

# Kalman 滤波模型误差的修复

归庆明<sup>1,2</sup> 韩松辉<sup>2</sup>

(1 信息工程大学理学院,郑州市科学大道 62 号,450001)  
(2 信息工程大学测绘学院,郑州市陇海中路 66 号,450052)

**摘 要:**基于预测残差分析和滤波误差估计,提出了一种新的 Kalman 滤波模型误差的修正方法。该方法在预测残差分析的基础上,利用观测模型误差和动力学模型误差的相互影响,基于滤波误差估计,从修正观测模型入手,有效地消除了以往历元所有观测模型误差和动力学模型误差对当前历元滤波值的影响。GPS 动态导航模拟实验表明,该方法不仅有效地消除了整个 Kalman 滤波模型误差的影响,而且结果比较理想。  
**关键词:**GPS 动态导航;Kalman 滤波;模型误差;预测残差;滤波误差  
**中图法分类号:** P228. 41

随着计算机的快速发展,Kalman 滤波理论以其最优性和高效性在 GPS 动态导航中得到了广泛的应用<sup>[1-4]</sup>。动态导航的质量主要受观测模型误差、动力学模型误差和随机模型误差的影响<sup>[4]</sup>。模型误差的存在可能导致滤波器性能变坏,降低状态估计精度,严重时还会导致滤波发散。为了消除模型误差对滤波值的影响,往往在观测方程和状态方程中附加一定的模型参数,使得模型更加准确,进而减弱模型误差对滤波值的影响<sup>[5]</sup>。这种 Kalman 滤波模型误差的处理方法可称为附加参数法。对于增加附加参数后的 Kalman 滤波模型,关键在于如何求解附加参数。目前常用的方法有整体解算法<sup>[5]</sup>、多项式拟合法<sup>[5]</sup>、开窗拟合法<sup>[6]</sup>、探测修正法——DIA 方法<sup>[7]</sup>、两步检验法<sup>[8]</sup>、含有粗差观测值的自适应滤波法<sup>[9]</sup>、粗差探测修复法<sup>[10]</sup>和偏差分离估计法<sup>[11]</sup>。但是,在已有的 Kalman 滤波模型误差探测与修正的方法中,大多数只讨论观测模型和动力学模型中一个模型含有误差的情况,抑或分开讨论 Kalman 滤波模型的误差是来自观测模型还是来自动力学模型<sup>[4]</sup>。实际上,因为目前常用预测残差检验 Kalman 滤波模型是否含有误差,而预测残差既包含了观测模型误差,又包含了动力学模型误差,两种误差经过迭代运算已经混合在

一起,它们彼此影响、相互包含,所以单独考虑观测模型误差或单独考虑动力学模型误差是不合适的。本文提出了一种新的 Kalman 滤波模型误差的修正方法。

## 1 Kalman 滤波模型误差的预测残差分析

**1.1 标准 Kalman 滤波方程及其预测残差分析**  
设 GPS 动态导航的 Kalman 滤波模型为:

$$\mathbf{L}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{X}_k + \mathbf{e}_k \tag{1}$$

$$\mathbf{X}_k = \Phi_{k,k-1} \mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{W}_k \tag{2}$$

式中, $\mathbf{X}_k$ 是 $t_k$ 时刻系统的 $m$ 维状态向量; $\mathbf{L}_k$ 是 $t_k$ 时刻系统的 $n$ 维观测向量; $\Phi_{k,k-1}$ 是系统的 $m \times m$ 维状态转移矩阵; $\mathbf{A}_k$ 是 $n \times m$ 维观测矩阵; $\mathbf{W}_k$ 是 $m$ 维动力学模型噪声向量; $\mathbf{e}_k$ 是 $n$ 维观测噪声向量。假定动力学模型噪声和观测噪声的统计特性如下:

$$\begin{cases} E(\mathbf{W}_k) = 0, & E(\mathbf{e}_k) = 0 \\ E(\mathbf{W}_k \mathbf{W}_j^T) = \Sigma_{\mathbf{W}_k} \delta_{kj}, & E(\mathbf{e}_k \mathbf{e}_j^T) = \Sigma_{\mathbf{e}_k} \delta_{kj} \\ E(\mathbf{W}_k \mathbf{e}_j^T) = 0, & E(\mathbf{W}_k \mathbf{X}_0^T) = 0, E(\mathbf{e}_k \mathbf{X}_0^T) = 0 \end{cases}$$

