



武汉大学学报(信息科学版)

Geomatics and Information Science of Wuhan University

ISSN 1671-8860, CN 42-1676/TN

《武汉大学学报(信息科学版)》网络首发论文

题目：垂线偏差测量方法现状与展望
作者：金鑫，郭金运，李振洪
DOI：10.13203/j.whugis20240504
收稿日期：2024-12-31
网络首发日期：2025-01-23
引用格式：金鑫，郭金运，李振洪. 垂线偏差测量方法现状与展望[J/OL]. 武汉大学学报(信息科学版). <https://doi.org/10.13203/j.whugis20240504>



网络首发：在编辑部工作流程中，稿件从录用到出版要经历录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿等阶段。录用定稿指内容已经确定，且通过同行评议、主编终审同意刊用的稿件。排版定稿指录用定稿按照期刊特定版式（包括网络呈现版式）排版后的稿件，可暂不确定出版年、卷、期和页码。整期汇编定稿指出版年、卷、期、页码均已确定的印刷或数字出版的整期汇编稿件。录用定稿网络首发稿件内容必须符合《出版管理条例》和《期刊出版管理规定》的有关规定；学术研究成果具有创新性、科学性和先进性，符合编辑部对刊文的录用要求，不存在学术不端行为及其他侵权行为；稿件内容应基本符合国家有关书刊编辑、出版的技术标准，正确使用和统一规范语言文字、符号、数字、外文字母、法定计量单位及地图标注等。为确保录用定稿网络首发的严肃性，录用定稿一经发布，不得修改论文题目、作者、机构名称和学术内容，只可基于编辑规范进行少量文字的修改。

出版确认：纸质期刊编辑部通过与《中国学术期刊（光盘版）》电子杂志社有限公司签约，在《中国学术期刊（网络版）》出版传播平台上创办与纸质期刊内容一致的网络版，以单篇或整期出版形式，在印刷出版之前刊发论文的录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿。因为《中国学术期刊（网络版）》是国家新闻出版广电总局批准的网络连续型出版物（ISSN 2096-4188，CN 11-6037/Z），所以签约期刊的网络版上网络首发论文视为正式出版。

DOI: 10.13203/j.whugis20240504

引用格式：金鑫，郭金运，李振洪. 垂线偏差测量方法现状与展望[J]. 武汉大学学报（信息科学版），2025, DOI:10.13203/J.whugis20240504. (JIN Xin, GUO Jinyun, LI Zhenhong. Current Status and Prospects of Vertical Deflection Measurement Methods[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2025, DOI:10.13203/J.whugis20240504.)

垂线偏差测量方法现状与展望

金鑫^{1,2} 郭金运^{2*} 李振洪³

1 兰州交通大学测绘与地理信息学院，甘肃 兰州 730070

2 山东科技大学测绘与空间信息学院，山东 青岛 266590

3 长安大学地质工程与测绘学院，陕西 西安 710054

摘要：垂线偏差是描述地球形态和重力场特征的核心参数，在大地测量、地球物理、地质灾害监测以及海洋科学等领域具有重要意义。系统梳理了当前垂线偏差测量的主要方法，包括天文大地测量法、GNSS水准测量法、重力测量法、重力场球谐系数解算法和卫星测高反演法等，分析了各方法的优缺点及适用性。针对现有方法在复杂天气条件下的局限性，特别是全天候条件下的高精度测量需求，重点探讨了全天候垂线偏差测量方法的发展潜力。结合仪器设备的进步和数据处理技术的发展，展望了垂线偏差测量未来的发展趋势，指出天文大地测量设备的小型化与商业化、全天候垂线偏差测量方法的应用以及海洋垂线偏差实测方法的突破将是未来研究的重点方向。通过设备创新、技术融合和多领域应用拓展，垂线偏差测量技术将在服务地球科学研究与实际工程需求中发挥更大的作用。

关键词：垂线偏差；测量方法；天文大地测量；全天候测量；海洋垂线偏差

中图分类号：TP208

文献标识码：A

收稿日期：2024-12-31

Current Status and Prospects of Vertical Deflection Measurement Methods

JIN Xin^{1,2} GUO Jinyun², LI Zhenhong³

1 Faculty of Geomatics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China

2 College of Geodesy and Geomatics, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590, China

3 College of Geological Engineering and Geomatics, Chang'an University, Xi'an 710054, China

Abstract: Vertical deflection is a core parameter for describing the Earth's shape and gravity field characteristics, holding significant importance in geodesy, geophysics, geological hazard monitoring, and marine sciences. This paper systematically reviews the main methods for measuring vertical deflection, including astronomical geodetic methods, GNSS leveling, gravimetric methods, spherical harmonic solutions of the gravity field, and satellite altimetry inversion. The advantages, disadvantages, and applicability of each method are analyzed. Among these, direct measurement methods (such as astronomical geodesy, integrated GNSS with CCD technology, and GNSS/leveling measurements) can achieve high-precision vertical deflection measurements due to their real-time data acquisition capabilities, but they are limited by environmental conditions and equipment performance. On the other hand, indirect measurement methods (such as gravimetric methods, spherical harmonic solutions of the gravity field, and satellite altimetry) use existing data for calculations, offering higher computational efficiency, but their accuracy depends on high-precision, high-resolution gravity field models or the quality of input data. In general, astronomical geodetic methods (integrated GNSS with total stations for DOV measurements, and integrated GNSS with CCD for DOV measurements) remain the primary approach for directly measuring high-precision vertical deflections and

基金项目：国家自然科学基金（42274006，42430101）；国家资助博士后研究人员计划（GZC20231019）；兰州交通大学天佑博士后科学基金项目（TYBSH_KJ_202406）。

第一作者：金鑫，博士，讲师，研究方向为垂线偏差测量。xinjin@lzjtu.edu.cn

通信作者：郭金运，博士，教授。guojy@sdust.edu.cn

are suitable for high-precision requirements in static environments. GNSS leveling methods have been widely applied in ground measurements and regional mapping, but their application is challenging in complex terrain conditions. Spherical harmonic solutions of the gravity field and satellite altimetry methods, with their broad coverage advantages, play a key role in marine vertical deflection measurement and global gravity field research. However, each method has certain limitations, and the need for all-weather, high-precision, automated vertical deflection measurements remains a pressing challenge. Due to the limitations of existing methods in complex weather conditions, particularly the demand for high-precision measurements in all-weather conditions, this paper focuses on the development potential of all-weather vertical deflection measurement methods. It elaborates on a new all-weather vertical deflection measurement method that integrates GNSS with three-dimensional laser tracking technology. Finally, by considering the advances in instrumentation and data processing technologies, the paper looks forward to the future development trends in vertical deflection measurement. It highlights that the miniaturization and commercialization of astronomical geodetic equipment, the application of all-weather vertical deflection measurement methods, and breakthroughs in marine vertical deflection measurement techniques will be key research directions in the future. Through equipment innovation, technological integration, and expansion into multiple fields, vertical deflection measurement technology will play an even greater role in supporting Earth science research and meeting practical engineering needs.

Key words: vertical deflection; measurement methods; astronomical geodesy; all-weather measurement; marine vertical deflection

垂线偏差 (deflection of the vertical, DOV) 是铅垂线与参考椭球面法线之间的夹角, 表示大地水准面相对于参考椭球面的倾斜程度, 表征了地球内部质量分布的时空不均匀性^[1-2]。垂线偏差给出了重力矢量的方向, 是大地测量的基本观测量^[3-4], 含有丰富的重力场高频信息, 可用于推求平均地球椭球的大小、形状, 精化大地水准面模型^[5-6], 归算天文大地测量数据^[7-8], 也可用于空间技术和精密工程测量^[9-10]。通过垂线偏差的时变研究验证了其变化与地震两者之间有着十分密切的关系, 为大地震的监测提供了新的手段^[11-12]。总之, 垂线偏差能够提供丰富的地球重力场和大地水准面精细结构信息, 在解决大地测量应用、地球物理反演、资源勘探、地震和火山监测、卫星发射和精密定轨以及辅助导航等领域有着非常重要的意义^[13-17]。

垂线偏差的测量方法主要包括天文大地测量方法、全球导航卫星系统 (global navigation satellite system, GNSS) /水准测量方法、重力测量方法、重力场球谐系数解算法和卫星测高测量方法等。天文大地测量法是垂线偏差经典的测量方法, 主要利用高精度天文经纬仪或者数字天顶相机系统^[18-20], 对恒星进行观测, 实现高精度垂线偏差测量。GNSS 水准测量法是基于 GNSS 观测数据和精密水准测量数据, 在几何观测原理的基础之上, 利用最小二乘法通过高程异常与垂线偏差之间的约束关系来求解垂线偏差。重力测量法通常是利用重力异常等数据, 基于重力数据和垂线偏差之间的关系来解算垂线偏差, 这两种方法属于间接测量法。重力场球谐系数解算法是根据事先解算好的地球重力场模型, 利用模型的重力位系数计算垂线偏差。卫星测高测量法主要是根据测高点在测高纪录时刻的位置和时间信息, 利用海面高观测量计算沿轨大地水准面梯度, 进而解算垂线偏差模型。

这些主要的垂线偏差确定方法按照测量方式和数据处理模式, 可以分为间接测量 (静态数据估算方法) 和直接测量 (动态数据测量方法)。相对于直接测量, 间接测量方法较为简单, 只需要通过已获得数据建立其与垂线偏差之间的关系, 便可通过已知数据解算垂线偏差。而直接测量受到外界环境的影响较大, 所以对数据的实时处理以及测量仪器精度等方面有较高的要求。重力测量、重力场球谐系数解算法、卫星测高等方法都属于间接测量。传统的天文大地测量、集成 GNSS 和电荷耦合器件 (charge coupled device, CCD) 技术、GNSS/水准测量属于直接测量法。

1 垂线偏差直接测量方法进展

1.1 天文大地测量法

天文大地测量是最常用的高精度垂线偏差测量方法，在同一测站进行天文观测和大地测量，得到该站的天文坐标 (φ, λ) 和大地坐标 (B, L) ，天文坐标是以铅垂线为基础的，大地坐标是以参考椭球面法线为基础的，因此就可以计算垂线偏差 (ξ, η) [19]:

$$\begin{cases} \xi = \varphi - B \\ \eta = (\lambda - L) \cos \varphi \end{cases} \quad (1)$$

由于该测量方法涉及天文测量，使得天文观测技术成为垂线偏差测量发展的重要推动力。早期的天文大地测量主要由天文经纬仪观测较明亮的恒星[21]，最典型观测仪器是瑞士威特公司生产的 WILD T4 全能经纬仪，如图 1 所示。它可以采用东西星等高法测定天文经度，南北星中天高差法测定天文纬度，精度可达 $0.3''$ [22]。



图 1 Wild T4 全能经纬仪[22]

Fig. 1 Wild T4 theodolite[22]

