



武汉大学学报(信息科学版)

Geomatics and Information Science of Wuhan University

ISSN 1671-8860, CN 42-1676/TN

《武汉大学学报(信息科学版)》网络首发论文

题目：一种高分辨率全球重力场模型构建的高性能科学计算方法
作者：梁伟, 徐新禹, 李建成, 李朋远, 黄剑, 朱天林, 王东亚, 苑刚
DOI: 10.13203/j.whugis20240321
收稿日期: 2025-01-08
网络首发日期: 2025-02-05
引用格式: 梁伟, 徐新禹, 李建成, 李朋远, 黄剑, 朱天林, 王东亚, 苑刚. 一种高分辨率全球重力场模型构建的高性能科学计算方法[J/OL]. 武汉大学学报(信息科学版). <https://doi.org/10.13203/j.whugis20240321>



网络首发: 在编辑部工作流程中, 稿件从录用到出版要经历录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿等阶段。录用定稿指内容已经确定, 且通过同行评议、主编终审同意刊用的稿件。排版定稿指录用定稿按照期刊特定版式(包括网络呈现版式)排版后的稿件, 可暂不确定出版年、卷、期和页码。整期汇编定稿指出版年、卷、期、页码均已确定的印刷或数字出版的整期汇编稿件。录用定稿网络首发稿件内容必须符合《出版管理条例》和《期刊出版管理规定》的有关规定; 学术研究成果具有创新性、科学性和先进性, 符合编辑部对刊文的录用要求, 不存在学术不端行为及其他侵权行为; 稿件内容应基本符合国家有关书刊编辑、出版的技术标准, 正确使用和统一规范语言文字、符号、数字、外文字母、法定计量单位及地图标注等。为确保录用定稿网络首发的严肃性, 录用定稿一经发布, 不得修改论文题目、作者、机构名称和学术内容, 只可基于编辑规范进行少量文字的修改。

出版确认: 纸质期刊编辑部通过与《中国学术期刊(光盘版)》电子杂志社有限公司签约, 在《中国学术期刊(网络版)》出版传播平台上创办与纸质期刊内容一致的网络版, 以单篇或整期出版形式, 在印刷出版之前刊发论文的录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿。因为《中国学术期刊(网络版)》是国家新闻出版广电总局批准的网络连续型出版物(ISSN 2096-4188, CN 11-6037/Z), 所以签约期刊的网络版上网络首发论文视为正式出版。

DOI:10.13203/j.whugis20240321

引用格式：

梁伟, 徐新禹, 李建成, 等. 一种高分辨率全球重力场模型构建的高性能科学计算方法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2025, DOI:10.13203/J.whugis20240321 (LIANG Wei, XU Xinyu, LI Jiancheng, et al. A New High Performance Scientific Computation Method for High Resolution Earth's Gravity Field Model[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2025, DOI:10.13203/J.whugis20240321)

一种高分辨率全球重力场模型构建的高性能科学计算方法

梁伟¹, 徐新禹^{2,3}, 李建成³, 李朋远¹, 黄剑¹, 朱天林¹, 王东亚¹, 苑刚¹

1 北京跟踪与通信技术研究所, 北京 100094

2 武汉大学测绘学院, 湖北 武汉 430079

3 中南大学, 湖南 长沙 410083

摘要 利用多源重力观测构建高分辨率全球重力场模型是重力场研究的基本任务之一。本文将半解析方法引入到高分辨率重力场模型构建, 同时采用 OpenMP+MPI 并行计算思路, 设计了一种高分辨率全球重力场模型构建的高性能科学计算方法, 该方法可以有效在大型集群计算系统下分布式运行, 通过数值实验验证分析了计算方法的计算精度和效率, 结果表明: 半解析方法可有效减少模型构建的计算量和内存消耗, 解算 30'分辨率重力场模型的计算效率是传统块对角最小二乘方法的 7 倍; 使用 OpenMP+MPI 混合同行算法计算效率是串行程序的 18 倍; 利用 4 个节点的 80 个 CPU 可在 1 天内完成 2'高分辨率重力场模型的解算。

关键词 高分辨率重力场模型; 高性能科学计算; OpenMP+MPI 混合同行编程

A New High Performance Scientific Computation Method for High Resolution Earth's Gravity Field Model

收稿日期: 2025-01-08

基金项目: 国家自然科学基金(42388102, 42192533, 42074019)

第一作者: 梁伟, 博士, 助理研究员, 主要从事空间态势感知、高分辨率重力场模型构建研究。wliang@whu.edu.cn

通讯作者: 苑刚, 博士, 副研究员。yuangang1978@126.com

LIANG Wei¹, XU Xinyu^{2,3}, LI Jiancheng³, LI Pengyuan¹, HUANG Jian¹, ZHU Tianlin¹,
WANG Dongya¹, YUAN Gang¹

1 Beijing Institute of Tracking and Telecommunications Technology, Beijing 100094, China

2 School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan 430079, China

3 Central South University, Changsha 410083, China

Abstract This paper focuses on high performance and scientific computation method in high resolution Earth's gravity field modeling, based on the semi-analysis method, OpenMP and MPI parallel computing method. A new high performance and scientific computing method is designed, which is validated by numerical experiments on computing error and computing efficiency. The semi-analysis can effectively reduce the computation and storage consumption in high resolution gravity field modeling; the time consumption of OpenMP+MPI hybrid parallel computing is only 1/18.4 that of sequential computing with 20 cores; the new computing method proposed in this paper with semi-analysis and OpenMP+MPI computing can be used on super computers for earth's gravity field modeling, and the modeling of coefficients up to d/o 5399 can be completed within one day by using 80 CPUs on 4 nodes.

Keywords high resolution gravity field model; high performance computing; OpenMP+MPI hybrid parallel computing

重力场是地球的基本物理场，高分辨率重力场模型广泛应用于地球科学的相关领域，包括确定大地水准面、统一全球高程基准、计算动态海面地形、确定地球内部结构中各圈层的分界面等。近年在国际地球重力场模型中心（International Center for Global Earth Models, ICGEM）发布的高分辨率地球重力场模型有：EGM2008^[1]、EIGEN-6C4^[2]、GOCO05c^[3]、XGM2019e^[4]和 SGG-UGM-2^[5]等。高分辨率重力场模型求解时需要使用的数据量大、求解的参数多、数学模型复杂，求解过程中需要消耗的计算资源庞大、计算耗时长，是制约高分辨率重力场模型解算的重要因素，研究高分辨率重力场模型的高性能科学计算方法具有非常重要的应用价值。

高性能科学计算通常包括科学计算和高性能计算。科学计算指通过设计更加

高效的计算方法以优化计算模型、减少计算消耗实现快速计算，例如快速傅里叶变换（Fast Fourier Transform, FFT）方法^[6,7]。FFT 方法是当前重力场及相关领域使用最多的科学计算方法，Colombo^[7]最早将 FFT 方法用于全球重力场计算，解决了球谐综合（Spherical Harmonic Synthesis, SHS）和球谐分析（Spherical Harmonic Analysis, SHA）的快速计算问题，Sneeuw^[8]介绍了 FFT 方法在全球重力数据球谐分析中的应用。Pavlis^[9]介绍了块对角最小二乘（Block-Diagonal Least-Squares, BDLS）方法的使用条件，并用于求解重力场模型，Colomb^[7]、李新星^[10]等分析了多种块对角形式，EGM2008、EIGEN-6C4、SGG-UGM-2、XGM2019 等模型求解时都使用了块对角最小二乘方法。在卫星重力场建模中，Rummel^[11]和 Sneeuw^[12]在卫星重力梯度观测数据处理中提出了基于 1D-FFT 和 2D-FFT 的半解析（Semi-Analysis, SA）方法，又称 lumped-coefficients 方法；其中基于 2D-FFT 的 SA 方法又称为 Torus 方法。Preimesberger 和 Pail^[13]、徐新禹^[14]、刘焕玲^[15,16]等分别使用数值模拟和实测数据介绍了半解析方法在卫星重力场模型解算中的应用。

