小二乘岭估计解法。未知参数的计算结果见表 1, 计算的 \hat{X} 与真值 X 的差值范数为 $\|\Delta\hat{X}\| = \|\hat{X} - X\|$ 。

通过计算和对比分析, 可以得到如下结论。

1) 模型参数的 LS 岭估计值比普通 LS 估值更接近真值, 计算的 \hat{X} 与真值 X 的差范数 $\|\Delta\hat{X}\|$ 分别为 0.852 8(方案②中三种方法得到的范数 0.848 5、0.837 2 和 0.872 7 的平均值) 和 4.544 6, 可见 LS 岭估计极大地改善了普通 LS 的病态性。

2) 普通 TLS 估值与普通 LS 估值相比, 其与真值的差值范数要小一些, 分别为 4.307 4 和 4.544 6, 这是由于普通 TLS 顾及了系数矩阵误差导致的, 因而比没有顾及系数矩阵误差的 LS 法, 其结果也更接近真值; 但在病态情况下, 普通 TLS 估值与普通 LS 估值都与真值相差较远。

3) TLS 岭估计的三种方法得到的参数估计值与真值的差值范数分别为 0.117 3、0.085 7 和

表 1 模型参数 X 的计算结果表
Tab.1 Results of Model Parameter X

方案	\hat{x}_1	\hat{x}_2	\hat{x}_3	\hat{x}_4	\hat{x}_5	α	$\ \Delta\hat{X}\ $	计算方法
①	0.425 9	-2.772 6	-0.152 0	2.101 0	2.884 8	/	4.544 6	LS(普通)
②	1.155 0	0.410 6	0.630 5	0.649 7	1.298 7	0.350 2	0.848 5	L 曲线法(LS)
②	1.157 9	0.441 2	0.626 3	0.620 5	1.282 9	0.688 0	0.837 2	GCV 法(LS)
②	1.141 1	0.367 1	0.624 9	0.687 7	1.320 7	0.200 0	0.872 7	岭迹法(LS)
③	0.517 1	-2.603 4	-0.106 8	1.930 3	2.801 5	/	4.307 4	TLS(普通)
④	1.014 1	1.019 3	0.886 4	1.007 4	0.984 8	2.355 0	0.117 3	L 曲线法(TLS)
④	1.019 1	1.012 9	0.919 0	1.009 6	0.987 0	4.623 0	0.085 7	GCV 法(TLS)
④	1.018 9	1.013 1	0.917 7	1.009 6	0.986 9	4.500 0	0.087 0	岭迹法(TLS)
真值	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	/	/	/

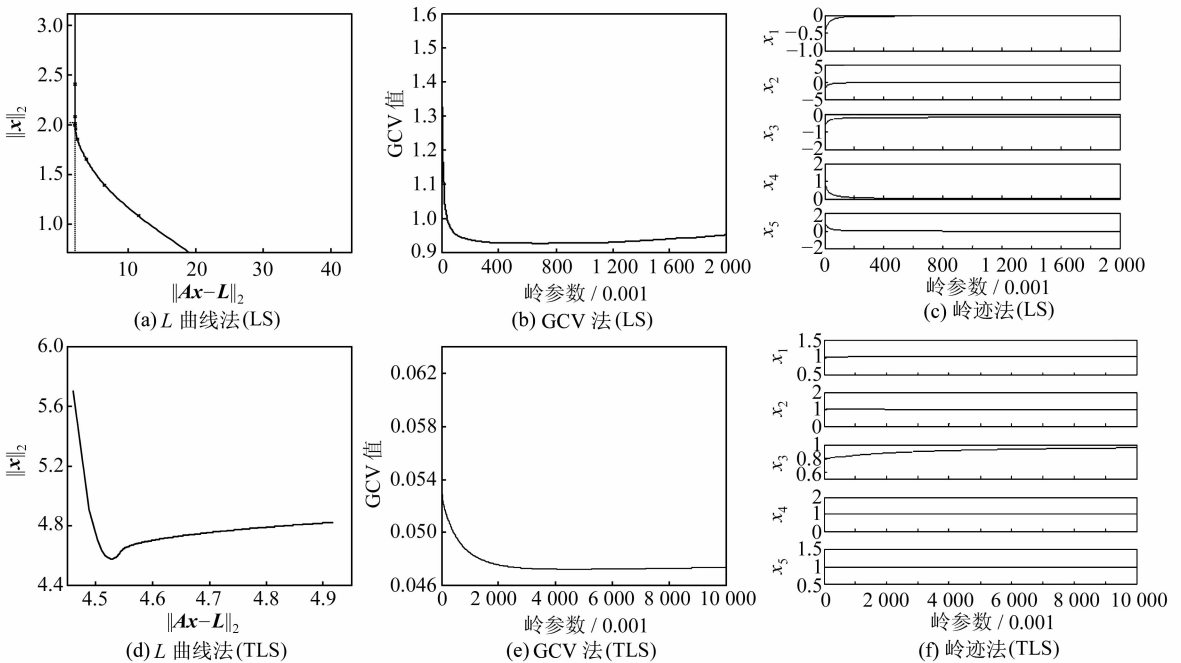


图 1 不同方法确定岭估计的岭参数

Fig.1 Determination of the Ridge Parameter by Different Method

0.087 0,平均值为 0.096 7,是普通 LS 估计差值范数的 2.13%,LS 岭估计差值范数的 11.34%,普通 TLS 估计差值范数的 2.24%,因而是四种方案中最接近真值的。由此可以看出,当系数矩阵病态且含有误差时,TLS 岭估计可以很好地解决这个问题,并得到最接近真值的结果。