然而，传统的天文大地测量存在诸多局限，如：在传统天文大地测量中都是人工寻找待测恒星，耗时较长，相邻 2 颗待测恒星观测时间间隔应大于 3 min [23]。此外，在观测过程中，时常会出现星位分布很好，但因时间相距较近而要舍去一颗恒星的情况，这势必要再等待较近位置下一颗恒星，导致整个测量效率下降。不仅如此，传统的测量仪器过于庞大笨重，不易携带；设备操作复杂，观测的准备和程序多而杂；观测操作技术要求高，需要测量人员进行专业的技术培训，尤其是收时、读表的操作，观测员劳动大，需要全程用人眼寻星和观测目标；计算工作量大，数据记录和解算完全需要人工完成。尽管该仪器设计精密，测量精度高，但是因为其测量效率低下，WILD T4 全能经纬仪在 20 世纪已停产，中国一直使用其进行天文大地测量至本世纪初，现已基本停止使用[24]。在现代天文大地测量中，T4 逐渐被其他仪器所取代。

20 世纪 70 年代以后，摄影测量技术的进步为天文大地测量技术带来了很大的机遇，摄影天顶筒通过精确拍摄天顶附近恒星，匹配星表确定测站点的天文坐标，进而计算垂线偏差，使得天文大地测量方法已进入半自动化甚至全自动化阶段，测量效率和精度也相对提高，但是单一测站数据处理通常需要 $3\sim 5 \text{ h}$ ，不仅需要较多的人力和物力，效率较低，还需要较高的投入[25]。比较有代表性的仪器如瑞士纳沙泰尔天文台的 Grubb & Parsons 照相天顶筒，见图 2。

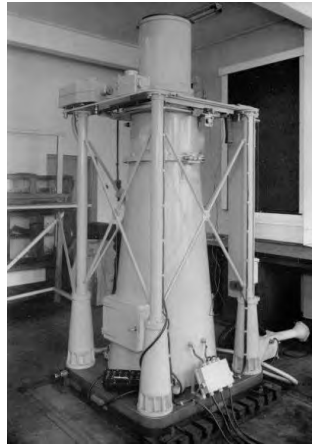


图 2 Grubb & Parsons 照相天顶筒^[26]

Fig. 2 Grubb & Parsons photographic zenith tube^[26]

1.1.1 基于电子经纬仪/全站仪的垂线偏差测量法

20 世纪 90 年代初，随着电子经纬仪/全站仪和计算机技术的发展，以及 GPS 技术的成功应用，垂线偏差的测量达到半自动化观测阶段，瑞士、德国、希腊等国家都研制了全站仪天文定位系统^[27]。具有代表性的是瑞士苏黎世联邦理工学院研制的 ICARUS 系统，其利用计算机控制普通全站仪，沿用经典的東西星等高法测定天文经度、南北星中天高差法测定天文纬度，定位精度达到 0.5"。

与国外相比，中国国内相关单位的研究也取得了丰富成果。信息工程大学研制出了基于全站仪和卫星天文计时器的 Y/JGT-01 型天文大地测量系统，如图 3 所示，天文定位精度也可达到 0.3"，符合中国一等天文精度要求^[23]。火箭军工程大学也研制了类似的 ASCA-1 型天文定位系统，其精度也能够满足中国一等天文测量要求，已在国防和军事领域中得到了较好应用。



图 3 Y/JGT-01 系统^[23]

Fig. 3 Y/JGT-01 System^[23]

综上所述，基于经纬仪/全站仪观测系统可以自动寻星和自动处理观测数据，观测技术和数据处理方法逐步完善，测量效率和精度相对提升。但对恒星的观测仍然依赖于人眼瞄准，限制其进一步发展。而且观测员需经过长期培训，但肉眼照准存在固有偏差（即人仪差），会引入系统误差，且需定期在天文已知点进行校正。测量时对天气依赖性强，当云雾遮挡部分等高带时，会导致某些方位恒星无法观测，进一步限制了设备的实用性。

1.1.2 基于电荷耦合器件（charge coupled device, CCD）技术的垂线偏差测量法

21 世纪初，CCD 传感技术、GPS、计算机技术的成熟和发展为天文大地测量带来了革命性的进展。

高分辨、小型化的 CCD 替代了传统的照相底片，高精度的 GPS 卫星授时替代了传统的无线电授时，计算机的程序化控制减少了人为因素的干扰，实现了数字天顶仪的自动观测及数据的自动处理，观测效率和测量精度有了显著提高。德国、瑞士等国相继研制出数字化天顶相机系统，目前比较著名的数字天顶仪主要有瑞士苏黎世联邦理工学院研制的 DIADEM（如图 4 所示）和德国汉诺威大学研制的 TZK2-D（如图 5 所示）。通过 20~30 min 的观测，垂线偏差测量精度达到 $0.08''$ ^[2,28]。DIADEM 和 TZK2-D 两个系统在德国的相同站点进行了长时间比对测量，差异小于 $0.1''$ ，这也一定程度上说明数字天顶仪具有较好的外符合精度。两个测量系统的成功研制为垂线偏差流动测量提供了仪器基础，逐渐得到许多国家的重视，推动了 CCD 地面光学测地仪器的研制与应用。

后来，奥地利维也纳技术大学也研制了小型的 CCD 天顶相机系统 ZCG1^[29]。其在欧洲和美洲的许多发达国家被用于局部和区域大地水准面确定和其他地球物理学研究，但是造价昂贵。波兰克拉科夫 AGH 科技大学研制了 PZL-100 数字天顶仪^[30]，日本和土耳其也研制了自己的数字天顶仪^[31-32]。

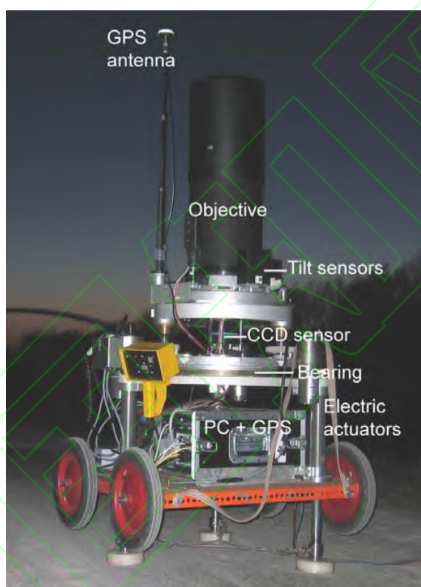


图 4 TZK2-D 数字天顶照相测量系统^[18]

Fig. 4 TZK2-D digital zenith camera system^[18]



图 5 DIADEM 数字天顶照相测量系统^[28]

Fig. 5 DIADEM digital zenith camera system^[28]

与国外相比，中国国内垂线偏差测量系统的研究起步相对较晚，在样机设计、研发以及数据处理方法上充分吸收了国外的成功经验，同时做了许多改进。2011 年中国科学院国家天文台和山东科技大学联合研制了我国第一台数字天顶测量系统 DZT-1，如图 6 所示，理论分析以及实际观测结果均表明，天文经纬度测量精度达到了中国一等天文精度要求^[19, 33-35]。西安航光仪器厂与火箭军工程大学也联合研制了数字天顶仪^[36]，并成功应用于 2020 年珠穆朗玛峰高程测量任务中。

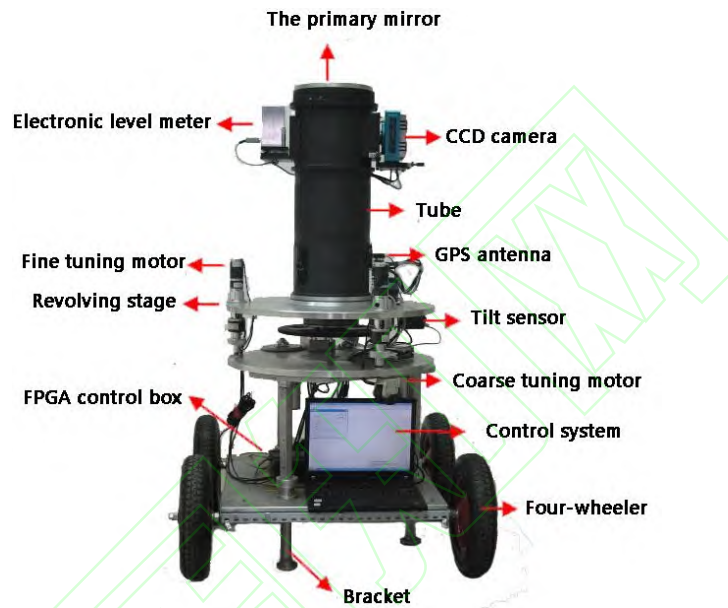


图 6 DZT-1 数字天顶测量系统^[33]

Fig. 6 DZT-1 digital zenith telescope system^[33]

近些年，为了推动数字天顶仪的普及应用，研究热点逐步向小型化方向发展。苏黎世联邦理工学院对 DIADEM 进行了升级，开发出紧凑型数字天文学相机（CODIAC），并制造了两台 CODIAC 测量系统，分别命名为“Blue”和“Red”，保持了与 DIADEM 相同的测量效率和测量精度^[37-38]。随后，拉脱维亚大学也开发了 VESTA 测量系统。CODIAC 的测量精度优于 $0.05''$ ，而 VESTA 的精度约为 $0.1''$ ^[39-40]。这两种数字天顶相机（DZC）是过去十年中使用最广泛的系统，在众多测量调查活动中证明了其有效性。CODIAC 在美国 GSVS(Geoid SlopeValidation Survey)2014 项目中观测了 204 个站点的垂线偏差^[41]，又在 GSVS 的 2017 项目中观测了 223 个站点的垂线偏差，用于验证中等山地和高山地区大地水准面精度^[42]。

对于图像全站仪系统，瑞士苏黎世联邦理工学院基于全站仪开发了 QDeadalus 系统，如图 7 所示，利用 CCD 相机以非破坏性的方式替代现有全站仪的目镜，实现了恒星的自动成像观测^[43]。美国国家地理测量局（NGS）于 2020 年开发了全站仪天文大地测量控制系统（TSACS），通过天文大地测量方式验证大地水准面模型^[44]。信息工程大学依托徕卡 TS60 图像全站仪，提出了一种利用图像全站仪实现高精度、全自动垂线偏差测量的方法，通过在河南郑州和陕西泾阳的野外试验，测得垂线偏差精度为 $0.18''\sim 0.23''$ ，说明图像全站仪在保证高精度的同时，具备了较高的测量效率和单人操作的优势^[45]。

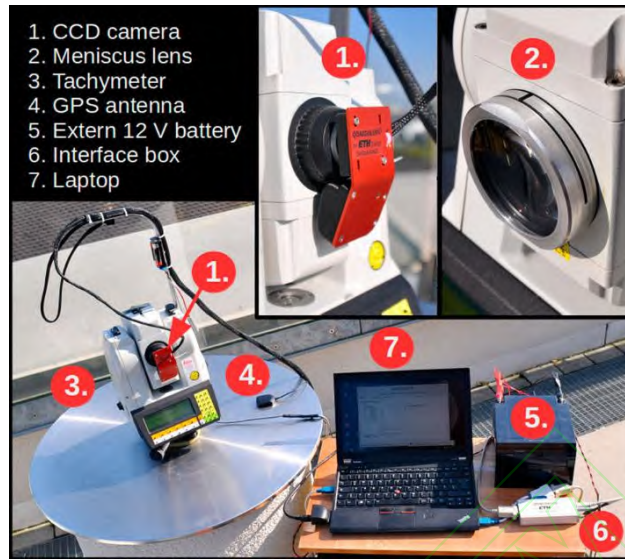


图 7 QDaedalus 系统^[43]