高性能计算（High Performance Computing, HPC）指利用并行计算程序和大规模并行计算机系统完成计算任务。高性能计算并不能减小计算任务总的计算量，是将庞大的计算任务分配到多个计算核心上同时完成计算任务，从而降低计算耗时。常用的并行计算技术有 OpenMP（Open Multi-Processing）并行计算技术^[17]和 MPI（Message Passing Interface）并行计算技术^[18,19]。邹贤才等^[20]、周浩等^[21,22]、Mayer-Gürr 等^[23]、梁伟等^[24]分别将 OpenMP 并行计算技术用于卫星重力数据处理、卫星重力场模型反演和高分辨率重力场模型构建中，陈正生等^[25]、王鸿琰^[26]分别使用高性能计算解决了地理计算和 GNSS 数据处理中的计算大规模计算问题。Brockmann 等^[27]根据 MPI 并行计算技术设计的高分辨率重力场模型的解算程序，在求解重力场模型时使用了上千个计算核心及 TB 量级的内存。一些可以处理矩阵运算的并行数学库中使用了 MPI 并行计算，例如 PBLAS（Parallel Basic Linear Algebra Subprograms）^[28,29]，Blackford 等，1997；Choi 等，1992）、ScaLAPACK（SCALable Linear Algebra Package）^[28,29]，可以直接调用这些并行数学计算库将重力场模型解算中的矩阵运算并行化。

随着重力数据、地形数据的分辨率不断提高，解算高分辨率重力场模型的阶

次越来越高，构建模型所需的计算量也越来越庞大。本文将卫星重力场建模常用的半解析方法用于高分辨率重力场构建，结合 OpenMP+MPI 混合并行编程技术，设计了一种构建高分辨率重力场模型的高性能科学计算方法。本文首先在第二节介绍半解析方法、OpenMP+MPI 混合并行编程在模型构建中的应用，第三节通过数值实验对方法进行验证分析，最后总结全文。

1 理论与方法

1.1 利用半解析方法解算高分辨率重力场模型系数

重力异常观测值 $\Delta g(r, \vartheta, \lambda)$ 的地球重力场模型球谐展开式为^[30]:

$$\Delta g(r, \vartheta, \lambda) = \frac{GM}{r^2} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda)) \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta) \quad (1)$$

其中 GM 是地心引力常数， a 是参考椭球的长半轴， (r, ϑ, λ) 为球坐标；地球重力场模型球谐系数是地球引力位的球谐系数，而引力位是正常位和扰动位之和， $(\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm})$ 是扰动位的球谐系数； \bar{P}_{nm} 是完全正规化的勒让德函数， n, m 分别为勒让德函数和球谐系数的阶和次。

调换(1)式中级数求和的次序可得：

$$\Delta g(r, \vartheta, \lambda) = \sum_{m=0}^{N_{\max}} (\cos(m\lambda)) \cdot \left(\sum_{n=\max(m,2)}^{N_{\max}} \frac{GM}{r^2} (n-1) \bar{C}_{nm} \bar{P}_{nm}(\vartheta) + \sin(m\lambda) \cdot \left(\sum_{n=\max(m,2)}^{N_{\max}} \frac{GM}{r^2} (n-1) \bar{S}_{nm} \bar{P}_{nm}(\vartheta) \right) \right) \quad (2)$$

定义集总 (lumped coefficients, LC) 系数 (A_m, B_m) 为^[8]:

$$\begin{aligned} A_m &= \sum_{n=\max(m,2)}^{N_{\max}} \frac{GM}{r^2} (n-1) \left(\frac{a}{r}\right)^n \bar{C}_{nm} \bar{P}_{nm}(\delta) \\ B_m &= \sum_{n=\max(m,2)}^{N_{\max}} \frac{GM}{r^2} (n-1) \left(\frac{a}{r}\right)^n \bar{S}_{nm} \bar{P}_{nm}(\delta) \end{aligned} \quad (3)$$

将(3)式代入到(2)式中可得：

$$\Delta g = \sum_{m=0}^{N_{\max}} (\cos(m\lambda) A_m + \sin(m\lambda) B_m) \quad (4)$$

球面规则等角格网的重力异常可以表示为 Δg_{ij} ，其中 i 表示第 i 个纬度带， j

表示第 j 个子午圈， Δg_{ij} 可以表示为：

$$\Delta g_{ij} = \sum_{m=0}^{N_{\max}} (\cos(m\lambda_j)A_m^i + \sin(m\lambda_j)B_m^i) \quad (5)$$

其中， A_m^i 和 B_m^i 表示第 i 个纬度带上 m 次的 LC 系数。

若有第 i 个纬度带上的重力异常 $\Delta g_{ij}, j=1, \dots, 2N$ (其中 N 表示纬度带的个数)，根据 FFT 方法的特点^[6-8]，由纬度带上的重力异常数据可以使用 FFT 方法快速计算得到该纬度带上所有的 LC 系数 $A_m^i, m=0, N_{\max}$ 和 $B_m^i, m=0, N_{\max}$ ，其中 N_{\max} 是待求重力场模型的最高阶。

根据 LC 系数与重力场模型系数的线性关系式(3)式，可以由 LC 系数建立 \bar{C}_{nm} 和 \bar{S}_{nm} 的观测方程。例如，可以由系数 $A_2^i, i=1, N$ 建立如下的观测方程：