其中, $\Sigma_{\mathbf{W}_k}$ 是动力学模型噪声 $\mathbf{W}_k$ 的 $m \times m$ 维非负定协方差矩阵; $\Sigma_{\mathbf{e}_k}$ 是观测噪声 $\mathbf{e}_k$ 的 $n \times n$ 正定协方差矩阵; $\delta_{kj}$ 是 Kronecker- $\delta$  函数。状态向量 $\mathbf{X}_k$

的最佳估计由 Kalman 滤波基本方程<sup>[1,2]</sup>给出。

设第  $k$  个历元的预测残差为：

$$\bar{V}_k = A_k \bar{X}_k - L_k = A_k \bar{X}_k - A_k X_k - e_k = -A_k \Phi_{k,k-1} (X_{k-1} - \hat{X}_{k-1}) - A_k W_k - e_k$$

且  $E(\bar{V}_k) = 0, \Sigma_{\bar{V}_k} = A_k \Sigma_{X_k} A_k^T + \Sigma_k$ 。对每个历元均进行滤波异常检验,检验时,只需采用此历元的预测残差构造统计量  $\bar{V}_k^T \Sigma_{\bar{V}_k}^{-1} \bar{V}_k$  来判定 Kalman 滤波模型是否含有误差。由  $\bar{V}_k^T \Sigma_{\bar{V}_k}^{-1} \bar{V}_k \sim \chi_n^2$ , 给定显著性水平  $\alpha (0 < \alpha < 1)$ , 当  $\bar{V}_k^T \Sigma_{\bar{V}_k}^{-1} \bar{V}_k > \chi_n^2(\alpha)$  时, 认为 Kalman 滤波含有模型误差, 其中,  $\chi_n^2(\alpha)$  为  $\chi_n^2$  分布的上侧  $\alpha$  分位点。

1.2 带有模型误差的 Kalman 滤波方程及其预测残差分析

假设前  $k-1$  个历元模型均正确, 在第  $k$  个历元出现了未知的模型误差, 此时, Kalman 滤波模型变为：

$$L'_k = A_k X'_k + C_k \nabla_1^{(k)} + e_k \tag{3}$$

$$X'_k = \Phi_{k,k-1} X_{k-1} + D_k \nabla_2^{(k)} + W_k \tag{4}$$

其中,  $\nabla_1^{(k)}$  和  $\nabla_2^{(k)}$  为误差参数;  $C_k$  和  $D_k$  为相应的系数矩阵。则第  $k$  个历元的预测残差为：

$$\bar{V}'_k = A_k \bar{X}'_k - L'_k = -A_k \Phi_{k,k-1} (X_{k-1} - \hat{X}_{k-1}) - A_k D_k \nabla_2^{(k)} - A_k W_k - C_k \nabla_1^{(k)} - e_k \tag{5}$$

此时,  $E(\bar{V}'_k) = -A_k D_k \nabla_2^{(k)} - C_k \nabla_1^{(k)}, \Sigma_{\bar{V}'_k} = \Sigma_{\bar{V}_k} = A_k \Sigma_{X_k} A_k^T + \Sigma_k$ 。

由式(5)可以看出, 无论是观测模型含有误差还是动力学模型含有误差, 这些误差在  $\bar{V}'_k$  中均有体现, 预测残差反映的是整个模型的误差, 如果利用预测残差检验出模型含有误差, 则这些误差是来自整个 Kalman 滤波模型的。

2 Kalman 滤波模型误差的修正

2.1 第  $k$  个历元的 Kalman 滤波模型误差修正

由式(5)可知, 检验出 Kalman 滤波模型含有误差后, 可以不讨论模型误差是来自观测模型还是来自动力学模型, 而只对误差作统一处理。鉴于预测残差向量即新息向量包含了新的观测信息, 而由式(5)可知,  $\bar{V}'_k$  的表达式中,  $A_k \Phi_{k,k-1} (X_{k-1} - \hat{X}_{k-1})$  即是有用信息项, 而其他几项均是误差项。因此, 如果知道了  $A_k \Phi_{k,k-1} (X_{k-1} - \hat{X}_{k-1})$ , 则  $\bar{V}'_k + A_k \Phi_{k,k-1} (X_{k-1} - \hat{X}_{k-1}) = -A_k D_k \nabla_2^{(k)} - A_k W_k - C_k \nabla_1^{(k)} - e_k$  包含了第  $k$  个历元预测残差体现的所有模型误差。此时, 观测值  $L'_k$  应修正为：

$$L''_k = L'_k + \bar{V}'_k + A_k \Phi_{k,k-1} (X_{k-1} - \hat{X}_{k-1}) \tag{6}$$