4) 对于 LS 岭估计和 TLS 岭估计来说,L 曲线法、广义交叉核实(GCV)法以及岭迹法在确定岭参数时都是非常有效的,由表 1 可以看出得到的结果相差不大,并各具优缺点。岭迹法确定岭参数的优点是比较直观,缺点是缺少严格的理论依据,并且岭参数的选择具有一定程度的主观随意性。GCV 法的优点是当 GCV 函数存在最小值时,可以获得一个理论上最优的岭参数,缺点是 GCV 函数有时不收敛或变化过于平缓。L 曲线

法的优点是理论上非常严密,定位准确,精度高,且适用性好,是优于岭迹法和 GCV 法的。在使用这三种方法确定岭参数时,必须根据实际情况进行确定。

4 结 语

总体最小二乘平差由于同时顾及了观测值和系数阵的误差,可以得到比最小二乘更加合理的结果,但是当系数阵呈病态时,普通总体最小二乘将得不到稳定的解,且估值的均方误差也较大,因而必须针对系数矩阵的病态性进行处理。算例显示了本文方法的有效性,对于总体最小二乘方法,特别是病态加权总体最小二乘平差在测绘数据处理中的应用将具有一定的借鉴作用。

参 考 文 献

- [1] Schaffrin B, Felus Y A. On the Multivariate Total Least-squares Approach to Empirical Coordinate Transformations: Three Algorithms[J]. *Journal of Geodesy*, 2008, 82(6):373-383
- [2] Schaffrin B, Wieser A. On Weighted Total Least-squares Adjustment for Linear Regression[J]. *Journal of Geodesy*, 2008, 82(7): 415-421
- [3] 周世健,鲁铁定. 双变量线性回归的解算[J]. *江西科学*, 2008, 26(1):109-111
- [4] 鲁铁定,陶本藻,周世健. 基于整体最小二乘法的线性回归建模和解法[J]. *武汉大学学报·信息科学版*, 2008, 33(5):504-507
- [5] 陈义,陆珏,郑波. 总体最小二乘方法在空间后方交会中的应用[J]. *武汉大学学报·信息科学版*, 2008, 33(12):1 271-1 274
- [6] 王乐洋,许才军,鲁铁定. 边长变化反演应变参数的总体最小二乘方法[J]. *武汉大学学报·信息科学版*, 2010, 35(2):181-184
- [7] 袁振超,沈云中,周泽波. 病态总体最小二乘模型的正则化算法[J]. *大地测量与地球动力学*, 2009, 29(2):131-134
- [8] 崔希璋,於宗俦,陶本藻,等. 广义测量平差(新版)[M]. 武汉:武汉测绘科技大学出版社,2001
- [9] 徐天河,杨元喜. 均方误差意义下正则化解优于最小二乘解的条件[J]. *武汉大学学报·信息科学版*, 2004, 29(3):223-226
- [10] 朱良保. 地球物理反演(讲义)[OL]. http://mail.ustc.edu.cn/~xjx/dwfy_sg.pdf, 2009
- [11] 王振杰,欧吉坤. 用 L 曲线法确定岭估计中的岭参数[J]. *武汉大学学报·信息科学版*, 2004, 29(3): 235-238
- [12] 王振杰,欧吉坤,柳林涛. 一种解算病态问题的方法——两步解法[J]. *武汉大学学报·信息科学版*, 2005, 30(9):821-824
- [13] 王振杰. 测量中不适定问题的正则化解法[M]. 北京:科学出版社,2006

第一作者简介:王乐洋,博士生,主要研究方向为大地测量反演及总体最小二乘平差的理论与应用。
E-mail:wleyang@163.com

Ridge Estimation Method in Ill-posed Weighted Total Least Squares Adjustment

WANG Leyang¹ XU Caijun¹ LU Tieding^{1,2}

(1 School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)

(2 School of Geoscience and Surveying Engineering, East China Institute of Technology, 56 Xuefu Road, Fuzhou 344000, China)

Abstract: The method of ridge estimation to treat ill-posed and weighted total least squares adjustment(TLSA) is put forward. The solution equation and evaluating precision by mean square error are deduced. The model parameter discernable matrix in ill-posed and weighted TLSA is defined, then the meaning and effect of the ridge parameter is discussed. For the case that the ridge parameter is difficult to determine in ridge estimation to treat ill-posed and weighted TLSA, the L -curve method, generalized cross-validation (GCV) and the ridge mark method are introduced and given. At last, through some cases, the comparisons are carried out among the L -curve method, GCV and the ridge mark method, also the results of common least squares(LS) and total least squares are given, and some conclusions are obtained.

Key words: total least squares adjustment; ill-posed model; the ridge mark method; generalized cross-validation; L -curve method; ridge estimation method