



武汉大学学报(信息科学版)

*Geomatics and Information Science of Wuhan University*

ISSN 1671-8860, CN 42-1676/TN

## 《武汉大学学报(信息科学版)》网络首发论文

题目： 超低轨卫星星座恢复短周期时变重力场的模拟分析  
作者： 刘有建, 李建成, 徐新禹, 魏辉, 赵永奇  
DOI: 10.13203/j.whugis20240047  
收稿日期: 2024-04-10  
网络首发日期: 2024-05-15  
引用格式: 刘有建, 李建成, 徐新禹, 魏辉, 赵永奇. 超低轨卫星星座恢复短周期时变重力场的模拟分析[J/OL]. 武汉大学学报(信息科学版).  
<https://doi.org/10.13203/j.whugis20240047>



**网络首发:** 在编辑部工作流程中, 稿件从录用到出版要经历录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿等阶段。录用定稿指内容已经确定, 且通过同行评议、主编终审同意刊用的稿件。排版定稿指录用定稿按照期刊特定版式(包括网络呈现版式)排版后的稿件, 可暂不确定出版年、卷、期和页码。整期汇编定稿指出版年、卷、期、页码均已确定的印刷或数字出版的整期汇编稿件。录用定稿网络首发稿件内容必须符合《出版管理条例》和《期刊出版管理规定》的有关规定; 学术研究成果具有创新性、科学性和先进性, 符合编辑部对刊文的录用要求, 不存在学术不端行为及其他侵权行为; 稿件内容应基本符合国家有关书刊编辑、出版的技术标准, 正确使用和统一规范语言文字、符号、数字、外文字母、法定计量单位及地图标注等。为确保录用定稿网络首发的严肃性, 录用定稿一经发布, 不得修改论文题目、作者、机构名称和学术内容, 只可基于编辑规范进行少量文字的修改。

**出版确认:** 纸质期刊编辑部通过与《中国学术期刊(光盘版)》电子杂志社有限公司签约, 在《中国学术期刊(网络版)》出版传播平台上创办与纸质期刊内容一致的网络版, 以单篇或整期出版形式, 在印刷出版之前刊发论文的录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿。因为《中国学术期刊(网络版)》是国家新闻出版广电总局批准的网络连续型出版物(ISSN 2096-4188, CN 11-6037/Z), 所以签约期刊的网络版上网络首发论文视为正式出版。

DOI: 10.13203/j.whugis20240047

### 引用格式:

刘有建, 李建成, 徐新禹, 等. 超低轨卫星星座恢复短周期时变重力场的模拟分析[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2024, DOI: 10.13203/j.whugis20240047 (LIU Youjian, LI Jiancheng, XU Xinyu, et al. Simulation analysis of short-period time-varying gravity field in recovery of very-low orbit satellite constellation[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2024, DOI: 10.13203/j.whugis20240047)

## 超低轨卫星星座恢复短周期时变重力场的模拟分析

刘有建<sup>1</sup> 李建成<sup>1,2</sup> 徐新禹<sup>1,2</sup> 魏 辉<sup>1,2</sup> 赵永奇<sup>1,2</sup>

1 武汉大学测绘学院, 湖北珞珈实验室, 湖北 武汉, 430079

2 武汉大学地球空间环境与大地测量教育部重点实验室, 湖北 武汉, 430079

**摘要:** 相比下一代重力卫星任务的 Bender 星座, 以通导遥为主要目标的超低轨卫星 (Very Low Earth Orbit, VLEO) 星座能够在短时间内进行大规模地面覆盖, 增加了时变重力场的时空采样, 有望降低混频效应, 提升重力场时变信号的探测能力。本文研究模拟了 Bender 星座和 250 km 高度处由 300 颗卫星组成的 VLEO 星座的观测数据, 开展了时变重力场信号恢复性能的闭环仿真模拟实验, 结果表明: 在不考虑观测量噪声时, 相比 Bender 星座, VLEO 星座可有效降低混频效应对时变重力场建模的影响; 对于 7 日时变重力场解, 在 VLEO 星座卫星轨道精度为 1 cm、Bender 星座星间测速精度 10 nm/s, 并考虑混频误差的情况时, VLEO 星座可恢复 15 阶以内的有效信号 (信噪比达到 1), 并且在 8 阶以内略优于 Bender 星座; 当 VLEO 卫星定轨精度在 1~10 cm 的情况下, 在 Bender 星座的基础上引入 VLEO 星座联合解算, 可有效降低解算结果的混频效应和南北条带误差, 提升短周期时变重力场的恢复性能。