$$\begin{bmatrix} A_2^1 \\ A_2^2 \\ \dots \\ A_2^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{GM}{r^2}(2-1)\left(\frac{a}{r}\right)^2 \bar{P}_{22}(\delta_1) & \frac{GM}{r^2}(4-1)\left(\frac{a}{r}\right)^2 \bar{P}_{42}(\delta_1) & \dots & \frac{GM}{r^2}(N_{\max}-2)\left(\frac{a}{r}\right)^{N_{\max}-1} \bar{P}_{N_{\max}-1,2}(\delta_1) & \frac{GM}{r^2}(3-1)\left(\frac{a}{r}\right)^3 \bar{P}_{32}(\delta_1) & \frac{GM}{r^2}(5-1)\left(\frac{a}{r}\right)^5 \bar{P}_{52}(\delta_1) & \dots & \frac{GM}{r^2}(N_{\max}-1)\left(\frac{a}{r}\right)^{N_{\max}} \bar{P}_{N_{\max},2}(\delta_1) \\ \frac{GM}{r^2}(2-1)\left(\frac{a}{r}\right)^2 \bar{P}_{22}(\delta_2) & \frac{GM}{r^2}(4-1)\left(\frac{a}{r}\right)^2 \bar{P}_{42}(\delta_2) & \dots & \frac{GM}{r^2}(N_{\max}-2)\left(\frac{a}{r}\right)^{N_{\max}-1} \bar{P}_{N_{\max}-1,2}(\delta_2) & \frac{GM}{r^2}(3-1)\left(\frac{a}{r}\right)^3 \bar{P}_{32}(\delta_2) & \frac{GM}{r^2}(5-1)\left(\frac{a}{r}\right)^5 \bar{P}_{52}(\delta_2) & \dots & \frac{GM}{r^2}(N_{\max}-1)\left(\frac{a}{r}\right)^{N_{\max}} \bar{P}_{N_{\max},2}(\delta_2) \\ \dots & \dots \\ \frac{GM}{r^2}(2-1)\left(\frac{a}{r}\right)^2 \bar{P}_{22}(\delta_N) & \frac{GM}{r^2}(4-1)\left(\frac{a}{r}\right)^2 \bar{P}_{42}(\delta_N) & \dots & \frac{GM}{r^2}(N_{\max}-2)\left(\frac{a}{r}\right)^{N_{\max}-1} \bar{P}_{N_{\max}-1,2}(\delta_N) & \frac{GM}{r^2}(3-1)\left(\frac{a}{r}\right)^3 \bar{P}_{32}(\delta_N) & \frac{GM}{r^2}(5-1)\left(\frac{a}{r}\right)^5 \bar{P}_{52}(\delta_N) & \dots & \frac{GM}{r^2}(N_{\max}-1)\left(\frac{a}{r}\right)^{N_{\max}} \bar{P}_{N_{\max},2}(\delta_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_{22} \\ \bar{C}_{42} \\ \dots \\ \bar{C}_{N_{\max}-1,2} \\ \bar{C}_{32} \\ \bar{C}_{52} \\ \dots \\ \bar{C}_{N_{\max},2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

若有全球覆盖的球面重力异常数据，我们可以计算得到所有的 LC 系数 $A_m^i, m=0, N_{\max}, i=1, \dots, N$ 和 $B_m^i, m=0, N_{\max}, i=1, \dots, N$ ，然后建立重力场模型系数的观测方程：

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}^e + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad D\{\mathbf{y}\} = \sigma_0^2 \mathbf{Q} = \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1} \quad (7)$$

其中 \mathbf{y} 是 LC 系数观测向量； \mathbf{A} 是根据(3)式计算的设计矩阵； \mathbf{x}^e 是待求的系数向量； $\boldsymbol{\varepsilon}$ 是数据误差向量； $D\{\mathbf{y}\}$ 是误差的方差-协方差矩阵； \mathbf{P} 和 \mathbf{Q} 分别为数据权阵及其逆矩阵； σ_0^2 是单位权方差。

建立观测方程后，可以在最小二乘准则下求解模型系数。解算观测方程时，按照一定次序排列待求参数时，使用 LC 系数构建的法方程具有块对角特性，因此可以使用块对角最小二乘方法求解(7)式的观测方程，高效解算重力场模型系数。

(8)式是由重力异常数据使用半解析方法快速求解重力场模型系数的过程，由于使用了 FFT 方法和 BDLS 方法，该方法的计算效率将通过 2.1 节数值实验分析验证。

$$\Delta g_{ij} \xrightarrow{\text{FFT}} (A_m^i, B_m^i) \xrightarrow{\text{BDLS}} (\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}) \quad (8)$$

1.2 OpenMP+MPI 混合高性能并行计算模型

高性能计算一般指使用超级计算机、大规模集群系统等大型计算系统快速高效解算科学和工程中的计算问题。使用高性能计算进行模型求解时，需要使用一定的并行计算模型，本节主要介绍 OpenMP、MPI 和 OpenMP+MPI 混合同行模型的基本原理。

1.2.1 OpenMP 并行算法设计

OpenMP 是面向共享内存的多线程并行计算模型，如图 1 所示。OpenMP 并行计算模型在计算时会有一定的规则下产生多个线程，这些线程会运行在计算节点的多个计算核心上，共享节点内的内存，线程间无需进行通信就可以直接访问所有的数据。OpenMP 计算模型的运行模式是：1) 当开始计算时，主线程 (master thread) 开始运行，主线程负责完成变量定义等基本功能；2) 当计算到预先定义的并行区后，会按照预先定义的方式开辟子线程组，这些线程会共享整个程序的数据或内存，在不同的 CPU 下运行，相互协作完成整个计算任务；3) 并行区结束之后，子线程结束，仅主线程执行程序中的串行部分，直到遇到下一个并行区；4) 遇到下一个并行区后按照相同的方式执行并行区，直到程序结束^[17]。

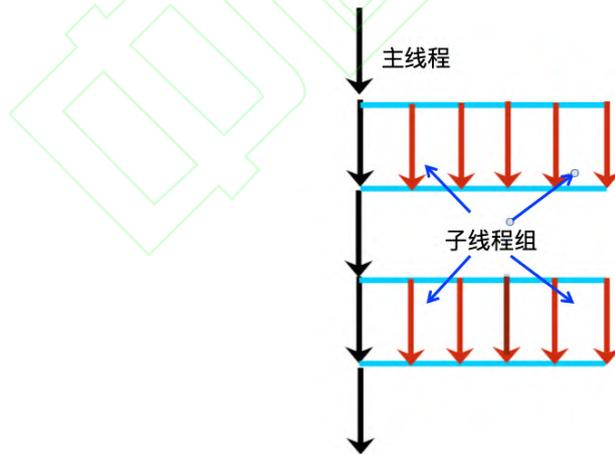


图 1 OpenMP 并行计算模型的工作机制

Fig 1 The mechanism of OpenMP parallel computing

OpenMP 是编译制导型的并行设计思路，OpenMP 通过定义一系列的编译导语指导程序在编译的时候，按照具体的导语将程序编译成可以并行执行的程序。

OpenMP 支持 C、C++和 Fortran 等编程语言，在原有串行计算上设置 OpenMP 编译制导语句，将制导语句指定的部分作为并行区域并行执行，一般选取的并行区域是计算程序中计算密集且可独立运行的部分，这样对程序做很小的改动就可以将程序改为 OpenMP 并行执行的程序^[17]。常用的 OpenMP 导语有：PARALLEL 和 END PARALLEL、DO 和 END DO、PRIVATE、NUM_THREADS 等导语。

使用块对角最小二乘方法求解重力场模型系数时，法方程矩阵是块对角形式的，各法方程矩阵块相互独立，可以逐个构建和求解，所有法方程块的解形成最终的模型系数。如表 1 所示，这样的求解模型可以设计为一个循环，循环的次数就是法方程矩阵块的总数，每次循环可以构建和解算法方程的一个块，得到该法方程块对应的系数，解算所有块就可得到待求模型系数。

块对角最小二乘方法计算程序的计算密集区域就是构建和求解法方程块的循环，由于不同循环间不相关，使用 OpenMP 的 DO 导语就可以将这个循环并行。附件的表 1 给出了将该循环并行的伪代码，在该循环外部添加了 OpenMP 的 PARALLEL 和 DO 导语，声明该区域为并行执行的区域，将该任务分配到 20 个线程中。这样就可以将程序改为可在共享内存节点的多个计算核心上运行的并行程序。

1.2.2 MPI 并行算法设计

MPI 是面向分布式内存的基于消息传递的多进程并行计算模型，如图 2 所示，使用 MPI 并行模型时会在一定的规则下产生多个进程，它们可以运行在分布式内存计算机的多个节点上，这些进程通过通信交换数据、协作完成整个计算任务，具体的运行模式是：1) 启动时需要设置运行的进程数，启动后会产生多个进程，这些进程将运行在分布式计算机的多个节点上；2) 运行至并行区域后开始执行预先分配的计算任务；3) 在并行区域内，进程之间通过消息传递函数进行通信，传递数据；4) 直到程序结束^[18,19]。