Fig. 7 QDaedalus system^[43]

总的来说，这些仪器在测量原理上具有相似性，包括从参考星表中选择天顶区域的恒星，精确计算它们的视位置，并通过参考星进行星像识别。数字天顶相机和图像全站仪系统都集成了 CCD，实现了恒星的自动观测与成像，并据此确定天文坐标。然而，要完成高水平的天文点测量，这些测量系统都需要在晴朗夜晚观测星等较低的恒星，对天气条件要求较高，无法实现全天候观测。此外，尽管经过小型化设计，测量仪器仍然体积庞大，且重量至少要 50 kg，通常需借助车辆运输，在山区、海岛等交通不便地区的应用受到限制。

1.2 GNSS 水准测量法

GNSS/水准测量方法是获取垂线偏差的一种直接测量方法，它综合 GNSS 和水准测量数据，利用最小二乘法通过大地水准面起伏与垂线偏差之间的约束关系来求解垂线偏差，必须同时进行 GNSS 测量和水准测量，以获得大地水准面起伏之间的差异^[1, 46]。

由大地高和正高的关系可知：

$$H = h + N \quad (2)$$

其中， H 为大地高， h 为正高， N 为大地水准面高。将其转换成 GNSS/水准基线：

$$\Delta H = \Delta h + \Delta N \quad (3)$$

式中， ΔH 为基线两 endpoints 的大地高差， Δh 为正高高差， ΔN 为基线两 endpoints 之间的大地水准面高之差。 ΔH 可通过 GNSS 差分定位， Δh 通过精密水准测量，进而可以求得 ΔN 。

当基线两 endpoints 距离较近，垂线偏差可看作：

$$-\frac{\Delta N}{\Delta S} \approx \xi \cos \alpha_{AB} + \eta \sin \alpha_{AB} \quad (4)$$

式中， ΔS 为基线 AB 之间的距离， α_{AB} 为基线 AB 的方位角， ξ 和 η 为垂线偏差的子午分量和卯西分量。则垂线偏差 μ 为：

$$\mu = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha \quad (5)$$

由式(4)和式(5)可知, $\mu = (\Delta h - \Delta H) / \Delta S$, 然后对其进行误差传播定律可得:

$$m_{\mu}^2 = \frac{1}{\Delta S^2} (m_{\Delta h}^2 + m_{\Delta H}^2) + \left(\frac{\Delta h - \Delta H}{\Delta S} \right)^2 m_{\Delta S}^2 \quad (6)$$

其中, m_{μ} 为垂线偏差中误差, $m_{\Delta h}$ 和 $m_{\Delta H}$ 分别为 Δh 和 ΔH 的中误差, $m_{\Delta S}$ 为 ΔS 的中误差。

考虑到由 GNSS 测得的水平距离误差对垂线偏差的影响很小, 省略去距离的中误差, 可得:

$$m_{\mu}^2 = \frac{1}{\Delta S^2} (m_{\Delta h}^2 + m_{\Delta H}^2) \quad (7)$$

由此可以看出, 当 GNSS 和水准测量精度一定时, 垂线偏差的误差仅与水平距离有关。

若有两条 GNSS 基线边, 则有:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \xi \cos \alpha_1 + \eta \sin \alpha_1 \\ \delta_2 &= \xi \cos \alpha_2 + \eta \sin \alpha_2 \end{aligned} \quad (8)$$

解方程组即可求得垂线偏差的子午分量 ξ 和卯酉分量 η 。

$$\begin{cases} \xi = \frac{\delta_1 \sin \alpha_2 - \delta_2 \sin \alpha_1}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)} \\ \eta = \frac{\delta_1 \cos \alpha_2 - \delta_2 \cos \alpha_1}{\cos(\alpha_1 - \alpha_2)} \end{cases} \quad (9)$$

从上述公式可以看出, ξ 、 η 的计算精度在很大程度上会受到基线之间夹角的影响, 因此在使用 GNSS/水准测定垂线偏差时, 应当将两基线的夹角控制在 90° 为佳, 若有地形限制, 也应当将基线夹角控制在 60° 以上, 以保证垂线偏差的计算精度^[47]。

国内外学者 20 世纪末已开展 GNSS 水准法测量垂线偏差的相关探索。Soler 等证明结合 GNSS 定位与精密水准测量, 可在不依赖传统天文观测的情况下获得较为精确的垂线偏差^[13]; Vandenberg 等提出了通过天顶角差分 and 正高观测计算垂线偏差的两种模型, 并利用大地水准面起伏分析参考椭球面的斜率^[48]; Tse 等以中国香港为研究区域, 通过 GNSS 观测和精密水准测量验证了垂线偏差计算的可靠性, 其结果与 EGM96 模型高度一致^[1]。在中国国内, 相关研究进一步细化和应用。王爱生基于方向导数与梯度理论推导垂线偏差计算公式, 并利用实测数据建立区域模型^[46]; 欧海平等分析了影响垂线偏差精度的关键因素, 指出当 GNSS 基线高差精度达到 2 mm 时, 垂线偏差精度可达 $2''$ ^[49]; 许曦等提出天文水准 GNSS 方法, 解决了不同高程系统之间的连接难题^[50]; 徐益群等系统分析了 GNSS/水准法的误差源, 并提出优化观测设计的准则^[51]。这些研究为 GNSS 水准法在高精度垂线偏差测量中的应用提供了坚实的理论与技术基础。此外, Albayrak 等利用 GNSS/水准测量方法, 在瑞士东阿尔卑斯山区进行精确的大地水准面 (Geoid) 确定, 结果表明 GNSS/水准数据能实现厘米级的精度, 验证了该方法在复杂山区地形中进行大地水准面建模的可靠性^[52]。

总体来说, GNSS 水准测量法精度还有待于提高, 由于繁琐的操作和静态测量, 使得该方法测量效率不高。另外, 精密水准测量需要提供能见度条件, 使得这种方法难以在复杂的地形条件下使用。

2 垂线偏差间接测量方法进展

2.1 重力测量法

根据已有重力数据来推算垂线偏差也是一种有效的垂线偏差计算方法。1928年，Vening-Meinesz 利用区域重力异常数据推算出球面积分表达式来计算垂线偏差，该公式被称为 Vening-Meinesz 公式，是重力异常与垂线偏差转化的基本公式^[53]，该公式假设大地水准面之外没有扰动物质且全球重力异常数据已知，就可按 Stokes（斯托克司）方法求得大地水准面上的垂线偏差。Vening-Meinesz 公式为：

$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g \frac{dS(\psi)}{d\psi} \cos \alpha d\sigma \\ \eta = \frac{1}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g \frac{dS(\psi)}{d\psi} \sin \alpha d\sigma \end{cases} \quad (10)$$

式中， ξ 、 η 分别为垂线偏差的子午分量和卯酉分量， γ 为地球平均正常重力， Δg 为大地水准面上点的重力异常， ψ 为计算点到流动点的球面距离， α 为计算点到流动点的方位角， $\frac{dS}{d\psi}$ 为 Vening-Meinesz 函数，即

$$\begin{aligned} \frac{dS(\psi)}{d\psi} = & \frac{\cos(\frac{\psi}{2})}{2\sin^2(\frac{\psi}{2})} + 8\sin\psi - 6\cos(\frac{\psi}{2}) - \frac{3[1 - \sin(\frac{\psi}{2})]}{\sin\psi} + \\ & 3\sin\psi \ln[\sin(\frac{\psi}{2}) + \sin^2(\frac{\psi}{2})] \end{aligned} \quad (11)$$

Vening-Meinesz 公式应用的理论前提之一是获取高质量的全球重力异常数据，但受限于测量技术及复杂的测量环境，缺乏足够的重力数据，因此 Vening-Meinesz 公式常与移去-恢复技术组合后应用。其中，中国在进行天文大地网与高精度 GPS2000 网联合平差时，为满足地面观测数据归算到 WGS84 椭球的需要，采用 Vening-Meinesz 公式、移去-恢复技术和高阶次地球重力场模型完成了我国陆地垂线偏差的精细化计算，通过检验得到我国垂线偏差子午分量总体精度为 $\pm 1.45''$ ，卯酉分量总体精度为 $\pm 1.50''$ ^[3]。

为了在保持高精度的条件下，提高垂线偏差的计算效率，国内外许多学者对该公式进行了改进研究。其中，频谱分析方法的迅速发展和广泛应用是该领域中最重大的进展，Schwarz 等在总结谱分析技术在物理大地测量中的应用时，给出了垂线偏差的二维平面 FFT 算式^[54]。宁津生等和 Liu 等又相继推导出了利用二维和一维 FFT 算法实现垂线偏差快速计算的球面公式^[55-56]。随着计算方法的不断优化以及计算机技术的快速发展，基于重力异常数据的垂线偏差计算问题得到了较好的解决^[56-57]。

然而，高精度、均匀分布的全球重力异常数据的获取仍然是这一领域面临的主要挑战。近年来，卫星、海洋和航空重力测量技术的发展极大地提升了重力异常测量的效率和精度。然而，卫星重力测量在分辨率和精度方面仍然存在一定限制。此外，计算区域边缘缺乏足够的数据会导致边缘区域的计算误差增大。为此，在实际应用中，通常需要扩大测量范围，以获取更多的重力数据用于计算 Vening-Meinesz 积分，从而减少边缘效应对结果精度的影响。

2.2 基于地球重力场模型的 DOV 算法

地球重力场模型是描述地球重力场最有效的手段。地球重力场模型实际上就是地球引力位按球谐函数展开位系数的集合，它将复杂的地球重力场用球谐函数的形式解析表达，能十分方便快速地表示和计算大地水准面、重力异常、垂线偏差、扰动重力和高程异常等任意扰动场元。随着各种地球重力场模型的建立，基于地球重力场模型的 DOV 算法逐渐广泛应用。

根据球谐系数计算垂线偏差的子午分量（也称为南北分量，记为 ξ ）和卯酉分量（也称为东西分量，记为 η ），这一过程也称为球谐综合。首先，由重力场理论可知垂线偏差和扰动位的关系为：

$$\xi = \frac{1}{\gamma R} \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad (12)$$

$$\eta = -\frac{1}{\gamma R \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \lambda} \quad (13)$$

其中， θ 为大地余纬， λ 为大地经度， γ 为正常重力， R 为地球半径，扰动位 T 是引力位和正常引力位之差，扰动位常常写成如下形式：

$$T = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm}^* \cos m\lambda + \bar{S}_{nm}^* \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \quad (14)$$