则预测残差变为：

$\bar{V}''_k = A_k \bar{X}'_k - L''_k = -A_k \Phi_{k,k-1} (X_{k-1} - \hat{X}_{k-1})$  (7)  
显然有  $E(\bar{V}''_k) = 0$ , 如果能够得到  $X_{k-1} - \hat{X}_{k-1}$  较准确的估计值, 那么如此修正观测值  $L'_k$  后, 可以消去误差项  $A_k D_k \nabla_2^{(k)} + A_k W_k + C_k \nabla_1^{(k)} + e_k$ 。相应地, 滤波值  $\hat{X}'_k$  被修正为：

$$\hat{X}''_k = \bar{X}'_k + K'_k (L''_k - A_k \bar{X}'_k) = \hat{X}'_k + K'_k [\bar{V}'_k + A_k \Phi_{k,k-1} (X_{k-1} - \hat{X}_{k-1})] \tag{8}$$

则问题归结为如何估计滤波误差  $X_{k-1} - \hat{X}_{k-1}$  的值。

由于前  $k-1$  个历元模型没有误差, 因此在第  $k-1$  个历元, 观测残差为：

$$V_{k-1} = A_{k-1} \hat{X}_{k-1} - L_{k-1} = -A_{k-1} (X_{k-1} - \hat{X}_{k-1}) - e_{k-1} \tag{9}$$

由观测残差与预测残差的关系  $V_k = (I - A_k K_k) \bar{V}_k$ , 可得：

$$(A_{k-1} K_{k-1} - I) \bar{V}_{k-1} = A_{k-1} (X_{k-1} - \hat{X}_{k-1}) + e_{k-1} \tag{10}$$

当  $n > m$  时, 利用最小二乘理论<sup>[12]</sup> 可以估计  $X_{k-1} - \hat{X}_{k-1}$ , 即

$$(X_{k-1} - \hat{X}_{k-1})_{LS} = (A_{k-1}^T A_{k-1})^{-1} A_{k-1}^T (A_{k-1} K_{k-1} - I) \bar{V}_{k-1} \tag{11}$$

如果  $A_{k-1}$  严重病态, 则可用岭估计<sup>[13]</sup> 或 Tikhonov 正则化等方法<sup>[14]</sup> 来估计  $X_{k-1} - \hat{X}_{k-1}$ , 岭估计和 Tikhonov 正则化估计分别为：

$$(X_{k-1} - \hat{X}_{k-1})_{Ridge} = (A_{k-1}^T A_{k-1} + k_1 I_m)^{-1} \cdot A_{k-1}^T (A_{k-1} K_{k-1} - I) \bar{V}_{k-1} \tag{12}$$

$$(X_{k-1} - \hat{X}_{k-1})_{Tikhonov} = (A_{k-1}^T A_{k-1} + R_T)^{-1} \cdot A_{k-1}^T (A_{k-1} K_{k-1} - I) \bar{V}_{k-1} \tag{13}$$

其中,  $k_1$  和  $R_T$  分别为岭参数和正则化矩阵。GPS 动态导航定位时, 需要估计的参数往往比较多, 如果观测卫星较少而待估参数较多, 即出现  $n < m$  的情况时, 注意到：

$$I - A_{k-1} K_{k-1} = I - A_{k-1} \Sigma_{X_{k-1}} A_{k-1}^T (A_{k-1} \Sigma_{X_{k-1}} A_{k-1}^T + \Sigma_{k-1})^{-1} = (A_{k-1} \Sigma_{X_{k-1}} A_{k-1}^T + \Sigma_{k-1}) (A_{k-1} \Sigma_{X_{k-1}} A_{k-1}^T + \Sigma_{k-1})^{-1} - A_{k-1} \Sigma_{X_{k-1}} A_{k-1}^T (A_{k-1} \Sigma_{X_{k-1}} A_{k-1}^T + \Sigma_{k-1})^{-1} = \Sigma_{k-1} (A_{k-1} \Sigma_{X_{k-1}} A_{k-1}^T + \Sigma_{k-1})^{-1} \tag{14}$$

即  $I - A_{k-1} K_{k-1}$  可逆, 利用求逆方法, 根据表达式：  
 $\hat{X}_{k-1} - \bar{X}_{k-1} = K_{k-1} (I - A_{k-1} K_{k-1})^{-1} A_{k-1} (X_{k-1} - \hat{X}_{k-1}) + K_{k-1} (I - A_{k-1} K_{k-1})^{-1} e_{k-1}$  (15)