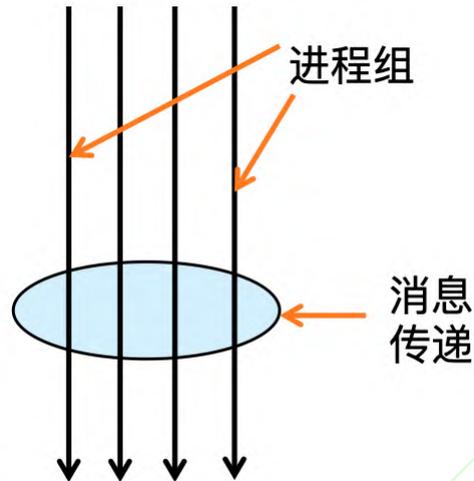


图 2 MPI 的工作机制

Fig 2 The mechanism of MPI parallel computing

与 OpenMP 不同，MPI 是消息传递机制的编程方法，MPI 通过定义一系列运行时的消息传递函数和其他函数实现计算任务的分配以及进程间的通信，通过消息传递函数实现进程组之间的协同工作。比较重要的函数有 MPI_Init、MPI_Finalize、MPI_SEND、MPI_RECV、MPI_BCAST 等函数。

BDLS 方法的计算密集区是法方程块构建和求解的循环，按照 MPI 并行计算模型，MPI 并行程序在运行时可以产生多个进程，每个进程负责一部分计算任务。在 BDLS 方法中，我们可以把循环分摊到每个进程中，每个进程负责一部分法方程块的构建及求解，并把它解算的系数都发送到主进程中，主进程接受所有进程计算的解，然后把所有的系数输出。按照这种方法，本文设计了 MPI 并行的 BDLS 计算方法，附件的表 2 给出了算法的伪代码，表中所示，进程号为 0 的进程负责接受其他线程计算的系数，所有进程号不为 0 的进程负责计算分配给该进程的任务，并把计算好的系数发送到 0 进程。每个进程负责构建及求解的法方程块的序号是以 myid 为首项、公差为 nprocs-1 的等差数列，其中 nprocs 是总进程数。所有非 0 进程完成计算任务后，通过 0 号进程输出最终的待求模型系数。

1.2.3 OpenMP+MPI 混合并行算法设计

OpenMP 和 MPI 并行计算模型有各自的缺点，OpenMP 并行模型只能在单个节点运行，可完成的计算规模比较小，而 MPI 并行模型的缺点是并行运行的多个进程间无法共享内存，这样会浪费内存空间，内存容易超过节点内存总量，使

用 OpenMP+MPI 混合的并行模型可以发挥各自的优势、弥补缺点。一般混合并行算法设计的顺序是首先设计单一的并行计算方法,然后再添加另外一种并行模型的函数或者导语,将其混合并行计算模型。

1.2.2 设计了使用 MPI 并行的计算方法,在该算法的基础上,添加 OpenMP 的导语就可以将其改为 OpenMP+MPI 混合计算模型。附件的表 3 给出了混合并行模型的伪代码,在法方程块的循环上添加了 OpenMP 导语,这样就可以将原计算模型改为混合并行,在运行时,每一个进程都可以开辟多个线程,多个线程可以协同完成计算任务。混合编程中一般将程序的 MPI 进程数设置为集群中的节点数,将 OpenMP 线程数设置为计算节点的计算核心数,这样并行程序运行时每个进程独立运行在集群的一个计算节点上,进程内的线程运行在节点的计算核心上,进程间通过消息传递函数协同工作,同一个节点上的所有线程可以共享数据,减少内存消耗,降低数据传输时间。

2 数值计算与分析

本节通过数值实验,分析了半解析方法和 OpenMP+MPI 高性能并行的计算效率。

2.1 使用半解析方法解算模型系数

为分析 SA 方法求解重力场模型的计算精度,本节进行了如下数值实验:

- 1) 使用 EGM2008 (359 阶) 模型计算了半径为 6378136.3 m 球面上格网中心的重力异常点值数据,数据的分辨率为 30'×30',该重力异常数据记为 GRAV30;
- 2) 由该重力异常数据,使用 SA 方法计算得到重力场模型系数,记为 Model-SA。

图 3 是 Model-SA 的系数阶误差,Model-SA 全频段的系数阶误差均小于 10^{-17} 量级,这是计算机截断误差造成的,这说明由重力异常数据可以使用 SA 方法解算高精度的重力场模型系数。

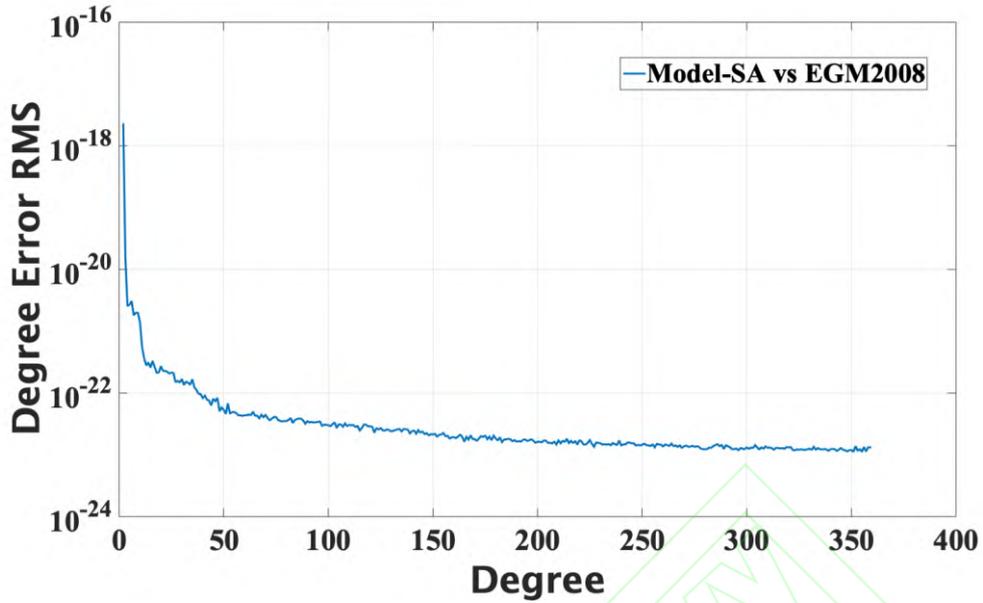


图 3 Model-SA 的系数误差
Fig 3 The degree error RMS of Model-SA

块对角最小二乘方法是当前解算高阶重力场模型的常用方法，半解析方法相对块对角最小二乘方法有两个方面的优势。

(1) 计算量更小。由块对角最小二乘方法的基本原理可知^[7,9,10]，同次的 \bar{C}_{nm} 系数和 \bar{S}_{nm} 系数的法方程是相互独立的，同次的 \bar{C}_{nm} 或 \bar{S}_{nm} 系数的奇数阶的法方程与偶数阶系数的法方程也是相互独立的，因此 m 次系数的法方程由四个不相关的对角块组成，其结构如图 4 左图所示，其中 1 到 100 表示同次系数中按照阶进行排列的序号，NEQ-C-O 代表 m 次 \bar{C}_{nm} 系数奇数阶的法方程；NEQ-C-E 代表 m 次 \bar{C}_{nm} 系数偶数阶的法方程；NEQ-S-O 代表 m 次 \bar{S}_{nm} 系数奇数阶的法方程；NEQ-S-E 代表 m 次 \bar{S}_{nm} 系数偶数阶的法方程。