式中， r 为地心距离， \bar{C}_{nm}^* 和 \bar{S}_{nm}^* 为扰动位的完全规格化球谐系数，是引力位球谐系数和正常引力位球谐系数之差。因此，垂线偏差分量的球谐函数计算公式为：

$$\xi(r, \theta, \lambda) = \frac{R}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm}^* \cos m\lambda + \bar{S}_{nm}^* \sin m\lambda) \frac{d\bar{P}_{nm}(\cos \theta)}{d\theta} \quad (15)$$

$$\eta(r, \theta, \lambda) = \frac{R}{r \sin \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n m (\bar{C}_{nm}^* \sin m\lambda - \bar{S}_{nm}^* \cos m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \quad (16)$$

近年来，基于地球重力场模型计算垂线偏差的研究不断推进，并在精度评估和应用领域取得了一定成果。齐显峰等（2011）利用 EGM2008 重力场模型计算了不同阶次条件下的垂线偏差，并对中国东部和西部地区进行了精度分析。研究表明，在 720 阶次以下模型精度提升显著，720 阶次以上变化趋于平缓，但西部地形复杂、数据匮乏区域的计算精度相对较低^[58]。张永毅和张兴福通过 EGM2008（2190 阶次）模型计算垂线偏差分量，并与美国 GSVS2011 实测数据进行对比分析，发现计算分量的 RMS 约为 0.1"~0.3"^[59]。Wan 等利用 EGM2008 和 EIGEN-6C4 模型计算垂线偏差分量，用以验证 HY-2A 卫星测高数据反演结果，计算的子午分量和卯酉分量的 STD 分别为 1.1"和 3.5"^[60]。Ji 等采用 XGM2019e 模型进行计算，用于评估测高数据确定的垂线偏差分量，两者差异的 RMS 约为 0.3"^[61]。

随着大地测量观测技术的不断进步，地球重力场模型的精度和分辨率将进一步提高，为获取更高精度的垂线偏差数据提供了可能。这些研究为垂线偏差的精确解算和实际应用奠定了坚实基础。

此外，在利用地球重力场球谐系数计算垂线偏差的过程中，如何快速且准确地递推高阶缔合勒让德函数是另一个关键问题。尤其是在计算高阶次的勒让德函数时，由于数值可能会溢出，进而影响计算的精度和稳定性。目前常用的有两种：一是 Holmes 和 Featherstone 改进了传统递推计算方法，通过构建勒让德函数的值，避免了溢出问题，可以稳定计算任意纬度下的 2 700 阶勒让德函数^[62]；二是 Fukushima 提出了扩充数域法，通过扩展数域范围，引入由两个双精度浮点数，使得在递推过程中避免数值溢出^[63]。此外，其他学者也开展了相关研究。Jekeli 等提出了一种快速稳定的超高阶勒让德函数计

算策略，通过忽略冗余项，减少了计算误差，并节省了计算内存^[64]。苏勇等推导了一种缔合勒让德函数二阶导数的快速稳定递推算法，其数值测试表明，即使在阶次高达 3 600 的情况下，该方法的计算效率相较于当时其他方法提升了一倍以上，且无奇异性，可适用于任意纬度的快速精确计算^[65]。刘缵武等进一步研究发现，在计算超高阶（大于 3 600 阶）勒让德函数时，即使采用压缩因子递推算法，两极附近仍可能因溢出而导致计算失败。他们通过改进压缩因子修正递推算法，成功推导出可达到 5400 阶次的高精度“压缩勒让德函数”^[66]。张飞（2017）系统研究了四种缔合勒让德函数递推算法，包括标准向前递推法、标准向前列递推法、跨阶次递推法和 Belikov 递推法。他从计算精度和速度两个方面进行了比较，发现当阶数超高时，标准向前列和标准向前递推法速度最快但精度最差；跨阶次递推法速度稍快于 Belikov 方法，两者精度相当^[67]。尽管通过插入比例因子等手段能改善递推过程中的不稳定性，但往往会增加计算量，从而牺牲速度。Svehla 提出了一种基于几何旋转的新方法，通过旋转矩阵高效计算超高阶勒让德函数，避免了数值误差积累，拓展了可接受的纬度范围^[68]。Xing 等提出了完全归一化的列式递推公式，用于计算缔合勒让德函数及其一阶导数，成功实现了最高到 64 800 阶的稳定计算，并显著提高了计算精度与效率^[69]。综合分析表明，改进的递推算法，特别是扩展数域法和压缩因子递推法，在超高阶缔合勒让德函数的计算中展现了明显的优势。这些方法有效避免了数值溢出问题，显著提高了计算稳定性和精度。相关研究为提升缔合勒让德函数计算效率和精度提供了重要的技术支持，推动了超高阶重力场模型在大地测量中的进一步应用。

2.3 基于卫星测高的海洋 DOV 算法

随着卫星测高技术的发展，基于测高数据构建海洋垂线偏差的方法也逐渐成熟，目前主要包括 Sandwell 法、沿轨最小二乘法和最小二乘配置法等。该方法主要适用于海洋区域。

1) Sandwell 法

Sandwell 法是利用卫星测高数据中的位置和时间信息计算垂线偏差的方法^[70]。在卫星地面轨迹交叉点处分别求升轨和降轨上大地水准面高关于时间的一阶导数以及卫星在经纬度方向上的速率，从而求得交叉点处垂线偏差的两个方向分量，即：

$$\dot{N}_a = \frac{\partial N_a}{\partial t} = \frac{\partial N_a}{\partial \varphi} \dot{\varphi}_a + \frac{\partial N_a}{\partial \lambda} \dot{\lambda}_a \quad (17)$$

$$\dot{N}_d = \frac{\partial N_d}{\partial t} = \frac{\partial N_d}{\partial \varphi} \dot{\varphi}_d + \frac{\partial N_d}{\partial \lambda} \dot{\lambda}_d \quad (18)$$

式中，下标 a 和 d 分别表示上升弧和下降弧； φ 和 λ 分别表示纬度和经度； N 为大地水准面高度； $\dot{\varphi}$ 和 $\dot{\lambda}$ 分别表示卫星沿地面轨迹在纬度和经度方向上的速率； \dot{N} 则是大地水准面高关于时间的一阶导数。当卫星轨道近似圆轨时，则卫星速率满足以下近似关系：

$$\dot{\varphi}_a \approx -\dot{\varphi}_d \quad (19)$$

$$\dot{\lambda}_a \approx \dot{\lambda}_d \quad (20)$$

联合式(17)~(20)，可得到大地水准面高关于纬度和经度的导数：

$$\frac{\partial N}{\partial \varphi} = \frac{1}{2|\dot{\varphi}|} (\dot{N}_a - \dot{N}_d) \quad (21)$$

$$\frac{\partial N}{\partial \lambda} = \frac{1}{2\dot{\lambda}} (\dot{N}_a + \dot{N}_d) \quad (22)$$

式中, $\dot{\phi}$ 、 $\dot{\lambda}$ 、 \dot{N}_a 和 \dot{N}_d 可由卫星测高数据中的时间、位置和大地水准面高信息获得, 从而可以确定垂线偏差的子午分量 ξ 和卯酉分量 η 分别为:

$$\xi = -\frac{1}{R} \frac{\partial N}{\partial \phi} \quad (23)$$

$$\eta = -\frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial N}{\partial \lambda} \quad (24)$$

利用 Sandwell 法解算垂线偏差时, 仅能计算交叉点处的垂线偏差方向分量, 存在沿轨海面高数据使用率低的问题。

2) 沿轨最小二乘法

Olgiati 等提出在利用交叉点处信息的基础上, 利用沿轨大地水准面高的一次差分解算垂线偏差^[71]。为了提高垂线偏差的空间分辨率, 按一次差分计算每条弧段逐个观测点的沿轨垂线偏差, 并利用交叉点处两个沿轨方向的垂线偏差推算该点在垂直于轨迹方向的垂线偏差, 进而联合构建整个区域的海洋垂线偏差模型。该方法所获得的垂线偏差分量空间分辨率较高, 但是该方法在各个观测点处垂直于轨迹方向的垂线偏差需要由相邻交叉点处的值内插获得, 影响了垂线偏差的计算精度。

沿轨垂线偏差实际是沿轨大地水准面梯度的负数。通过剔除海面高观测值中的动态海面地形可得沿轨大地水准面高 N , 然后根据沿轨相邻两点大地水准面高的差值及两点之间的球面距离 ψ , 计算得到沿轨大地水准面梯度 e :

$$e = \frac{\partial N}{\partial \psi} \quad (25)$$

取交叉点附近一个较小区域, 因为区域较小, 可将其视为平面, 则可计算交叉点处的垂线偏差的子午分量 ξ 和卯酉分量 η 为:

$$\begin{cases} \xi = -\frac{\partial N}{\partial x} \\ \eta = -\frac{\partial N}{\partial y} \end{cases} \quad (26)$$

同时, 顾及地面轨迹的方位角 A , 则可用垂线偏差表示沿轨大地水准面梯度为:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \cos A_1 & \sin A_1 \\ \cos A_2 & \sin A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \quad (27)$$

式中, 下角标 1 和 2 分别表示两条相交的不同轨迹。因此, 只要交叉的两轨迹线不重合, 就有:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = -\frac{1}{\sin(A_2 - A_1)} \begin{bmatrix} \sin A_2 & -\sin A_1 \\ -\cos A_2 & \cos A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

利用该方法计算垂线偏差时, 只需存在交叉点即可, 不要求交叉的两弧段分别为上升弧和下降弧。

但是这种方法仅利用了交叉点处的大地水准面梯度信息。

为了充分利用沿轨大地水准面梯度信息，下面给出沿轨加权最小二乘法。

基于以上给定的垂线偏差分量与沿轨大地水准面梯度之间的关系，沿轨加权最小二乘法能够直接确定格网点处的垂线偏差方向分量平均值。沿轨大地水准面梯度可由选定格网区域内中心点处的垂线偏差计算：

$$-e_i = \xi \cos A_i + \eta \sin A_i \quad (29)$$

式中， $i=1,2,\dots,n$ ； n 为选定的格网区域内沿轨迹海面高观测点的数量； A_i 和 e_i 分别为第 i 个观测点的方位角和沿轨大地水准面的梯度。误差方程可写作：

$$-v_i = \xi \cos A_i + \eta \sin A_i + e_i \quad (30)$$

式中， v_i 为第 i 个观测值的残差，假设观测值相互独立，利用 $\sum_{i=1}^n P_i v_i^2 = \min$ 的最小二乘原理，其中权

P_i 的选取可采用反距离定权确定，可求解垂线偏差的子午分量 ξ 和卯酉分量 η 。

考虑到利用交叉点信息解算海洋垂线偏差模型的应用限制，Hwang 等提出利用沿轨的海面高数据采用最小二乘原理直接解算海洋垂线偏差模型的方法^[72]。该方法不仅理论严密，而且不需要计算测高卫星地面轨迹的交叉点，计算过程简便，在海洋垂线偏差的构建中得到广泛应用。