**关键词:** VLEO 星座; Bender 星座; 时变重力场; 时空采样; 混频误差

## Simulation analysis of short-period time-varying gravity field in recovery of very-low orbit satellite constellation

LIU Youjian<sup>1</sup> LI Jiancheng<sup>1,2</sup> XU Xinyu<sup>1,2</sup> WEI Hui<sup>1,2</sup> ZHAO Yongqi<sup>1,2</sup>

1 School of Geodesy and Geomatics, Hubei Luojia Laboratory, Wuhan University, Wuhan 430079, China

2 Key Laboratory of Geospace Environment and Geodesy, Ministry of Education, Wuhan University, Wuhan 430079, China

**Abstract: Objectives:** In comparison to the Bender constellation in the next generation of gravity missions, the Very Low Earth Orbit (VLEO) constellation with the main objective of conducting communication, navigation, and remote sensing has the capability to achieve extensive ground coverage in a short time, increase

收稿日期: 2024-04-10

基金项目: 国家自然科学基金(42192533, 42388102, 42074019); 中央高校基本科研业务费专项资金(2042022dx0001)。

第一作者: 刘有建, 硕士生, 主要研究方向为时变重力场建模及应用。E-mail: 2017301140017@whu.edu.cn

通信作者: 徐新禹, 博士生导师, 教授。E-mail: xyxv@sgg.whu.edu.cn

the spatio-temporal sampling of time-varying gravity field, and is expected to reduce the aliasing effect and improve the detection capability of time-varying signals in gravity field. **Methods:** We simulated observation data obtained from a VLEO constellation, comprising 300 satellites orbiting at an altitude of 250 km, along with the Bender constellation. Through closed-loop simulation experiments using the short-arc integral method, we compared and analyzed the performance of short-period (7-day) time-varying gravity field recovery of different constellations under varying error conditions. We also studied the impact of varying noise levels, orbit configuration, and aliasing effects on the results. **Results:** When not accounting for observed noise, the VLEO constellation, as compared to the Bender constellation, is able to effectively mitigate the impact of aliasing effects on the modeling of the time-varying gravity field. For the 7-day time-varying gravity field solution, if the orbital accuracy of the VLEO constellation is 1 cm, and the inter-satellite velocity measurement accuracy of the Bender constellation is 10 nm/s, taking into account the aliasing error, the VLEO constellation has the capability to effectively recover signals up to degree 15, and slightly outperforms the Bender constellation up to degree 8. With the orbit determination accuracy of VLEO satellites ranging from 1 to 10 cm, the addition of the VLEO constellation to the Bender constellation can effectively minimize the aliasing effect and the north-south striping characteristics in the solution results, thereby improving the recovery performance of the short-period time-varying gravity field. **Conclusions:** The comparative test results show that VLEO constellation can reduce aliasing effect by increasing spatiotemporal sampling, and its introduction can make Bender constellation recover better time-varying gravity field results.