可得证：

$$K_{k-1} (I - A_{k-1} K_{k-1})^{-1} A_{k-1} = (A_{k-1}^T \Sigma_{k-1}^{-1} A_{k-1} + \Sigma_{X_{k-1}}^{-1})^{-1} A_{k-1}^T \Sigma_{k-1}^{-1} (A_{k-1} \Sigma_{X_{k-1}} A_{k-1}^T + \Sigma_{k-1}) \Sigma_{k-1}^{-1} A_{k-1} \tag{16}$$

即  $K_{k-1} (I - A_{k-1} K_{k-1})^{-1} A_{k-1}$  是  $m \times m$  阶的可逆矩阵, 由此可得  $X_{k-1} - \hat{X}_{k-1}$  的估计值为：

$$(\mathbf{X}_{k-1} - \hat{\mathbf{X}}_{k-1})_{\text{estimator}} =$$

$$(\mathbf{K}_{k-1}(\mathbf{I} - \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{K}_{k-1})^{-1}\mathbf{A}_{k-1})^{-1}(\hat{\mathbf{X}}_{k-1} - \bar{\mathbf{X}}_{k-1}) \quad (17)$$

至此,第  $k$  个历元的模型误差已被修正。

### 2.2 后续历元 Kalman 滤波模型误差的修正

假设第  $k$  个历元的滤波值  $\hat{\mathbf{X}}'_k$  已被修正为  $\hat{\mathbf{X}}''_k$ , 则经过推导,可得第  $k+1$  历元的预测残差为:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{V}}'_{k+1} = & \mathbf{A}_{k+1}\bar{\mathbf{X}}'_{k+1} - \mathbf{L}'_{k+1} = -\mathbf{A}_{k+1}\boldsymbol{\Phi}_{k+1,k}(\mathbf{I} - \\ & \mathbf{K}'_k\mathbf{A}_k)\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}(\mathbf{X}_{k-1} - \hat{\mathbf{X}}_{k-1}) - \mathbf{A}_{k+1}\boldsymbol{\Phi}_{k+1,k}\mathbf{D}_k\nabla_2^{(k)} - \\ & \mathbf{A}_{k+1}\boldsymbol{\Phi}_{k+1,k}\mathbf{W}_k - \mathbf{A}_{k+1}\mathbf{D}_{k+1}\nabla_2^{(k+1)} - \mathbf{A}_{k+1}\mathbf{W}_{k+1} - \\ & \mathbf{C}_{k+1}\nabla_1^{(k+1)} - \mathbf{e}_{k+1} \end{aligned} \quad (18)$$

由于已经估计出了  $\mathbf{X}_{k-1} - \hat{\mathbf{X}}_{k-1}$ ,类似于第  $k$  个历元,显然,  $\bar{\mathbf{V}}'_{k+1} + \mathbf{A}_{k+1}\boldsymbol{\Phi}_{k+1,k}(\mathbf{I} - \mathbf{K}'_k\mathbf{A}_k)\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}(\mathbf{X}_{k-1} - \hat{\mathbf{X}}_{k-1})$  包含了第  $k+1$  个历元预测残差体现的所有模型误差。此时,观测值  $\mathbf{L}'_{k+1}$  应修正为:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}''_{k+1} = & \mathbf{L}'_{k+1} + \bar{\mathbf{V}}'_{k+1} + \mathbf{A}_{k+1}\boldsymbol{\Phi}_{k+1,k} \cdot \\ & (\mathbf{I} - \mathbf{K}'_k\mathbf{A}_k)\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}(\mathbf{X}_{k-1} - \hat{\mathbf{X}}_{k-1}) \end{aligned} \quad (19)$$

相应地,滤波值  $\hat{\mathbf{X}}'_{k+1}$  被修正为:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{X}}''_{k+1} = & \hat{\mathbf{X}}'_{k+1} + \mathbf{K}'_{k+1}[\bar{\mathbf{V}}'_{k+1} + \mathbf{A}_{k+1}\boldsymbol{\Phi}_{k+1,k} \cdot \\ & (\mathbf{I} - \mathbf{K}'_k\mathbf{A}_k)\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}(\mathbf{X}_{k-1} - \hat{\mathbf{X}}_{k-1})] \end{aligned} \quad (20)$$

如此修正后,不但消除了当前历元的新增误差项  $\mathbf{A}_{k+1}\mathbf{D}_{k+1}\nabla_2^{(k+1)} + \mathbf{A}_{k+1}\mathbf{W}_{k+1} + \mathbf{C}_{k+1}\nabla_1^{(k+1)} + \mathbf{e}_{k+1}$ ,而且也消除了以往历元的累积误差项  $\mathbf{A}_{k+1}\boldsymbol{\Phi}_{k+1,k}\mathbf{D}_k\nabla_2^{(k)} + \mathbf{A}_{k+1}\boldsymbol{\Phi}_{k+1,k}\mathbf{W}_k$ 。