3) 最小二乘配置法

最小二乘配置法也是一种常用的解算格网垂线偏差的方法，并且能够融合多源观测数据。通常根据数据噪声和信号之间的统计性质，在确定已知量与待求量之间的协方差函数后，根据观测值信号求取待求信号。最小二乘配置法解算规则格网内的子午分量 ξ 和卯酉分量 η 的公式为：

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{\xi\varepsilon} \\ C_{\eta\varepsilon} \end{pmatrix} (C_{\varepsilon\varepsilon} + C_{nn})^{-1} e \quad (31)$$

式中， $C_{\xi\varepsilon}$ 表示为子午分量和沿轨大地水准面梯度的协方差阵； $C_{\eta\varepsilon}$ 表示为卯酉分量和沿轨垂线偏差的协方差阵； $C_{\varepsilon\varepsilon}$ 表示为沿轨垂线偏差的方差阵； C_{nn} 为沿轨垂线偏差噪声方差阵； ε 表示为沿轨大地水准面梯度阵； e 表示为沿轨海面高梯度。

垂线偏差子午分量 ξ 和卯酉分量 η 的方差函数不是各向同性的，而垂线偏差径向分量 l 和横向分量 m 的方差函数是各向同性的。因此，便于理论研究， $C_{\xi\varepsilon}$ 、 $C_{\eta\varepsilon}$ 和 $C_{\varepsilon\varepsilon}$ 可以由垂线偏差径向分量 l 和横向分量 m 的方差确定。

在格网点 p 处垂线偏差的子午分量 ξ 和卯酉分量 η 用径向分量和横向分量 (l,m) 表示为：

$$\begin{cases} \xi_p = -l_p \cos \alpha_{pq} + m_p \sin \alpha_{pq} \\ \eta_p = -l_p \sin \alpha_{pq} - m_p \cos \alpha_{pq} \end{cases} \quad (32)$$

在 p 和 q 两点处的沿轨垂线偏差用径向分量和横向分量 (l,m) 表示为：

$$\begin{aligned}
\varepsilon_p &= l_p \cos(\alpha_{\varepsilon_p} - \alpha_{pq}) + m_p \sin(\alpha_{\varepsilon_p} - \alpha_{pq}) \\
\varepsilon_q &= -l_q \cos(\alpha_{\varepsilon_q} - \alpha_{qp}) - m_q \sin(\alpha_{\varepsilon_q} - \alpha_{qp}) \\
&= l_q \cos(\alpha_{\varepsilon_q} - \alpha_{pq}) + m_q \sin(\alpha_{\varepsilon_q} - \alpha_{pq})
\end{aligned} \tag{33}$$

式中， α_{ε_p} 和 α_{ε_q} 分别为星下点 p 和 q 沿轨垂线偏差的方位角； α_{pq} 和 α_{qp} 分别表示从 p 到 q 以及从 q 到 p 的方位角。

因此，格网垂线偏差两个方向分量与沿轨垂线偏差的协方差（ $C_{\zeta\varepsilon}, C_{\eta\varepsilon}$ ），以及沿轨垂线偏差的方差可以表示为：

$$\begin{aligned}
C_{\zeta\varepsilon} &= C_{ll} \cos \alpha_{pq} \cos(\alpha_{\varepsilon_q} - \alpha_{qp}) - C_{mm} \sin \alpha_{pq} \sin(\alpha_{\varepsilon_q} - \alpha_{qp}) \\
C_{\eta\varepsilon} &= C_{ll} \cos \alpha_{pq} \cos(\alpha_{\varepsilon_q} - \alpha_{qp}) + C_{mm} \sin \alpha_{pq} \sin(\alpha_{\varepsilon_q} - \alpha_{qp}) \\
C_{\varepsilon\varepsilon} &= C_{ll} \cos(\alpha_{\varepsilon_p} - \alpha_{qp}) \cos(\alpha_{\varepsilon_q} - \alpha_{qp}) \\
&\quad + C_{mm} \sin(\alpha_{\varepsilon_p} - \alpha_{qp}) \sin(\alpha_{\varepsilon_q} - \alpha_{qp})
\end{aligned} \tag{34}$$

式中， C_{ll} 和 C_{mm} 分别为垂线偏差径向分量和横向分量的方差，其表示为：

$$\begin{aligned}
C_{ll} &= (tD_t K(\psi_{pq}) - \sin^2 \psi_{pq} D_t^2 K(\psi_{pq})) / (\gamma_0^2 rr') \\
C_{mm} &= D_t K(\psi_{pq}) / (\gamma_0^2 rr')
\end{aligned} \tag{35}$$

式中， $t = \cos \psi_{pq}$ ； $K(\psi)$ 为 p, q 两点扰动位的协方差，其表示为：

$$K(\psi_{pq}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n \left(\frac{R_B^2}{rr'} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi_{pq}) \tag{36}$$

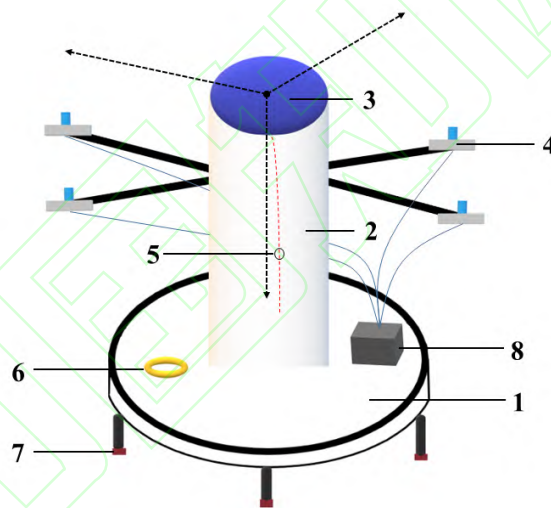
式中， σ_n 为扰动位的阶方差； R_B 是 Bjerhammar 椭球半径。

进入 21 世纪以来，中国在基于卫星测高数据解算垂线偏差方面取得了多项具有代表性的研究成果。李建成等通过多颗卫星的升降弧沿轨数据的一次差分，获得交叉点处的垂线偏差，并内插解算出格网大小为 $2.5' \times 2.5'$ 的垂线偏差^[73]。王虎彪等联合多源卫星测高数据，采用沿轨迹加权最小二乘法，解算了中国近海海域格网大小 $5' \times 5'$ 的垂线偏差^[74]。邓凯亮等结合 TOPEX/Poseidon、ERS-1/168、ERS-2、GFO 和 Geosat/GM 数据，通过自交叉点处升降弧的沿轨大地水准面梯度及方位角信息，求得交叉点处垂线偏差子午分量和卯酉分量，并利用双线性内插法计算了格网大小为 $2' \times 2'$ 的垂线偏差，模型精度与国际模型精度一致^[75]。万剑华等利用 TOPEX/Poseidon 系列、Envisat 系列和 Geosat 系列测高数据，采用 Hwang 提出的垂线偏差解算方法，解决了法方程病态问题，得到中国近海 $2' \times 2'$ 格网的垂线偏差模型，其结果与 EGM2008 模型相比，两个方向分量的均方根误差均优于 $1''$ ^[76]。张胜军等联合两种轨道倾角的高度计数据，通过数据预处理，分别采用 Sandwell 法和加权最小二乘法计算了三个不同纬度区域的垂线偏差分量，研究表明解算精度与卫星轨道倾角密切相关^[77]。万晓云等利用 HY-2A 卫星测高数据反演全球海域垂线偏差分量，通过高精度模型验证，结果显示垂线偏差子午分量的精度优于卯酉分量。这些研究成果表明，通过联合多源卫星测高数据并采用改进的算法，可以显著提高垂线偏差解算精度^[60]。Peng 等提出了一种优化的垂线偏差（DOV）组合方法，通过结合沿轨道垂线偏差

(ATDOV) 和跨轨垂线偏差 (CTDOV), 有效缩小了主经度分量和主垂线分量之间的精度差异, 提高了海洋重力异常模型反演的精度^[78]。于道成等基于 SWOT 宽刈幅测高卫星模拟数据研究发现, SWOT 在解算垂线偏差表现出显著优势, 能够将垂线偏差分量精度提升至 0.7 微弧度, 远超传统测高卫星如 Jason-2 和 Cryosat-2 的表现^[79]。

3 全天候垂线偏差测量

目前, 垂线偏差的常用测定方法主要有天文大地测量法、重力测量法、天文重力测量法和 GNSS 水准测量法等, 但这些传统的垂线偏差测量方法存在测量难度大、耗时长等问题, 易受观测环境条件限制, 无法进行全天候的外业观测, 严重限制了垂线偏差的数据采集和应用, 所以全天候、高精度的垂线偏差测量仍然是世界上亟待解决的难题^[2, 14, 43]。三维激光跟踪技术是一种测量速度快、测量精度高的极坐标测量技术。基于此, 郭金运等提出一种集成 GNSS 和三维激光跟踪技术的全天候垂线偏差测量新方法^[80-81], 实现垂线偏差的全天候、高精度测量, 测量系统如图 8 所示, 由基座、测量筒、激光跟踪仪、GNSS 接收机和天线、自由落体靶球、电子水平仪、高度调节马达、时间采集器、自动控制系统、移动设施和电源系统等组成, 其数据处理技术路线如图 9 所示。



1- 基座, 2-测量筒, 3-激光跟踪仪, 4-GNSS 天线, 5-抛物运动靶球, 6-电子水平仪, 7-高度调节马达, 8-时间采集器。

图 8 垂线偏差测量示意图

Fig. 8 Schematic diagram of vertical deflection measurement

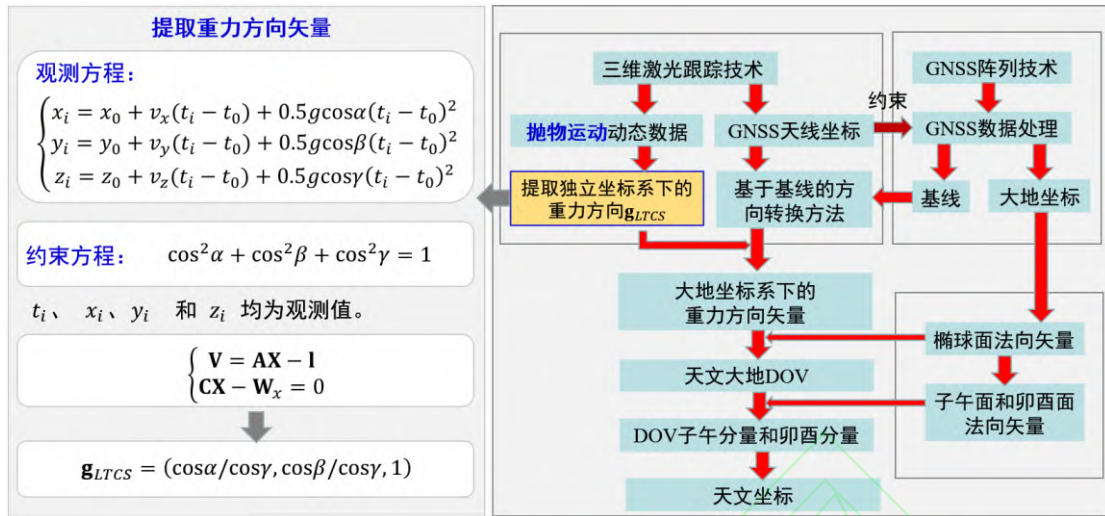


图 9 全天候垂线偏差测量技术路线

Fig.9 All-weather vertical deflection measurement technical route

全天候测量系统数据采集与处理涉及两种坐标系，一种是以激光跟踪仪镜头为基准建立的空间直角坐标系，称为激光跟踪仪坐标系(laser tracker coordinate system, LTCS)；另一种是基于 GNSS 测量的空间大地直角坐标系(geodetic cartesian coordinate system, GCCS)，其实验步骤如下：