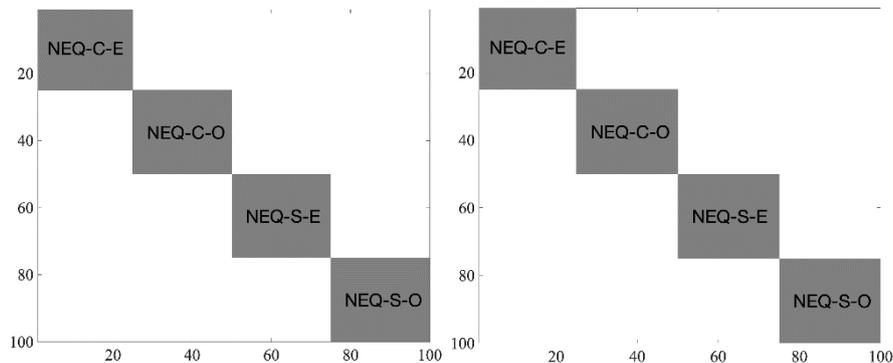


图 4 块对角最小二乘方法（左）和 SA 方法（右）的法方程结构示意图

Fig 4 The structure of the normal matrix of BDLS method (left side) and SA method (right side)

以 \bar{c}_{nm} 系数为例，BDLS 方法中法方程元素由(9)式计算，SA 方法的法方程结构与 BDLS 方法的法方程结构类似，其法方程元素由(10)式计算。对比(9)式和(10)式可知，SA 方法的法方程元素不需要计算 \cos 函数的内积，这是由于 SA 方法使用了 FFT，使用 FFT 方法将重力异常数据转换为 LC 系数时已经进行了三角函数的计算。使用半解析方法构建法方程时不需要计算三角函数的内积，而且由于法方程元素与三角函数无关，因此法方程中同次的 \bar{c}_{nm} 系数与 \bar{s}_{nm} 系数的法方程块是相同的，法方程的结构如图 4 右图所示。由此在半解析方法中，构建同次法方程时仅需要构建其中奇数阶和偶数阶系数的法方程，法方程构建所需的计算量减少了一半。

$$NEQ_{ij} = \left(\frac{GM}{r^2}\right)^2 (n_i - 1)(n_j - 1) \left(\frac{a}{r}\right)^{n_i + n_j} \sum_{p=1}^N \bar{P}_{n_i, m}(\vartheta_p) \bar{P}_{n_j, m}(\vartheta_p) \sum_{q=1}^{2N} \cos(m\lambda_q) \cos(m\lambda_q) \quad (9)$$

$$NEQ_{ij} = \left(\frac{GM}{r^2}\right)^2 (n_i - 1)(n_j - 1) \left(\frac{a}{r}\right)^{n_i + n_j} \sum_{p=1}^N \bar{P}_{n_i, m}(\vartheta_p) \bar{P}_{n_j, m}(\vartheta_p) \quad (10)$$

其中 NEQ 表示法方阵， n_i 和 n_j 分别表示法方程矩阵中第 i 行和第 j 行元素相应的系数的阶， N 表示全球格网纬度带的个数； p 和 q 分别表示格网在第 p 个纬度带和第 q 个子午带。

分别使用块对角最小二乘方法和半解析方法，在单 CPU 环境下，由 EGM2008（360 阶）模型计算半径为 6378136.3 m 球面上的重力异常点值数据，解算了重力场模型，块对角最小二乘方法解算 359 阶重力场模型的计算耗时为 173.5 s，半解析方法的计算耗时为 24.8 s，使用半解析方法的计算耗时约为 BDLS 方法的 1/7。

(2) 内存消耗更小。使用半解析方法时，同次的 \bar{c}_{nm} 系数和 \bar{s}_{nm} 系数的法方程矩阵是相同的，因此在计算时只需要构建 \bar{c}_{nm} 或 \bar{s}_{nm} 系数的法方程，只需存储一半的法方程，相对 BDLS 方法，SA 方法可降低内存消耗。解算低阶次重力场模型时消耗的内存小，半解析方法的优势不明显，在高分辨率模型解算中 SA 的优势可发挥出来。通常高分辨率重力场模型解算会使用 OpenMP 或 MPI 并行计算方法，以 OpenMP 并行计算为例，一个计算节点通常运行多个线程，每个线程都

需要构建私有的法方程等变量，开辟私有的内存空间，当节点上运行的线程较多时，节点内的内存不能满足这些线程的需求。

表 1 给出了使用 OpenMP 并行计算的程序运行 32 个线程时的内存需求，可知模型分辨率提高时并行程序的内存消耗会急剧增加，半解析方法内存需求低，降低节点内存不足的风险。

表 1 32 个线程并行运行的法方程矩阵的内存需求（单位：GB）

Tab 1 The memory requirements for the normal matrix of parallel computing with 32 threads

分辨率	内存需求
$10' \times 10'$	0.3
$5' \times 5'$	1.1
$2' \times 2'$	7.0
$1' \times 1'$	27.8

2.2 OpenMP 并行计算模型验证

根据 1.2.1 节的并行计算模型，编写了使用 OpenMP 并行编程的块对角最小二乘方法解算程序，并在共享内存的计算节点上进行了数值实验，计算节点上有 20 个主频为 2.4 GHz 的 Intel Xeon CPU，数值实验的过程与 2.1 节的实验的思路类似：

- 1) 使用 GRAV30 为实验数据；
- 2) 由该重力异常数据，使用 BDLS 方法解算得到重力场模型系数，记为 Model-BDLS，该计算程序未使用 OpenMP 并行计算方法，并统计模型计算时间；
- 3) 由该重力异常数据，使用 BDLS 方法计算得到重力场模型系数，记为 Model-OpenMP，并统计模型计算时间。使用 OpenMP 并行编程，程序计算时使用了 20 个 CPU，并行程序开辟了 20 个线程，每个 CPU 上运行一个线程。

图 5 是 Model-BDLS 和 Model-OpenMP 的系数阶误差，两个模型的系数基本一致，系数阶误差均小于 10^{-17} 量级，这源于计算机的截断误差。由此说明，使用 OpenMP 并行解算模型的系数精度。未使用 OpenMP 并行编程之前，BDLS 方法求解 360 阶模型的耗时为 173.5 s，使用 OpenMP 并行编程后，求解 360 阶模型的耗时为 9.2 s，仅为原程序的 1/18.8。由于运行在不同核心上的线程同时读取共有变量会产生竞争，由此引起时间延迟，使得程序的运行时间未达到串行程序时间的 1/20。