**Key words:** VLEO constellation; Bender constellation; time-varying gravity field; spatiotemporal sampling; aliasing error

时变重力场模型在理解和分析地球动力学过程，特别是在研究陆地水储量变化、冰川质量变化、震后形变等方面具有重要意义<sup>[1-5]</sup>。自本世纪初，高低卫星跟踪（high-low satellite-to-satellite tracking, HL-SST）、低低卫星跟踪（low-low satellite-to-satellite tracking, LL-SST）以及重力梯度测量（satellite gravity gradiometry, SGG）等技术的应用使人们对重力场的认识提升到了新的高度，尤其是重力恢复与气候实验（The Gravity Recovery and Climate Experiment, GRACE）及其继任卫星任务（GRACE Follow On, GRACE-FO）通过高精度的星间观测数据，提供了月时变重力场等模型产品<sup>[6-7]</sup>。然而，由于 GRACE/GRACE-FO 卫星无法在短时间内重访地球同一区域，对时变信号欠采样会产生混频效应，影响时变重力场的解算精度<sup>[8]</sup>；另外，重力场解算过程中引入的海潮等模型误差也会以混频误差的形式进入到时变重力场模型中<sup>[9]</sup>。因此在未来采用更高精度观测仪器和技术的条件下，混频问题将成为限制重力卫星恢复时变重力场的主要影响因素<sup>[10]</sup>。除此之外，LL-SST 测量模式的各向异性导致的南北条带误差也限制了时变重力场的精确表达<sup>[11]</sup>。

针对 GRACE 类型重力卫星存在的上述问题，国内外众多学者从不同角度展开了大量研究。Wiese 等<sup>[12]</sup>提出通过对低阶重力场进行每日参数估计来降低大气、海洋模型误差带来的混频效应。Hauk 等<sup>[13]</sup>通过对海洋潮汐进行共同参数估计，有效降低了海潮模型的混频误差。赵倩等<sup>[14]</sup>通过对卫星编队的仿真模拟发现车轮编队、钟摆编队可以减弱 GRACE 卫星的各向异性灵敏度，但无法消除海潮模型的混频影响。Bender 等<sup>[15]</sup>提出在一对极轨卫星的基础上增加一对倾斜轨道卫星，显著改善了 GRACE 测量模式带来的南北条带误差同时提高了采样率，这种星座在下一代重力卫星任务（Next Generation Gravity Mission, NGGM）的研究中被广泛讨论和使用<sup>[11,16-17]</sup>。然而，Bender 星座在短时间内对时变重力场信号

的采样仍然十分有限，仅能在一定程度上抑制混频效应<sup>[11]</sup>。

近年来，随着卫星成本降低，各国争相开展超低轨卫星（Very Low Earth Orbit, VLEO）星座设计与在轨试验，例如美国 SpaceX 公司的 Starlink 星座包含数千颗超低轨卫星<sup>[18]</sup>，欧空局（European Space Agency, ESA）的 GOCE 卫星以及日本宇航研究开发机构（Japan Aerospace Exploration Agency, JAXA）的 SLATS 卫星<sup>[19]</sup>。我国于 2023 年宣布建设超低轨通遥一体星座“楚天”，包含 300 颗卫星，轨道高度在 300 km 以下<sup>[20]</sup>。超低轨卫星星座拥有轨道高度低、短时间覆盖区域广的优势，理论上可以通过增加时空采样来降低混频效应，如果能实现卫星的精密定轨，可为解决目前重力卫星面临的时空采样不足的问题提供新思路。由于“楚天”星座仍在设计阶段，没有公开发布的星座构型参数，本文考虑采用无阻尼控制系统实现卫星长期在轨、非保守力可以使用加速度计测得、并且卫星轨道覆盖全球的理想情况，模拟了轨道高度 250 km、卫星总数 300 颗的 VLEO 星座的轨道数据，同时模拟了 Bender 星座的轨道、星间观测数据，采用短弧积分法恢复了 7 日内重力场的非潮汐时变信号 AOHIS（包括大气（A）、海洋（O）、水文（H）、冰川（I）、固体地球（S）），分析两种星座在单独和联合的情况下恢复时变重力场和解决混频问题方面的性能。

## 1 超低轨卫星星座恢复时变重力场的基本原理

本文根据 Mayer-Gürr<sup>[21]</sup>提出的短弧积分法恢复时变重力场，并使用 GOSG02S 模型<sup>[22]</sup>进行梯度改正，得到基于卫星位置的 HL-SST 短弧积分法的观测方程：