- 1) 事先利用激光跟踪仪测量得到激光跟踪仪坐标系下的 GNSS 天线中心坐标，作差获得激光跟踪仪坐标系下微米甚至亚微米级的观测基线信息，为后续的重力方向矢量转换奠定基础。
- 2) 利用激光跟踪仪和时间采集器动态跟踪测量抛物运动下落靶球的三维坐标时间序列，构建抛物运动观测方程，利用最小二乘法迭代法提取激光跟踪仪坐标系下的重力方向矢量。
- 3) 基于高精度的基线距离约束，解算 GNSS 阵列数据，获得高精度的测点 P 大地坐标及 GNSS 基线向量。
- 4) 结合步骤 1) 中所获得的激光跟踪仪坐标系下的基线信息和步骤 3) 中利用 GNSS 获得的空间大地直角坐标系下的公共基线信息，求得激光跟踪仪坐标系与空间大地直角坐标系之间的方向转换参数，进而将重力方向矢量转换到空间大地直角坐标系下。
- 5) 根据测点 P 大地坐标确定的椭球面法向矢量，计算得到天文大地垂线偏差及其子午分量和卯酉分量。

采用本方法进行垂线偏差时变测量时，主要误差源有激光跟踪测量误差、GNSS 定位误差和独立坐标系与大地坐标系之间的坐标转换误差等。根据各个误差源的实际精度，进行垂线偏差时变测量的仿真实验，将求得含有误差的垂线偏差时变特征与理论垂线偏差时变特征进行比较，来验证本项目提出方法的理论精度。设激光跟踪仪的点位精度为 $10 \mu\text{m}$ ，跟踪测量频率为 2000 Hz ，抛物运动下落距离为 1 m 左右。事先利用激光跟踪仪对固定的 GNSS 天线中心进行 1000 次测量，确定其在独立坐标系下的坐标，当作已知值。设 GNSS 装置的定位精度为 1 mm ，共有 4 个 GNSS 天线，均匀分布在以激光跟踪仪为中心、半径为 3 m 的圆上。测点 P 参考坐标为 ($X=-2148744.4656 \text{ m}$, $Y=4426641.1849 \text{ m}$, $Z=4044656.0516 \text{ m}$)，选择 WGS1984 椭球，椭球长半轴 $a = 6378137 \text{ m}$ ，扁率 $f = 1/298.257223563$ 。

通过该方法的仿真实验结果如图 10 和表 1 所示。从图 10 和表 1 可以看出，该测量方法精度在 $\pm 0.7''$

之间波动，且平均值趋近于 0，STD 和 RMS 均优于 0.2″，满足中国一等天文规范精度（0.3″）要求。垂线偏差子午和卯西分量精度在±0.3″内的占比分别可达 85.9%和 91.8%，表明该方法具有较好的稳定性。

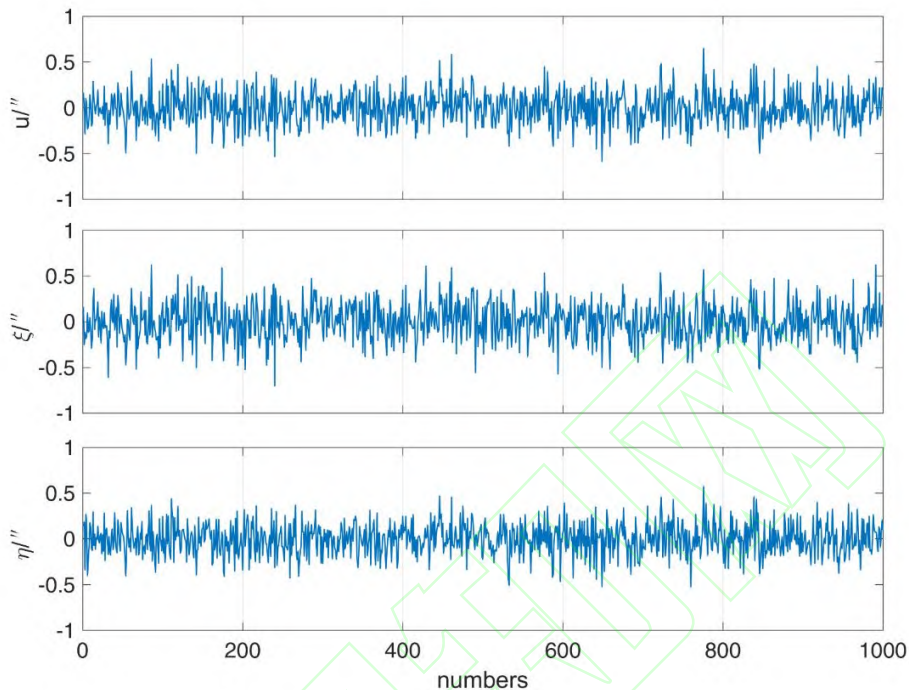


图 10 垂线偏差精度分布

Fig.10 Distribution of vertical deflection accuracy

表 1 垂线偏差精度统计/(″)

Table 1 Accuracy statistics of vertical deflection/(″)

统计项	max	min	mean	STD	RMS
u	0.65	-0.59	0.00	0.18	0.18
ξ	0.62	-0.70	0.00	0.20	0.20
η	0.57	-0.53	0.00	0.17	0.17

4 总结与展望

4.1 总结

垂线偏差的测量方法多样且各具优势，涵盖了直接测量与间接测量两大类，如表 2 所示。直接测量方法（如天文大地测量、集成 GNSS 与 CCD 技术以及 GNSS/水准测量）凭借实时数据采集的特点，能够实现高精度的垂线偏差测量，但受限于环境条件和设备性能。而间接测量方法（如重力测量、重力场球谐系数解算法、卫星测高等）则利用已有数据进行解算，计算效率较高，但其精度依赖于高精度、高分辨率的重力场模型或输入数据的质量。

表 2 主要垂线偏差方法比较

Table 2 Comparison of major vertical deflection measurement methods

方法	优点	缺点
天文大地测量	高精度	测量效率低，静态测量，依赖于天况
GNSS 水准测量法	精度一般	地面测量，效率较低，需要通视条件
重力测量法	间接测量，可利用现有数据，不增加仪器	存在边缘效应误差，对重力异常的高频误差较为敏感
重力场球谐系数解算法	间接计算	需要事先建立高精度重力场模型
卫星测高法	高效率，空间分辨率较高	适用于海洋区域，需要对垂线偏差数据格网化等处理，对垂线偏差精度有一定的影响

总体来看，天文大地测量法（集成 GNSS 和全站仪的 DOV 测量、集成 GNSS 和 CCD 照相的 DOV 测量）仍是直接测量高精度垂线偏差的主要方式，适用于静态环境下的高精度需求。GNSS 水准测量方法则在地面测量和区域测绘中得到了广泛应用，但在复杂地形条件下难以使用。重力场球谐系数解算法和卫星测高测量方法凭借其广域覆盖的优势，在海洋垂线偏差测量和全球重力场研究中具有重要地位。然而，各种方法均存在一定的局限性，全天候、高精度、自动化的垂线偏差测量是当前亟待解决的难题，这也限制了垂线偏差的广泛获取和应用。

4.2 展望

综合近些年来的研究成果，未来垂线偏差测量的发展趋势可归纳为以下几个方面。

1) 天文大地测量设备小型化与商业化

随着仪器技术的持续进步，未来天文大地测量设备的轻便化、智能化与商业化将成为趋势。这一趋势不仅有助于降低仪器的成本，提升便携性和操作便捷性。此外，相比传统天顶仪，图像全站仪具备廉价化和平民化的潜力，基于图像全站仪的高精度测量系统有望进一步普及，成为地质监测、基础设施测量以及科学实验等领域的基础工具，推动垂线偏差测量技术广泛应用。商业化推广和普及化将促进这些设备在科研、灾害预警和资源勘探中的高效应用。

2) 测量技术向动态、全天候测量方向发展

垂线偏差测量技术逐步从传统静态观测方法转向动态、全天候测量。如何实现全天候、高精度的垂线偏差测量仍然是未来研究的重要方向。在复杂地形和极端天气、气候条件下，结合 GNSS 阵列与三维激光跟踪技术的动态测量方案为全天候测量提供了新的解决思路。未来，进一步优化这些技术方案，结合高精度的气象数据、实时数据处理算法及移动平台，提升垂线偏差测量的精度、稳定性和时效性。这一突破对于地质灾害监测、精密工程测量、智能城市建设和基础设施维护等领域具有极大的潜力和实际应用价值。

3) 海洋实测垂线偏差的突破

在海洋领域，垂线偏差的测量面临着更多复杂的挑战，尤其是在精度和空间分辨率方面。尽管卫星测高技术提供了大范围的数据，但精度仍然无法满足高精度应用的需求。未来，结合船载的天文大地测量、动态定位和重力测量技术，探索新型海洋垂线偏差实测方法，将成为海洋重力研究的一个重要方向。这些技术结合现代重力和卫星观测数据，能够为海洋科学、资源开发、全球变化研究、海平面变化监测等提供更加精确的支持，尤其是在海洋资源开发与国家海洋权益管理等关键领域。