然而,如果  $\hat{\mathbf{X}}'_k$  没有被修正为  $\hat{\mathbf{X}}''_k$ ,则相应的第  $k+1$  个历元的预测残差为:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{V}}'_{k+1} = & \mathbf{A}_{k+1}\bar{\mathbf{X}}'_{k+1} - \mathbf{L}'_{k+1} = -\mathbf{A}_{k+1}\boldsymbol{\Phi}_{k+1,k}(\mathbf{I} - \\ & \mathbf{K}'_k\mathbf{A}_k)\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}(\mathbf{X}_{k-1} - \hat{\mathbf{X}}_{k-1}) - \mathbf{A}_{k+1}\boldsymbol{\Phi}_{k+1,k}\mathbf{D}_k\nabla_2^{(k)} - \\ & \mathbf{A}_{k+1}\boldsymbol{\Phi}_{k+1,k}\mathbf{W}_k - \mathbf{A}_{k+1}\mathbf{D}_{k+1}\nabla_2^{(k+1)} - \mathbf{A}_{k+1}\mathbf{W}_{k+1} - \\ & \mathbf{C}_{k+1}\nabla_1^{(k+1)} - \mathbf{e}_{k+1} + \mathbf{A}_{k+1}\boldsymbol{\Phi}_{k+1,k}\mathbf{K}'_k(\mathbf{A}_k\mathbf{D}_k\nabla_2^{(k)} + \\ & \mathbf{A}_k\mathbf{W}_k + \mathbf{C}_k\nabla_1^{(k)} + \mathbf{e}_k) \end{aligned} \quad (21)$$

由式(18)可以看出,相对于  $\bar{\mathbf{V}}'_{k+1}$  而言,  $\bar{\mathbf{V}}''_{k+1}$  的表达式中少的误差项正是由于  $\hat{\mathbf{X}}'_k$  被修正为  $\hat{\mathbf{X}}''_k$  而消除的。

对于第  $k+2$  个历元,如果经检验模型含有误差,那么修正的方法又有所不同。假设第  $k$  个历元的滤波值  $\hat{\mathbf{X}}'_k$  和第  $k+1$  个历元的滤波值  $\hat{\mathbf{X}}''_{k+1}$  已分别被修正为  $\hat{\mathbf{X}}''_k$  和  $\hat{\mathbf{X}}'''_{k+1}$ ,经过分析可得,第  $k+2$  个历元的观测值  $\mathbf{L}'_{k+2}$  应修正为:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}''_{k+2} = & \mathbf{L}'_{k+2} + \bar{\mathbf{V}}''_{k+2} + \mathbf{A}_{k+2}\boldsymbol{\Phi}_{k+2,k+1}(\mathbf{I} - \\ & \mathbf{K}'_{k+1}\mathbf{A}_{k+1})\boldsymbol{\Phi}_{k+1,k}(\mathbf{I} - \mathbf{K}'_k\mathbf{A}_k)\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}(\mathbf{X}_{k-1} - \hat{\mathbf{X}}_{k-1}) \end{aligned} \quad (22)$$

相应地,滤波值  $\hat{\mathbf{X}}''_{k+2}$  应修正为:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{X}}'''_{k+2} = & \hat{\mathbf{X}}''_{k+2} + \mathbf{K}'_{k+2}[\bar{\mathbf{V}}''_{k+2} + \mathbf{A}_{k+2}\boldsymbol{\Phi}_{k+2,k+1}(\mathbf{I} - \\ & \mathbf{K}'_{k+1}\mathbf{A}_{k+1})\boldsymbol{\Phi}_{k+1,k}(\mathbf{I} - \mathbf{K}'_k\mathbf{A}_k)\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}(\mathbf{X}_{k-1} - \hat{\mathbf{X}}_{k-1})] \end{aligned} \quad (23)$$