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}} \delta \mathbf{p} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{b}} \delta \mathbf{b} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{b}} = \frac{\partial \delta \mathbf{r}}{\partial \mathbf{b}} = (\mathbf{I} - \mathbf{KF})^{-1} \mathbf{B}_b \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial \delta \mathbf{r}}{\partial \mathbf{f}} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}} = (\mathbf{I} - \mathbf{KF})^{-1} \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}} \end{cases} \quad (1)$$

其中， $\mathbf{r}$  表示卫星位置， $\mathbf{r}_0$  表示卫星轨道观测值经过梯度改正得到的参考轨道， $\delta \mathbf{p}$  为位系数改正向量， $\delta \mathbf{b}$  为轨道边界改正向量， $\mathbf{K}$  为力模型的积分系数矩阵， $\mathbf{F}$  为力模型梯度矩阵， $\mathbf{B}_b$  为轨道边界设计矩阵， $\tau$  为归一化的时间变量， $T$  为弧段长度， $t_A$  为弧段开始时间，可以表示为：

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \nabla f(\tau_0) & & & 0 \\ & \nabla f(\tau_1) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \nabla f(\tau_{N-1}) \end{bmatrix}, \mathbf{B}_b = \begin{bmatrix} 1-\tau_0 & \tau_0 \\ 1-\tau_1 & \tau_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1-\tau_{N-1} & \tau_{N-1} \end{bmatrix}, \tau = \frac{t-t_A}{T} \quad (2)$$

将卫星相对速度在视线方向进行投影，可得到基于星间距离变率的 LL-SST 短弧积分法的观测方程。

对于 VLEO 星座  $n$  颗卫星的观测数据，构建 HL-SST 短弧积分法的观测方程，得到观测量与位系数改正量、轨道边界改正量的线性关系，如式(3)所示。

$$\begin{cases} l_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \mathbf{y}_1 + \varepsilon_1 \\ l_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{x} + \mathbf{B}_2 \mathbf{y}_2 + \varepsilon_2 \\ \vdots \\ l_n = \mathbf{A}_n \mathbf{x} + \mathbf{B}_n \mathbf{y}_n + \varepsilon_n \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_n \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \quad (3)$$

其中,  $l$ 、 $A$ 、 $B$ 、 $\varepsilon$  分别表示观测量、全局变量设计矩阵、局部变量设计矩阵、观测误差。 $\mathbf{x}$  为待恢复的重力场时变信号, 属于全局变量;  $\mathbf{y}$  为边界轨道改正量, 属于局部变量。对于 Bender 星座, 公式(3)中  $n=6$ , 包括每颗卫星的卫星位置以及两对卫星星间距离变率构建的观测方程。通过最小二乘构建法方程, 并消去局部变量后, 累加得到关于位系数的最终法方程, 其中  $N_s$  与  $w_s$  表示第  $s$  颗卫星的观测方程构建的法方程。

$$\begin{cases} N\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{w} \\ N = \sum_{s=1}^n N_s \\ \mathbf{w} = \sum_{s=1}^n \mathbf{w}_s \end{cases} \quad (4)$$

## 2 数值模拟方案

### 2.1 星座设计

本文考虑一种全球分布较均匀的 VLEO 星座进行模拟实验, 为避免倾斜轨道卫星可能产生的极空白效应, 卫星均设置为极轨卫星。模拟的 VLEO 星座包含 300 颗卫星, 分布在 20 个轨道面上, 每个轨道面 15 颗卫星, 轨道倾角均为  $89^\circ$ , 使其空间分布较为均匀, 并且能够覆盖全球; 轨道高度为 250 km, 偏心率设置为 0.00015, 接近圆形。假定同一轨道面上卫星沿轨道均匀分布, 则相邻两颗卫星平近点角相差  $24^\circ$ , 假设不同轨道的升交点在赤道上均匀分布, 则相邻轨道面上卫星的升交点赤经相差  $18^\circ$ , 以此推算出第  $i$  个轨道面上第  $j$  颗卫星的轨道参数, 如表 1 所示, 图 1 给出了模拟的 VLEO 卫星初始位置以及 90 min 内的星下点轨迹的空间分布, 分别用圆圈 (蓝色) 和曲线 (红色) 表示, 可以看出 VLEO 星座能够在较短时间内均匀覆盖全球。