参考文献

- [1] TSE C M, BÂKI IZ H. Deflection of the Vertical Components from GPS and Precise Leveling Measurements in Hong Kong [J]. *Journal of Surveying Engineering*, 2006, 132(3): 97-100.
- [2] HIRT C, BÜRKI B, SOMIESKI A, et al. Modern Determination of Vertical Deflections Using Digital Zenith Cameras[J]. *Journal of Surveying Engineering*, 2010, 136(1): 1-12.
- [3] 宁津生, 郭春喜, 王斌, 等. 我国陆地垂线偏差精化计算[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2006, 31(12): 1035-1038.
- NING Jinsheng, GUO Chunxi, WANG Bin, et al. Refined Determination of Vertical Deflection in China Mainland Area[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2006, 31(12): 1035-1038.
- [4] 李建成. 最新中国陆地数字高程基准模型: 重力似大地水准面 CNGG2011[J]. 测绘学报, 2012, 41(5): 651-660.
- LI Jiancheng. The Recent Chinese Terrestrial Digital Height Datum Model: Gravimetric Quasi-Geoid CNGG2011[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2012, 41(5): 651-660.
- [5] Kührtreiber N. Combining gravity anomalies and deflections of the vertical for a precise Austrian geoid[J]. *Bollettino Di Geofisica Teorica Ed Applicata*, 1999, 40:3-4.
- [6] HIRT C, FLURY J. Astronomical-Topographic Levelling Using High-Precision Astrogeodetic Vertical Deflections and Digital Terrain Model Data[J]. *Journal of Geodesy*, 2008, 82(4): 231-248.
- [7] BÁNYAI L. Three-Dimensional Adjustment of Integrated Geodetic Observables in Earth-Centred and Earth-Fixed Coordinate System[J]. *Acta Geodaetica et Geophysica*, 2013, 48(2): 163-177.
- [8] FEATHERSTONE W E, MCCUBBINE J C, CLAESSENS S J, et al. Using AUSGeoid2020 and Its Error Grids in Surveying Computations[J]. *Journal of Spatial Science*, 2019, 64(3): 363-380.
- [9] MIRGHASEMPOUR M, JAFARI A Y. The Role of Astro-Geodetic in Precise Guidance of Long Tunnels[J]. *ISPRS - International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, 2015, XL15: 453-457.
- [10] 李敏, 李琼, 苏勇. 采用高精度地球重力场模型计算垂线偏差及隧道贯通误差[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2024, 49(10): 1922-1930.
- LI Min, LI Qiong, SU Yong. Calculation of Vertical Deviation and Tunnel Through Error Based on High-Precision Earth Gravity Field[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2024, 49(10): 1922-1930.
- [11] HAN Y B, MA L H, HU H, et al. Application of Astronomic Time-Latitude Residuals in Earthquake Prediction[J]. *Earth, Moon, and Planets*, 2007, 100(1): 125-135.
- [12] HAN S C, SAUBER J, LUTHCKE S. Regional Gravity Decrease After the 2010 Maule (Chile) Earthquake Indicates Large-Scale Mass Redistribution[J]. *Geophysical Research Letters*, 2010, 37(23): L23307.
- [13] SOLER T, HAN J Y, WESTON N D. On Deflection of the Vertical Components and Their Transformations[J]. *Journal of Surveying Engineering*, 2014, 140(2): 04014005.

- [14] VITTUARI L, TINI M A, SARTI P, et al. A Comparative Study of the Applied Methods for Estimating Deflection of the Vertical in Terrestrial Geodetic Measurements[J]. *Sensors*, 2016, 16(4): 565.
- [15] HIRT C, WILDERMANN E. Reactivation of the Venezuelan Vertical Deflection Data Set from Classical Astrogeodetic Observations[J]. *Journal of South American Earth Sciences*, 2018, 85: 97-107.
- [16] 郭金运, 金鑫, 边少锋, 等. 垂线偏差测量的固体潮和海潮改正[J]. *测绘学报*, 2022, 51(7): 1215-1224.
- GUO Jinyun, JIN Xin, BIAN Shaofeng, et al. Corrections of Solid Earth Tide and Ocean Tide for Measurement of Deflection of the Vertical[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2022, 51(7): 1215-1224.
- [17] ZHOU S, LIU X, SUN Y, et al. Predicting Bathymetry Using Multisource Differential Marine Geodetic Data with Multilayer Perceptron Neural Network[J]. *International Journal of Digital Earth*, 2024, 17(1).
- [18] HIRT C, SEEGER G. Accuracy Analysis of Vertical Deflection Data Observed with the Hannover Digital Zenith Camera System TZK2-D[J]. *Journal of Geodesy*, 2008, 82(6): 347-356.
- [19] 郭金运, 宋来勇, 常晓涛, 等. 数字天顶摄影仪确定垂线偏差及其精度分析[J]. *武汉大学学报(信息科学版)*, 2011, 36(9): 1085-1088.
- GUO Jinyun, SONG Laiyong, CHANG Xiaotao, et al. Vertical Deflection Measure with Digital Zenith Camera and Accuracy Analysis[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2011, 36(9): 1085-1088.
- [20] 时春霖, 张超, 袁晓波, 等. 天文大地测量的发展现状和展望[J]. *测绘工程*, 2019, 28(2): 33-40.
- SHI Chunlin, ZHANG Chao, YUAN Xiaobo, et al. The Present Situation and Prospect of Astronomical Geodetic Measurement[J]. *Engineering of Surveying and Mapping*, 2019, 28(2): 33-40.
- [21] 夏坚白, 宋成骅, 吴家让. 全能经纬仪 T4 的检验与应用[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2007.
- XIA Jianbai, SONG Chenghua, WU Jiarang. Inspection and Application of All-Round Theodolite T4[M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2007.
- [22] 王若璞. 新型大地天文测量系统工程化研究[D]. 郑州:信息工程大学, 2004.
- WANG Ruopu. Zhengzhou: Information Engineering University, 2004.
- [23] 张超. 基于电子经纬仪的天文测量系统及应用研究[D]. 郑州: 解放军信息工程大学, 2009.
- ZHANG Chao. Research on Astronomical Measurement System Based on Electronic Theodolite and Its Application[D]. Zhengzhou: Information Engineering University, 2009.
- [24] 董朝阳, 唐宇培, 刘新江. 天文经度测量中人仪差测定精度评估方法研究[J]. *海洋测绘*, 2015, 35(5): 47-50.
- DONG Zhaoyang, TANG Yupei, LIU Xinjiang. Precision Evaluating Methods of Personal and Instrumental Equation Correction in Astronomical Longitude Surveys[J]. *Hydrographic Surveying and Charting*, 2015, 35(5): 47-50.

- [25] HIRT C. Monitoring and Analysis of Anomalous Refraction Using a Digital Zenith Camera System[J]. *Astronomy & Astrophysics*, 459(1): 283-290.
- [26] MCCARTHY D D. Some Advantages and Disadvantages of a Photographic Zenith Tube[J]. *Symposium - International Astronomical Union*, 1979, 82: 65-66.
- [27] BALODIMOS D D, KORAKITIS R, LAMBROU E, et al. Fast and Accurate Determination of Astronomical Coordinates Φ , Λ AND AZIMUTH, USING a TOTAL STATION AND GPS RECEIVER[J]. *Survey Review*, 2003, 37(290): 269-275.
- [28] HIRT C, SEEBER G. High-Resolution Local Gravity Field Determination at the Sub-Millimeter Level Using a Digital Zenith Camera System. 2007
- [29] GERSTBACH G, PICHLER H. A Small CCD Zenith Camera (ZC-G1) - Developed for Rapid Geoid Monitoring in Difficult Projects[J]. *Publications de L'Observatoire Astronomique de Beograd*, 2003, 75: 221-228.
- [30] KUDRYS J. Automatic Determination of Vertical Deflection Components From GPS and Zenithal Star Observations.
- [31] HANADA H, ARAKI H, TAZAWA S, et al. Development of a Digital Zenith Telescope for Advanced Astrometry[J]. *Science China Physics, Mechanics and Astronomy*, 2012, 55(4): 723-732.
- [32] HALICIOGLU K, DENIZ R, OZENER H. Digital Astro-Geodetic Camera System for the Measurement of the Deflections of the Vertical: Tests and Results[J]. *International Journal of Digital Earth*, 2016, 9(9): 914-923.
- [33] 王红旗, 韩延本, 郭金运, 等. 用于测量铅垂线变化的小型天体测量仪器[C]//中国地球物理学会第二十七届年会论文集,长沙, 2011.
- [34] TIAN L L, GUO J Y, HAN Y B, et al. Digital Zenith Telescope Prototype of China[J]. *Chinese Science Bulletin*, 2014, 59(17): 1978-1983.
- [35] YUAN J J, GUO J Y, SHEN Y, et al. Automatic Observation of Astronomical Coordinates Using the Shandong University of Science and Technology/National Astronomical Observatories Digital Zenith Tube[J]. *Journal of Testing and Evaluation*, 2022, 50(6): 2838-2849.
- [36] 艾贵斌, 龚建, 张华伟, 等. 数字天顶摄影定位原理与方法[M]. 北京:解放军出版社, 2014, 1-5.
Ai G, Gong J, Zhang H, et al. Principles and methods of digital zenith photography positioning[M]. Beijing :Liberation Army Press, 2014, 1-5.
- [37] Guillaume S, Bürki B. Astrogeodetic Deflection of the Vertical at ETH Zürich: From the Development of Instrumentations to Concrete Applications[C]// American Geophysical Union, Fall Meeting, 2014.
- [38] ALBAYRAK M, WILLI D, GUILLAUME S. Field Comparison of the Total Station-Based QDaedalus and the Zenith Telescope-Based CODIAC Astrogeodetic Systems for Measurements of the Deflection of the Vertical[J]. *Survey Review*, 2023, 55(390): 247-259.

- [39] ZARINŠ A, RUBANS A, SILABRIEDIS G. Digital Zenith Camera of the University of Latvia[J]. *Geodesy and Cartography*, 2016, 42(4): 129-135.
- [40] VARNA I, WILLI D, GUILLAUME S, et al. Comparative Measurements of Astrogeodetic Deflection of the Vertical by Latvian and Swiss Digital Zenith Cameras[J]. *Remote Sensing*, 2023, 15(8): 2166.
- [41] WANG Y M, BECKER C, MADER G, et al. The Geoid Slope Validation Survey 2014 and GRAV-D Airborne Gravity Enhanced Geoid Comparison Results in Iowa[J]. *Journal of Geodesy*, 2017, 91(10): 1261-1276.
- [42] Guillaume S, Wolf A, Burki B. Deflections of the vertical measurement through rocky mountains for the NGS with the CODIAC ETH Zurich system[R]. Switzerland, Zurich: Swiss National Report on the Geodetic Activities in the Years 2015 to 2019, 2019, 127-128.
- [43] HAUK M, HIRT C, ACKERMANN C. Experiences with the QDaedalus System for Astrogeodetic Determination of Deflections of the Vertical[J]. *Survey Review*, 2017, 49(355): 294-301.
- [44] Hardy R A, Fancher K L, Ahlgren K. et al. Geodetic astronomy with an imaging robotic total station [C]//American Geophysical Union 2020 Fall Meeting, Silver Spring, G016-01, 2020.
- [45] 詹银虎, 张超, 李飞战, 等. 基于图像全站仪的天文大地垂线偏差测量及其精度分析[J]. *测绘学报*, 2023, 52(2): 175-182.
- ZHAN Yinhu, ZHANG Chao, LI Feizhan, et al. Astro-Geodetic Vertical Deflection Measurement and Accuracy Analysis Based on Image Total Station[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2023, 52(2): 175-182.
- [46] 王爱生. 利用 GPS 和水准测量解算垂线偏差[J]. *测绘通报*, 2002(2): 17-20.
- WANG Aisheng. Using GPS and Leveling to Calculate the Deviation of Vertical Line[J]. *Bulletin of Surveying and Mapping*, 2002(2): 17-20.
- [47] 李建忠. 用 GPS 测定垂线偏差[J]. *测绘工程*, 1999, 8(2): 34-37.
- LI Jianzhong. Determining Components of Vertical Deflections Using GPS[J]. *Engineering of Surveying and Mapping*, 1999, 8(2): 34-37.
- [48] Vandenberg D J. Combining GPS and terrestrial observations to determine deflections of the vertical [D]. MS thesis, Purdue University, West Lafayette, Indiana, 1999.
- [49] 欧海平, 胡曙光, 潘正华. 应用 GPS 与精密水准测定垂线偏差[J]. *城市勘测*, 2003(3): 46-47.
- OU Haiping, HU Shuguang, PAN Zhenghua. Determination of Vertical Deviation by GPS and Precise Leveling[J]. *Urban Geotechnical Investigation & Surveying*, 2003(3): 46-47.
- [50] 许曦, 刘庆元, 朱建军. 天文 GPS 水准方法的研究[J]. *中南大学学报(自然科学版)*, 2004, 35(4): 681-685.
- XU Xi, LIU Qingyuan, ZHU Jianjun. Study on GPS Astronomical Leveling[J]. *Journal of Central South University of Technology (Natural Science)*, 2004, 35(4): 681-685.