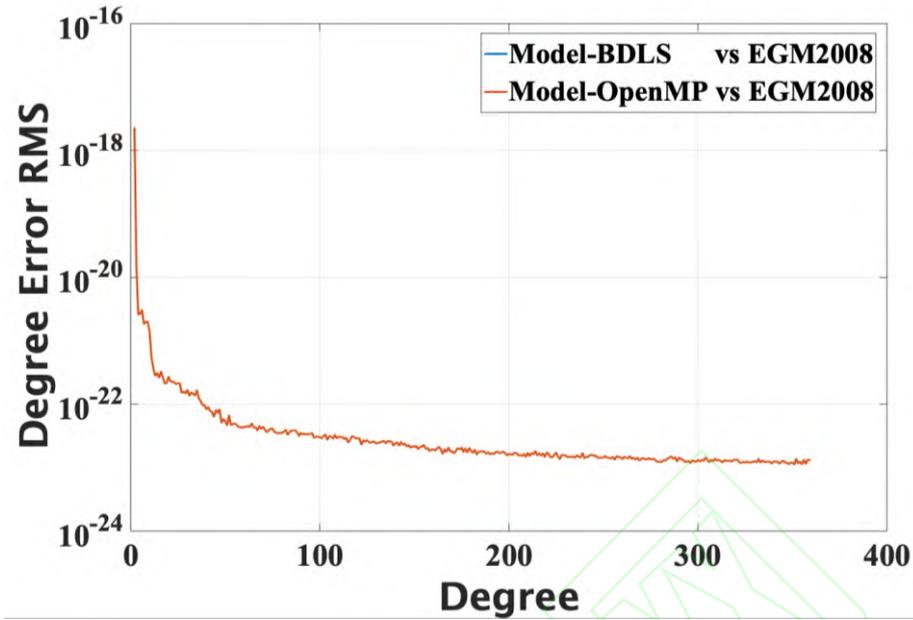


图 5 Model-BDLS 和 Model-OpenMP 的系数误差

Fig 5 The degree error RMS of Model-BDLS and Model-OpenMP

2.3 MPI 并行并行计算模型验证

由 GRAV30 数据，根据 2.2 节的设计的基于 MPI 的 BDLS 并行计算方法，计算了 360 阶的重力场模型系数，记为 Model-MPI，并统计模型计算时间。模型解算时使用了两个计算节点，每个节点上使用了 10 个主频为 2.4 GHz 的 Intel Xeon CPU，总共有 20 个进程。

图 6 是 Model-MPI 的系数阶误差，系数阶误差均小于 10^{-17} 量级，这是由计算机的截断误差造成的，这说明了 MPI 并行解算系数的准确性。未使用 MPI 并行编程之前，BDLS 计算程序求解 360 阶模型的计算耗时为 173.5 s，使用 MPI 并行编程后，程序求解 360 阶模型的计算耗时为 9.3 s，程序的计算时为原程序的 1/18.6。同时，由于进程间通信等原因造成的时间延迟，使得程序的计算时间未达到串行程序时间的 1/20。

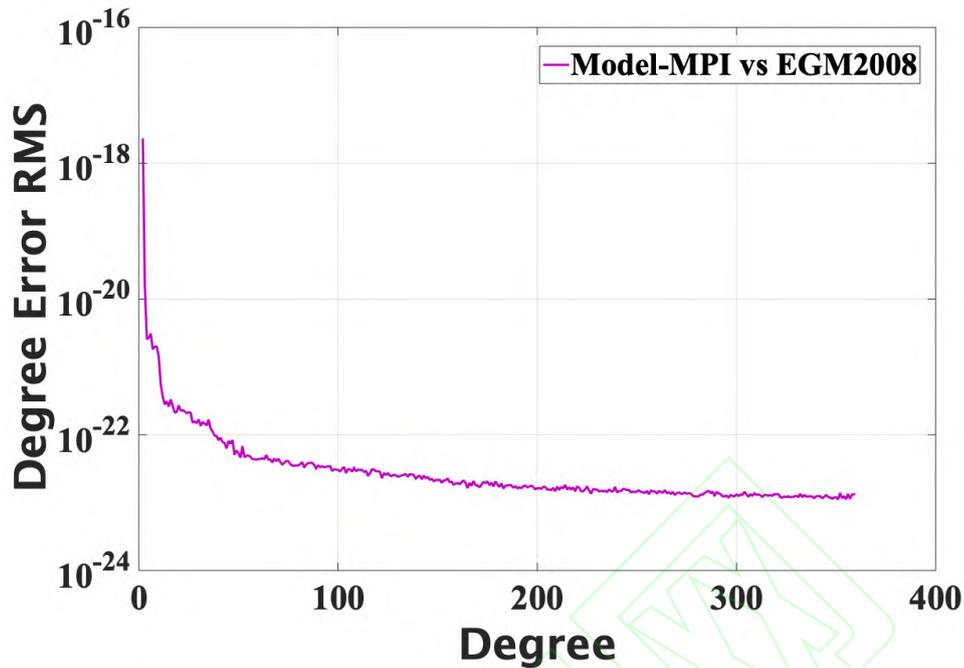


图 6 Model-MPI 的系数误差
Fig 6 The degree error RMS of Model-MPI

2.4 OpenMP+MPI 混合并行并行计算模型验证

根据 1.2.3 节设计的 OpenMP+MPI 混合并行算法，使用混合并行计算模型系数解算了模型系数，系数精度与上面两节计算的模型基本一致，系数阶误差均小于 10^{-17} 量级。计算耗时与使用的核心数相关，使用两个节点共 20 个核心的计算时间为 9.4 s，该计算时间为串程序的 1/18.4。由此可见，使用 MPI 的并行效果理想，使用混合编程后，程序可适应当前主流的分布式集群服务器架构，在同一个节点上的所有线程可以共享数据，减少内存消耗，降低数据传输时间，这对大规模并行程序的计算效率提高更显著。

2.5 高分辨率重力场模型构建的高性能科学计算模型验证

2.1-2.4 节验证了半解析科学计算方法和 OpenMP/MPI 并行计算的效果，在前面实验的基础上，联合半解析、OpenMP 和 MPI 计算的优势，对半解析计算程序进行了 OpenMP+MPI 混合并行设计，构建了可在超大规模集群计算系统分布运行的 OpenMP+MPI 混合的高分辨率重力场模型解算程序。为了检验这个程序准确性，进行了以下数值实验：

1) 使用 XGM2019e 模型计算了半径为 6378136.3 m 球面上的两组重力异常点值数据，数据的分辨率为 $5' \times 5'$ (阶次截断到 2159) 和 $2' \times 2'$ (阶次截断到 5399)，该重力异常数据记为 GRAV5 和 GRAV2；

2) 由两组重力数据, 使用本文设计的 OpenMP+MPI 并行计算程序解算得到 5399 阶重力场模型系数, 并统计模型计算时间, 计算得到的模型记为 Model-2159 和 Model-5399。模型解算时使用了 80 个 CPU, 这些 CPU 分布在 4 个节点上, 各节点上 CPU 数量相同。计算时共开辟了 4 个进程, 每个进程在一个节点上运行, 每个进程开辟了 20 个线程, 每个线程运行在一个 CPU 上, 同一个节点上的线程可以共享节点内的资源。

图 7 和图 8 分别是 Model-2159 和 Model-5399 的系数误差, 模型的系数误差在所有频段小于 10^{-18} , 这说明该并程序可准确计算高分辨率重力场模型; Model-2159 模型解算的耗时为 0.5 小时, Model-5399 模型解算的耗时为 23 小时, 虽然该计算耗时远大于 360 阶模型的计算时间, 但考虑到模型参数较多, 5399 阶模型中有 29,159,996 个参数, 运行时使用的资源有限, 解算该模型的计算量庞大, 该计算时间合理。