综上所述,第  $k$  个历元采用  $\bar{\mathbf{V}}'_k + \mathbf{A}_k\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}(\mathbf{X}_{k-1} - \hat{\mathbf{X}}_{k-1})$  修正观测值,第  $k+1$  个历元采用  $\bar{\mathbf{V}}'_{k+1} + \mathbf{A}_{k+1}\boldsymbol{\Phi}_{k+1,k}(\mathbf{I} - \mathbf{K}'_k\mathbf{A}_k)\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}(\mathbf{X}_{k-1} - \hat{\mathbf{X}}_{k-1})$  修正观测值,第  $k+2$  个历元采用  $\bar{\mathbf{V}}''_{k+2} + \mathbf{A}_{k+2}\boldsymbol{\Phi}_{k+2,k+1}(\mathbf{I} - \mathbf{K}'_{k+1}\mathbf{A}_{k+1})\boldsymbol{\Phi}_{k+1,k}(\mathbf{I} - \mathbf{K}'_k\mathbf{A}_k)\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}(\mathbf{X}_{k-1} - \hat{\mathbf{X}}_{k-1})$  修正观测值。事实上,第  $s(s > k)$  个历元观测值的修正值相对于第  $s-1$  个历元观测值的修正值而言,除了把第  $s-1$  个历元的预测残差换成第  $s$  个历元的预测残差外,只是变化了一个系数矩阵,由此可得到下面的迭代公式。

### 2.3 基于模型误差修正的滤波迭代公式

由以上分析,可以归纳出模型误差修正的迭代规律和相应的滤波修正的迭代公式如下。

1) 对于前  $k-1$  个历元,模型中除了随机误差外没有其他误差,则按标准 Kalman 滤波递推公式进行估计。

2) 在第  $k$  个历元,模型开始出现误差。设  $\mathbf{X}_{k-1} - \hat{\mathbf{X}}_{k-1}$  的估值为  $\bar{\mathbf{X}}_{k-1} - \hat{\mathbf{X}}_{k-1}$ ,那么第  $k$  个历元的滤波迭代公式( $l=k$ )为:

$$\bar{\mathbf{X}}_l = \boldsymbol{\Phi}_{l,l-1}\hat{\mathbf{X}}_{l-1} \quad (24)$$

$$\hat{\mathbf{X}}'_l = \bar{\mathbf{X}}_l + \mathbf{K}'_l(\mathbf{L}'_l - \mathbf{A}_l\bar{\mathbf{X}}_l) \quad (25)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}'_{X'_l} = \boldsymbol{\Phi}_{l,l-1}\boldsymbol{\Sigma}_{X'_{l-1}}\boldsymbol{\Phi}_{l,l-1}^T + \boldsymbol{\Sigma}'_{w_l} \quad (26)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}'_{X''_l} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}'_l\mathbf{A}_l)\boldsymbol{\Sigma}'_{X'_l}(\mathbf{I} - \mathbf{K}'_l\mathbf{A}_l)^T + \mathbf{K}'_l\boldsymbol{\Sigma}'_{X'_l}\mathbf{K}'_l{}^T_l \quad (27)$$

$$\mathbf{K}'_l = \boldsymbol{\Sigma}'_{X'_l}\mathbf{A}_l^T(\mathbf{A}_l\boldsymbol{\Sigma}'_{X'_l}\mathbf{A}_l^T + \boldsymbol{\Sigma}'_l)^{-1} \quad (28)$$

$$\bar{\mathbf{V}}'_l = \mathbf{A}_l\bar{\mathbf{X}}_l - \mathbf{L}'_l \quad (29)$$

$$\hat{\mathbf{X}}''_l = \hat{\mathbf{X}}'_l + \mathbf{K}'_l(\bar{\mathbf{V}}'_l + \mathbf{A}_l\boldsymbol{\Phi}_{l,l-1}\bar{\mathbf{X}}_{l-1} - \hat{\mathbf{X}}_{l-1}) \quad (30)$$

$$\mathbf{M}_l = (\mathbf{I} - \mathbf{K}'_l\mathbf{A}_l)\boldsymbol{\Phi}_{l,l-1}\bar{\mathbf{X}}_{l-1} - \hat{\mathbf{X}}_{l-1} \quad (31)$$

3) 对于第  $k$  个历元之后的历元,如果经检验没有模型误差,就无需对其进行修正;反之,如果检验出存在模型误差,则对其进行修正,滤波迭代公式( $l > k$ )同式(24)~式(31)。

由以上迭代公式可见,本文给出的滤波修正方法同标准 Kalman 滤波一样,只需存储前一个历元的信息,具有实时性,满足动态导航定位的需要。如果经过修正之后,发现滤波精度还是变差,这就说明模型误差已经大得离谱了,这时应尽快找出和消除产生模型误差的原因,使得后续历元除了随机误差之外不再含有其他的模型误差。