- [51] 徐益群, 陈日高, 暴景阳, 等. 用 GPS 水准法测定单点垂线偏差[J]. 海洋测绘, 2004, 24(6): 9-12.
XU Yiqun, CHEN Rigao, BAO Jingyang, et al. The Determination of Vertical Deflections Based on GPS Leveling Observations at Discrete Points[J]. *Hydrographic Surveying and Charting*, 2004, 24(6): 9-12.
- [52] ALBAYRAK M, MARTI U, WILLI D, et al. Precise Geoid Determination in the Eastern Swiss Alps Using Geodetic Astronomy and GNSS/Leveling Methods[J]. *Sensors*, 2024, 24(21): 7072.
- [53] 黄谟涛, 翟国君, 管铮, 等. 海洋重力场测定及其应用[M]. 北京: 测绘出版社, 2005.
HUANG Motao, ZHAI Guojun, GUAN Zheng, et al. Determination and Application of Marine Gravity Field[M]. Beijing: Sino Maps Press, 2005.
- [54] SCHWARZ K P, SIDERIS M G, FORSBERG R. The Use of FFT Techniques in Physical Geodesy[J]. *Geophysical Journal International*, 1990, 100(3): 485-514.
- [55] 宁津生, 晁定波, 李建成. Vening-Meinesz 公式的球面卷积形式[J]. 测绘学报, 1994, 23(3): 161-166.
NING Jinsheng, CHAO Dingbo, LI Jiancheng. The Spherical Convolution Form of Vening-Meinesz Formula[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 1994, 23(3): 161-166.
- [56] LIU Q W, LI Y C, SIDERIS M G. Evaluation of Deflections of the Vertical on the Sphere and the Plane: A Comparison of FFT Techniques[J]. *Journal of Geodesy*, 1997, 71(8): 461-468.
- [57] HUANG M T, ZHAI G J, GUAN Z, et al. On the Evaluation of Deflections of the Vertical Using FFT Technique[J]. *Geo-spatial Information Science*, 2001, 4(1): 5-13.
- [58] 齐显峰, 周巍, 崔吉春. EGM2008 重力场模型计算中国地区垂线偏差分析[J]. 测绘技术装备, 2011, 13(1): 6-8.
QI Xianfeng, ZHOU Wei, CUI Jichun. Analysis of Vertical Deviation of EGM2008 Gravity Field Model in China Area[J]. *Geomatics Technology and Equipment*, 2011, 13(1): 6-8.
- [59] 张永毅, 张兴福. 垂线偏差的确定方法及精度分析[J]. 大地测量与地球动力学, 2016, 36(5): 395-399.
ZHANG Yongyi, ZHANG Xingfu. Determination and Accuracy Analysis of Vertical Deflection[J]. *Journal of Geodesy and Geodynamics*, 2016, 36(5): 395-399.
- [60] WAN X Y, ANNAN R F, JIN S G, et al. Vertical Deflections and Gravity Disturbances Derived from HY-2A Data[J]. *Remote Sensing*, 2020, 12(14): 2287.
- [61] JI H, GUO J Y, ZHU C C, et al. On Deflections of Vertical Determined from HY-2A/GM Altimetry Data in the Bay of Bengal[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 2021, 14: 12048-12060.
- [62] HOLMES S A, FEATHERSTONE W E. A Unified Approach to the Clenshaw Summation and the Recursive Computation of very High Degree and Order Normalised Associated Legendre Functions[J]. *Journal of Geodesy*, 2002, 76(5): 279-299.
- [63] FUKUSHIMA T. Numerical Computation of Spherical Harmonics of Arbitrary Degree and Order by

- Extending Exponent of Floating Point Numbers[J]. *Journal of Geodesy*, 2012, 86(4): 271-285.
- [64] JEKELI C, LEE J K, KWON J H. On the Computation and Approximation of Ultra-High-Degree Spherical Harmonic Series[J]. *Journal of Geodesy*, 2007, 81(9): 603-615.
- [65] 苏勇, 范东明, 游为. 综合 Legendre 函数二阶导数的快速稳定递推算法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2012, 37(12): 1409-1412.
- SU Yong, FAN Dongming, YOU Wei. Fast and Stably Recursive Algorithm for Computing Second Derivative of Associated Legendre Functions[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2012, 37(12): 1409-1412.
- [66] 刘缙武, 刘世晗, 张敬伟. 5400 阶次勒让德函数的递推计算方法[J]. 海洋测绘, 2014, 34(4): 1-4.
- LIU Zuanwu, LIU Shihan, ZHANG Jingwei. Recursive Computation Methods of 5400 Degree and Order Legendre Functions[J]. *Hydrographic Surveying and Charting*, 2014, 34(4): 1-4.
- [67] 张飞. 利用球谐函数计算重力场元[D]. 抚州: 东华理工大学, 2017.
- ZHANG Fei. Fuzhou: East China Institute of Technology, 2017.
- [68] SVEHLA D. A Geometrical Approach for the Computation and Rotation of Spherical Harmonics and Legendre Functions up to Ultra-High Degree and Order.
- [69] XING Z B, LI S S, TIAN M, et al. Numerical Experiments on Column-Wise Recurrence Formula to Compute Fully Normalized Associated Legendre Functions of Ultra-High Degree and Order[J]. *Journal of Geodesy*, 2019, 94(1): 2.
- [70] SANDWELL D T. Antarctic Marine Gravity Field from High-Density Satellite Altimetry[J]. *Geophysical Journal International*, 1992, 109(2): 437-448.
- [71] OLGATI A, BALMINO G, SARRAILH M, et al. Gravity Anomalies from Satellite Altimetry: Comparison Between Computation *via* Geoid Heights and *via* Deflections of the Vertical[J]. *Bulletin Géodésique*, 1995, 69(4): 252-260.
- [72] HWANG C, KAO E C, PARSONS B. Global Derivation of Marine Gravity Anomalies from Seasat, Geosat, ERS-1 and TOPEX/POSEIDON Altimeter Data[J]. *Geophysical Journal International*, 1998, 134(2): 449-459.
- [73] 李建成, 宁津生, 陈俊勇, 等. 中国海域大地水准面和重力异常的确定[J]. 测绘学报, 2003, 32(2): 114-119.
- LI Jiancheng, NING Jinsheng, CHEN Junyong, et al. Geoid Determination in China Sea Areas[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2003, 32(2): 114-119.
- [74] 王虎彪, 王勇, 陆洋. 联合多种测高数据确定中国边缘海及全球海域的垂线偏差[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2007, 32(9): 770-773.
- WANG Hubiao, WANG Yong, LU Yang. High Precision Vertical Deflection over China Marginal Sea and Global Sea Derived from Multi-Satellite Altimeter[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan*

University, 2007, 32(9): 770-773.

- [75] 邓凯亮, 暴景阳, 章传银, 等. 联合多代卫星测高数据建立中国近海垂线偏差模型[J]. *海洋测绘*, 2008, 28(3): 15-17.

DENG Kailiang, BAO Jingyang, ZHANG Chuanyin, et al. Determination of Vertical Deflection over China Sea by Combination of Multi-Satellite Altimeter Data[J]. *Hydrographic Surveying and Charting*, 2008, 28(3): 15-17.

- [76] 万剑华, 王莉娟, 范陈清, 等. 联合多卫星测高数据确定中国近海及其邻域垂线偏差[J]. *海洋学研究*, 2012, 30(3): 86-91.

WAN Jianhua, WANG Lijuan, FAN Chenqing, et al. Determination of Vertical Deflection over China Seas and Their Vicinity from the Multi-Satellite Altimetric Data[J]. *Journal of Marine Sciences*, 2012, 30(3): 86-91.

- [77] 张胜军, 李建成, 褚永海, 等. 基于 Cryosat 和 Jason1 GM 数据的垂线偏差计算与分析[J]. *武汉大学学报(信息科学版)*, 2015, 40(8): 1012-1017.

ZHANG Shengjun, LI Jiancheng, CHU Yonghai, et al. Calculation and Analysis of the Deflection of Vertical Derived from Cryosat and Jason1 GM Data[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2015, 40(8): 1012-1017.

- [78] PENG H H, LIU X, LI Z, et al. Optimized Estimation of Marine Deflection of the Vertical from Multibeam Laser Altimeter Data of ICESat-2[J]. *Geophysical Journal International*, 2024, 239(1): 455-466.

- [79] 于道成, 黄金维, 祝会忠, 等. 利用 SWOT 宽刈幅测高数据提升海洋重力场精度: 与传统测高卫星的比较分析[J/OL]. *武汉大学学报(信息科学版)*, 2024, Doi: 10.13203/j.whugis20240120.

Yu Daocheng, Huang Jinwei, Zhu Huizhong, et al. Enhancing Marine Gravity Field Precision Using SWOT Wide-swath Altimetry Data: a Comparative Analysis with Traditional Altimetry Satellites[J/OL]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2024. <https://doi.org/10.13203/j.whugis20240120>. (

- [80] JIN X, LIU X, GUO J Y, et al. A Novel All-Weather Method to Determine Deflection of the Vertical by Combining 3D Laser Tracking Free-Fall and Multi-GNSS Baselines[J]. *Remote Sensing*, 2022, 14(17): 4156.

- [81] 郭金运, 吴渴知, 金鑫, 等. 高精度三维跟踪抛物运动的重力垂直梯度测量方法[J/OL]. *武汉大学学报(信息科学版)*, 2023, Doi:10.13203/j.whugis20220711.

Guo Jinyun, Wu Kezhi, Jin Xin, et al. A method to determine vertical gravity gradient by high-precision 3D tracking parabolic motion[J/OL]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2023. <https://doi.org/10.13203/j.whugis20220711>.