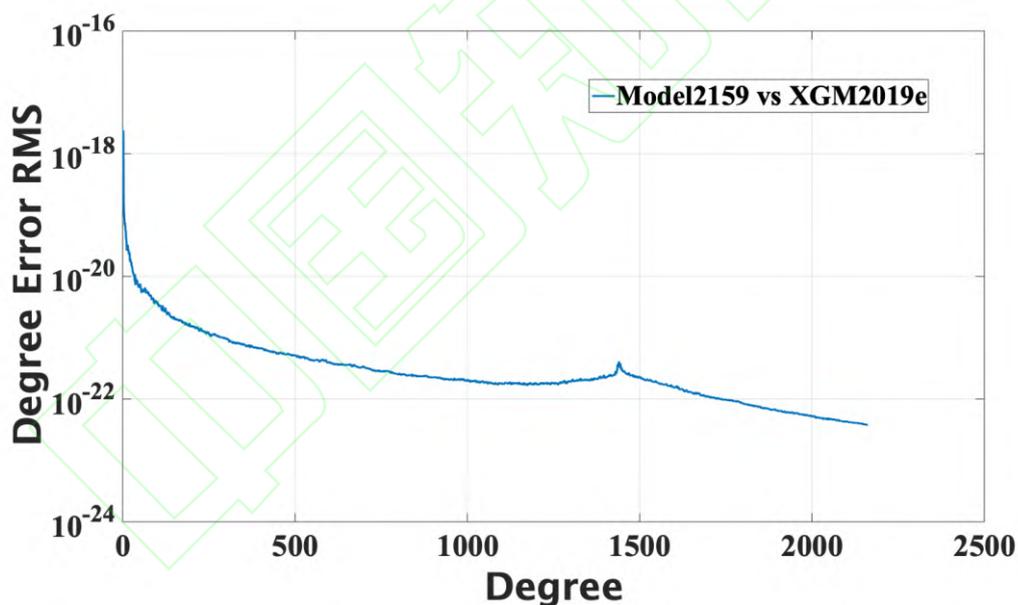


图 7 Model-2159 的系数误差
Fig 7 The degree error RMS of Model-2159

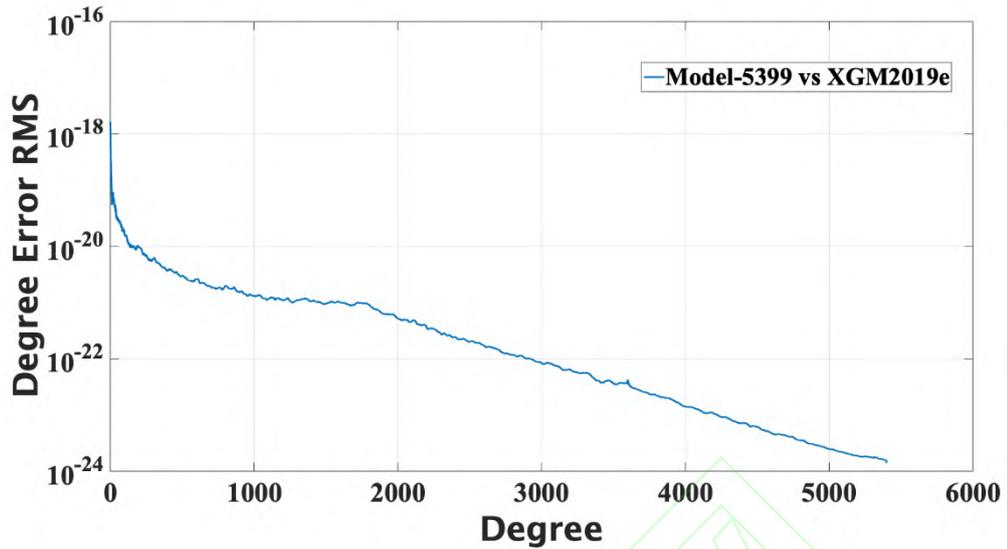


图 8 Model-5399 的系数误差
Fig 8 The degree error RMS of Model-5399

3 结论

本文围绕高分辨率全球重力场模型高性能计算方法展开研究，将半解析方法引入到高分辨率重力场模型构建，同时采用 OpenMP+MPI 并行计算思路，设计了一种高分辨率全球重力场模型构建的高性能科学计算方法，该方法可在大型集群计算系统下分布式运行。数值实验验证了计算方法的计算精度和效率，结果表明：

(1) 半解析方法可以有效减少高分辨率重力场模型构建的计算量和内存消耗；

(2) 本文设计的 OpenMP、MPI 和 OpenMP+MPI 并行算法可有效应用于高分辨率重力场模型构建，构建 360 阶重力场模型时，使用 20 个计算核心，三种并行计算算法可以准确解算重力场模型系数，计算效率均为串行程程序的 18 倍；

(3) 设计了联合半解析方法和 OpenMP+MPI 混合并行计算模型的高分辨率重力场模型解算的高性能科学方法，该方法可以有效在大型集群计算系统下分布式运行，使用本文编写的初步软件平台，利用 4 个节点的 80 个 CPU 可在 1 天内完成 5399 阶次高分辨率重力场模型的解；将程序设计策略、法方程矩阵结构设计、高阶次勒让德函递推方法等优化后，可进一步提高计算效率。

参考文献

[1] Pavlis NK, Holmes SA, Kenyon SC, Factor JK (2012) The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008): THE EGM2008 EARTH GRAVITATIONAL

- MODEL. *J Geophys Res Solid Earth* 117:B04406. <https://doi.org/10.1029/2011JB008916>
- [2] Förste C (2014) EIGEN-6C4: the latest combined global gravity field model including GOCE data up to degree and order 1949 of GFZ Potsdam and GRGS Toulouse. *EGU Gen Assem Conf Abstr* 16:3707.
- [3] Fecher T, Pail R, Gruber T (2017) GOCO05c: A New Combined Gravity Field Model Based on Full Normal Equations and Regionally Varying Weighting. *Surv Geophys* 38:571–590. <https://doi.org/10.1007/s10712-016-9406-y>
- [4] Zingerle P, Pail R, Gruber T et al. (2020) The combined global gravity field model XGM2019e. *J Geod* 94, 66. <https://doi.org/10.1007/s00190-020-01398-0>
- [5] Liang W, Li J, Xu X, et al (2020) A High-Resolution Earth's Gravity Field Model SGG-UGM-2 from GOCE, GRACE, Satellite Altimetry, and EGM2008. *Engineering* 6:860–878. <https://doi.org/10.1016/j.eng.2020.05.008>
- [6] Cooley JW, Tukey JW An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series. *Math of Comput* 19(90): 297-301.
- [7] Colombo OL (1981) Numerical Methods for Harmonic Analysis On the Sphere. Rep 310, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus.
- [8] Sneeuw N (1994) Global spherical harmonic analysis by least-squares and numerical quadrature methods in historical perspective. *Geophys J Int* 118:707–716. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1994.tb03995.x>
- [9] Pavlis NK (1988) Modeling and Estimation of a Low Degree Geopotential Model from Terrestrial Gravity Data. Rep 386 Department of Geodetic Science and Surveying The Ohio State University Columbus
- [10] LI Xinxing, WU Xiaoping, LI Shanshan, et al (2014) The Application of Block Diagonal Least squares Methods in Geopotential Model Determination. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 43(8): 778-785. (李新星, 吴晓平, 李姗姗, 等. 块对角最小二乘方法在确定全球重力场模型中的应用[J]. *测绘学报*, 2014, 43(8): 778-785.)
- [11] Rummel R, M van Gelderen, R Koop, E Schrama, et al (1993) Spherical harmonic analysis of satellite gradiometry. *Neth Geod Comm, Publications on Geodesy*, no. 39, Delft.
- [12] Sneeuw NJ (2000) A Semi-analytical Approach to Gravity Field Analysis from Satellite Observations, PhD thesis, Institut für. Astronomische und Physikalische Geodäsie, Technische Universität München, Munich, Germany.
- [13] Preimesberger T, Pail R (2003) GOCE Quick-Look Gravity Solution: Application of the Semianalytic Approach in the Case of Data Gaps and Non-Repeat Orbits. *Stud R*.
- [14] Xu Xinyu (2008) Study of Determining the Earth's Gravity Field from Satellite Gravity Gradient and Satellite-to-Satellite Tracking Data, Wuhan University. (徐新禹. 卫星重力梯度及卫星跟踪卫星数据确定地球重力场的研究[D]. 武汉: 武汉大学. 2008.)
- [15] LIU Huanling, WEN Hanjiang, XU Xinyu, ZHU Guangbin (2015) Torus Approach in Gravity Field Determination from Simulated GOCE Observations. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 44(9): 965-972. (刘焕玲, 文汉江, 徐新禹, 等. 利用GOCE模拟观测反演重力场的Torus法[J]. *测绘学报*, 2015, 44(9): 965-972.)
- [16] LIU Huanling, WEN Hanjiang, XU Xinyu, ZHAO Yongqi, CAI Jianqing (2020) Torus approach in high degree gravity field model determination from GOCE satellite gradiometry observations. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 49(8): 965-973. (刘焕玲, 文汉江, 徐新禹, 赵永奇, 蔡剑青. GOCE实测数据反演高阶重力场模型的Torus方法[J]. *测绘学报*, 2020,