## 3 算例与分析

本算例数据观测于 2004 年 7 月 28 日凌晨 3:33 至 3:56,共 23 min,采样率为 2 s,共得到 682 个历元,天线高为 2.17 m,东北向偏差为 0

m,观测到的卫星是 PRN9、15、18、21,实测得到了 682 个历元的观测值。用 NAVGPS 软件对这段数据进行处理后,得到运动物体的三维坐标值,将此坐标值视为运动物体在运动过程中的三维坐标真值。利用观测值和运动物体坐标真值模拟出常速度动力学模型,并在观测模型中加入服从标准正态分布的随机数作为观测噪声,在动力学模型的系数矩阵中加入  $10^{-11}$  倍的服从标准正态分布的随机数作为随机噪声,由此模拟 4 颗观测卫星进行伪距定位的情况。

为了体现本文方法的优越性,在第 298~302 个历元加入动力学扰动,在第 300 个、301 个历元和第 400 个历元的实测观测值上分别加上粗差

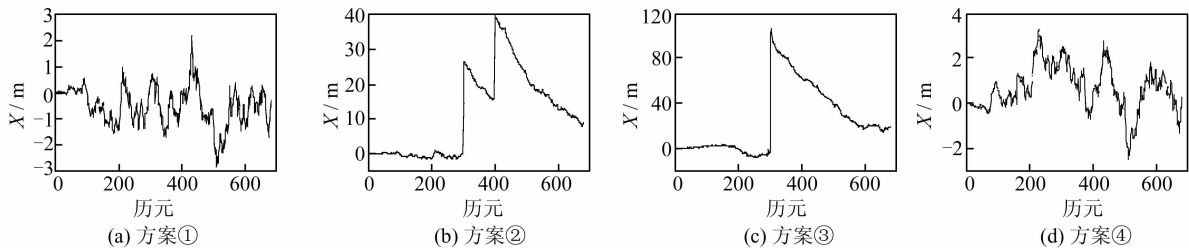


图 1 各方案 X 分量的滤波误差  
Fig.1 Filtering Error of X in Different Schemes

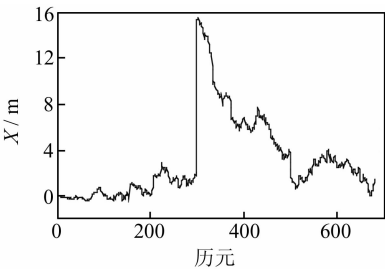


图 2 后续历元仍按第 300 个历元方法修正的 X 分量的滤波误差

Fig.2 Filtering Error of Succeeding Epochs Corrected as the Epoch 300

分析计算结果可得:

1) 由图 1(a)可知,在没有模型误差时,滤波误差不超过 3 m;当模型出现误差时,如果不对模型进行修正,如图 2 所示,最大滤波误差接近 40 m,并且每次出现模型误差的历元正是滤波误差突然增大的历元;如果用本文给出的修正方法进行修正,无论出现几次模型误差,修正后的滤波误差不超过 4 m。由此可以看出,本文给出的模型误差探测与修正方法有效地控制了模型误差对滤波的影响,提高了滤波精度。

2) 采用方案②计算所得的滤波结果精度非常差。第 300 个和第 301 个历元的误差使得滤波结果偏离真值很远,偏差超过 25 m;第 400 个历

[6.5,2.5,0,0]、[1.5,7.5,0,0]和[3.5,6.5,0,0],并设计下列四种方案进行计算:① 采用没有加模型误差的数据,用标准 Kalman 滤波计算;② 采用添加了模型误差的数据,用标准 Kalman 滤波计算;③ 采用添加了模型误差的数据,用 M-M 滤波<sup>[4,15]</sup>计算;④ 采用添加了模型误差的数据,用本文给出的 Kalman 滤波修正方法计算。

以滤波值和运动物体坐标真值的坐标差刻画滤波误差,则四种方案的滤波误差变化情况如图 1 所示,这里只给出了 X 分量的坐标差。对于第 301 个和第 400 个历元,如果均简单地按第 300 个历元的修正方法进行修正,其滤波误差变化情况如图 2 所示。

元的模型误差使滤波误差进一步增大,最大误差接近 40 m;从第 400 个历元开始直到第 682 个历元,滤波值都没有收敛。因此,模型误差对标准 Kalman 滤波的影响非常大。

3) 方案③的计算效果也不理想,在第 301 个历元,滤波误差从 2 m 迅速达到 100 m,滤波精度变得很坏。实际上,M-M 滤波存在同时增大缩小增益矩阵的矛盾,不能起到同时抵制动力学扰动和观测粗差的作用<sup>[13]</sup>。