49(8): 965-973.)

- [17] Chapman B, Jost G, Pas R (2007) Using OpenMP: Portable Shared Memory Parallel Programming (Scientific and Engineering Computation)
- [18] Gropp W, Lusk E, Skjellum A (1999) Using MPI - Portable Parallel Programming with the Message-Passing Interface. Scientific and Engineering Computation Series. MIT Press Massachusetts.
- [19] Gropp W, Lusk E, Thakur R (1999) Using MPI-2 Advanced features of the Message-Passing Interface. Scientific and Engineering Computation Series. MIT Press Massachusetts.
- [20] ZOU Xiancai, LI Jiancheng, WANG Haihong, XU Xinyu (2010) T Application of Parallel Computing with OpenMP in Data Processing for Satellite Gravity, 39(6): 636-641. (邹贤才, 李建成, 汪海洪, 徐新禹. OpenMP并行计算在卫星重力数据处理中的应用[M]. 测绘学报, 2010, 39(6): 636-641.)
- [21] ZHOU Hao, ZHONG Bo, LUO Zhicai, ZHANG Kun (2011). Application of Parallel Algorithms Based on OpenMP to Satellite Gravity Field Recovery, 31(5):123-127. (周浩, 钟波, 罗志才, 张坤. OpenMP并行算法在卫星重力场模型反演中的应用[J]. 大地测量与地球动力学, 2011, 31(5):123-127.)
- [22] ZHOU Hao, LUO Zhicai, ZHONG Bo, LU Biao (2015) MPI Parallel Algorithm in Satellite Gravity Field Model Inversion on the Basis of Least Square Method. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 44(8): 833-839. (周浩, 罗志才, 钟波, 陆飏. 利用最小二乘直接法反演卫星重力场模型的MPI并行算法[J]. 测绘学报, 2015, 44(8):833-839.)
- [23] Mayer-Gürr T, Behzadpour S, Eicker A, et al (2020) GROOPS: A software toolkit for gravity field recovery and GNSS processing. Geodesy
- [24] Liang W, Xu X, Li J, Zhu G (2018) The determination of an ultra-high gravity field model SGG-UGM-1 by combining EGM2008 gravity anomaly and GOCE observation data. Acta Geod Cartographica Sin;47(4):425-34. (梁伟, 徐新禹, 李建成, 朱广彬. 联合EGM2008模型重力异常和GOCE观测数据构建超高阶地球重力场模型SGG-UGM-1[J]. 测绘学报, 2018, 47(4): 425-434.)
- [25] Wang H, Guan X, Wu H (2017) A Collaborative Parallel Spatial Interpolation Algorithm on Oriented Towards the Heterogeneous CPU/GPU System. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2017, 42(12): 1688-1695. (王鸿琰, 关雪峰, 吴华意. 一种面向CPU/GPU异构环境的协同并行空间插值算法. 武汉大学学报 (信息科学版), 2017, 42(12): 1688-1695.)
- [26] Chen Z, Lyu Z, Cui Y, Wang Y. Implementation of Distributed Computing with Large-Scale GLASS Data. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2015, 40(3): 384-389. (陈正生, 吕志平, 崔阳, 王宇谱. 大规模GNSS数据的分布式处理与实现. 武汉大学学报 (信息科学版), 2015, 40(3): 384-389.)
- [27] Brockmann JM, Roese-Koerner L, Schuh W-D (2014) A concept for the estimation of high-degree gravity field models in a high performance computing environment. Stud Geophys Geod 58:571-594. <https://doi.org/10.1007/s11200-013-1246-3>
- [28] Blackford LS, Choi J, Cleary A, et al (1997) ScaLAPCK Users Guide. SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia 2nd edition.
- [29] Choi J, Dongarra JJ, Pozo R, et al (1992) Walker. ScaLAPACK: A scalable linear algebra for distributed memory concurrent computers. Technical Report 55, LAPACK Working Note, November 1992.
- [30] Hofmann-Wellenhof B, Moritz H (2006) Physical geodesy (Second, corrected edition). Phys

网络首发:

标题: 一种高分辨率全球重力场模型构建的高性能科学计算方法

作者: 梁伟, 徐新禹, 李建成, 李朋远, 黄剑, 朱天林, 王东亚, 苑刚

收稿日期: 2025-01-08

DOI:10.13203/j.whugis20240321

引用格式:

梁伟, 徐新禹, 李建成, 等. 一种高分辨率全球重力场模型构建的高性能科学计算方法 [J]. 武汉大学学报 (信息科学版), 2025, DOI:10.13203/J.whugis20240321 (LIANG Wei, XU Xinyu, LI Jiancheng, et al. A New High Performance Scientific Computation Method for High Resolution Earth's Gravity Field Model[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2025, DOI:10.13203/J.whugis20240321)

网络首发文章内容和格式与正式出版会有细微差别, 请以正式出版文件为准!

您感兴趣的其他相关论文:

基于重力场深层感知模型的重力匹配导航适配区选取算法

毛国丞, 武凇, 席梦寒, 刘石, 熊常亮, 鲍李峰, 王勇

武汉大学学报(信息科学版), 2024, 49(11): 2122-2135.

<http://ch.whu.edu.cn/article/doi/10.13203/j.whugis20240223>

GOCE卫星重力梯度数据反演重力场的滤波器设计与比较分析

刘滔, 钟波, 李贤炮, 谭江涛

武汉大学学报(信息科学版), 2023, 48(5): 694-701.

<http://ch.whu.edu.cn/article/doi/10.13203/j.whugis20200705>

利用卫星重力测量确定地球重力场模型的进展

罗志才, 钟波, 周浩, 吴云龙

武汉大学学报(信息科学版), 2022, 47(10): 1713-1727.

<http://ch.whu.edu.cn/article/doi/10.13203/j.whugis20220537>