4) 由图 2 可知,在第 301 个历元,若简单地以第 300 个历元的修正方法对其修正,则滤波误差达到 16 m。由此可见,这种方法只能消除第 300 个历元模型误差的影响,却无法抵制第 301 个历元模型误差的影响。所以当相邻历元均含有模型误差时,对后续历元的修正一定要谨慎,不可简单地按照前一历元的修正方法进行修正。

5) 由于 GPS 动态导航受到的扰动比较多,为了提高导航效率,对于可接受范围之内的小的扰动无需再修正,所以检验模型是否含有误差时, $\chi^2$  检验的临界值应取大一点,建议取显著性水平  $\alpha=0.001$ 。

6) 当模型含有误差时,采用本文提出的方法虽然有效地控制了模型误差的影响,但是当模型误差很多时,无论用什么方法修正,滤波精度都可

能变坏。为此,在进行滤波时,一旦发现模型含有较多误差,在用本文方法进行修正的同时,应尽快找到出现模型误差的原因,并消除模型误差,以便得到高精度的滤波值。

参 考 文 献

[1] 付梦印,邓志红,张继伟. 动态 Kalman 滤波理论及其在导航系统中的应用[M]. 北京:科学出版社, 2003

[2] 张双成,杨元喜,张勤. 一种基于抗差自校正 Kalman 滤波的 GPS 导航算法[J]. 武汉大学学报·信息科学版,2005,30(10): 881-884

[3] 汪志明,花向红,陈远,等. GPS/DR 组合 Kalman 滤波模型及性能分析[J]. 武汉大学学报·信息科学版,2009,34(9):1 102-1 105

[4] 杨元喜. 自适应动态导航定位[M]. 北京:测绘出版社, 2006

[5] Jazwinsky A H. Stochastic Processes and Filtering Theory[M]. New York: Academic Press, 1970

[6] 杨元喜,张双成. 导航解算中的系统误差及其协方差矩阵拟合[J]. 测绘学报, 2004, 33(3): 189-194

[7] Teunissen P J G. An Integrity and Quality Control Procedure for Use in Multi Sensor Integration[C].

ION GPS-90, Colorado, USA, 1990

[8] 陶本藻. 卡尔曼滤波模型误差的识别[J]. 地壳形变与地震,1999,19(4):15-20

[9] 王国富,朱建军. 含有粗差观测值的自适应滤波[J]. 测绘通报,2004(4):19-21

[10] 宋迎春,朱建军,陈正阳. 动态定位解算中测量粗差的探测与修复[J]. 测绘科学,2003,31(5):39-41

[11] 宋迎春,朱建军,陈正阳. 动态定位的模型偏差检测与校正[J]. 测绘学报, 2005, 34(4): 294-299

[12] 王松桂. 线性模型的理论及其应用[M]. 合肥:安徽教育出版社,1987

[13] Gui Qingming, Liu J S. Biased Estimation in Gauss-Markov Model [J]. AVN, 2000, 107 (3): 104-108

[14] 王振杰. 测量中不适定问题的正则化解法[M]. 北京:科学出版社, 2006

[15] 归庆明,许阿裴,韩松辉. 分步抗差自适应滤波及其在 GPS 动态导航中的应用[J]. 武汉大学学报·信息科学版,2009,34(6): 719-723

第一作者简介:归庆明,教授,博士生导师,主要从事测量误差理论与数据处理的研究。  
E-mail:guiqm@public. zz. ha. cn

Adaptation of Model Errors in Kalman Filtering

GUI Qingming<sup>1, 2</sup> HAN Songhui<sup>2</sup>

(1 Institute of Science, Information Engineering University, 62 Kexue Road, Zhengzhou 450001, China)

(2 Institute of Surveying and Mapping, Information Engineering University, 66 Middle Longhai Road, Zhengzhou 450052, China)

**Abstract:** Based on predicted residual analysis and estimation of filtering errors, a new Kalman filter approach to correct model errors is proposed. Considering the expression of predicted residual, there is no need to discuss whether model errors are from measurement model or dynamic model. Based on the estimation of filtering errors, we just need to correct the measurement model to clear up the whole effects of model errors on the filtering value at current time. A GPS kinematic navigation calculative experiment is given to prove the feasibility of this method. It not only eliminates the whole effect of Kalman filtering model errors efficiently, but also has a good result.

**Key words:** GPS kinematic navigation; Kalman filtering; model errors; predicted residual; filtering error

About the first author: GUI Qingming, professor, Ph.D supervisor. He is engaged in the theoretic research on data processing.  
E-mail: guiqm@public. zz. ha. cn