表 1 模拟的 VLEO 星座第  $i$  个轨道第  $j$  颗卫星的轨道参数

Tab. 1 The Simulated Orbital Parameters of the Satellite  $j$  in Orbit  $i$  of the VLEO Constellation

类型	半长轴/m	偏心率	倾角/ $^\circ$	升交点赤经/ $^\circ$	近地点幅角/ $^\circ$	平近点角/ $^\circ$
VLEO	6628137	0.00015	89	$18 \times (i-1)$	0	$24 \times (j-1)$

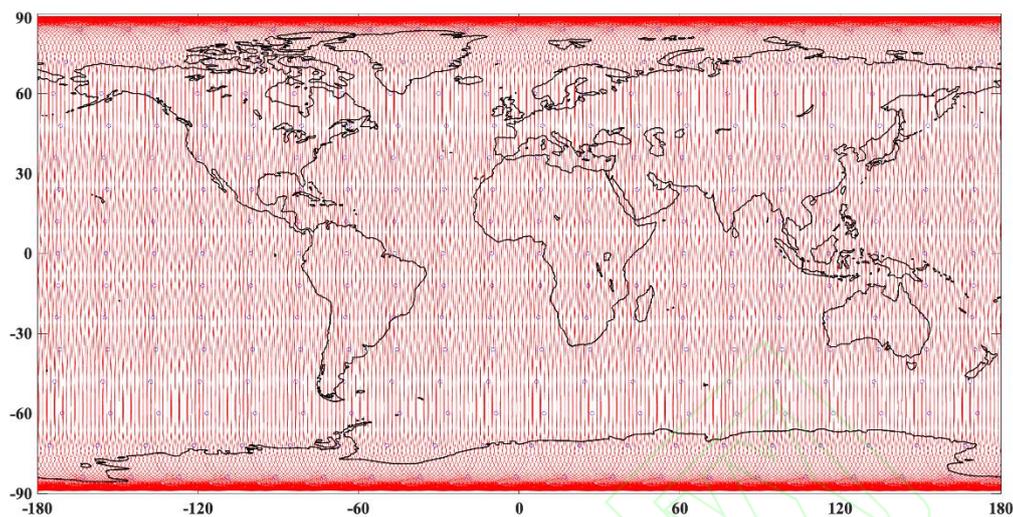


图 1 VLEO 星座卫星在 90 min 内的星下点轨迹

Fig. 1 The Trajectory of the VLEO Satellites in 90 Minutes Simulated in this Study

对于 Bender 卫星星座，为了与现有的研究结果进行对比，本文采用了 Pail 等<sup>[17]</sup>使用的“Simulation Scenario B”的轨道构型，轨道重复周期约为 7 天，具体参数由下一代重力任务概念的附加星座和科学分析（Additional Constellation & Scientific Analysis of the Next Generation Gravity Mission Concept, ADDCON）项目提供<sup>[16]</sup>。图 2 给出了 Bender 卫星 7 日内星下点轨迹。对比图 1、图 2 可见，Bender 卫星只有在较长的时段内才能对地球表面进行较高密度的覆盖。

表 2 Bender 星座初始轨道参数

Tab. 2 Initial Orbital Parameters of the Bender Constellation

编号	半长轴/m	偏心率	轨道倾角/(°)	升交点赤经/(°)	近地点幅角/(°)	平近点角/(°)
A1	6719885.691	0.00145336496	88.997230948	0.002403655	18.656491465	339.764410525
A2	6719898.152	0.00146252342	88.997231861	0.002423469	19.433422090	339.842418456
B1	6729542.958	0.00086788461	70.024367530	89.989031286	0.741861441	357.683456066
B2	6729554.624	0.00087064926	70.024378260	89.989456787	2.178846595	357.100050933

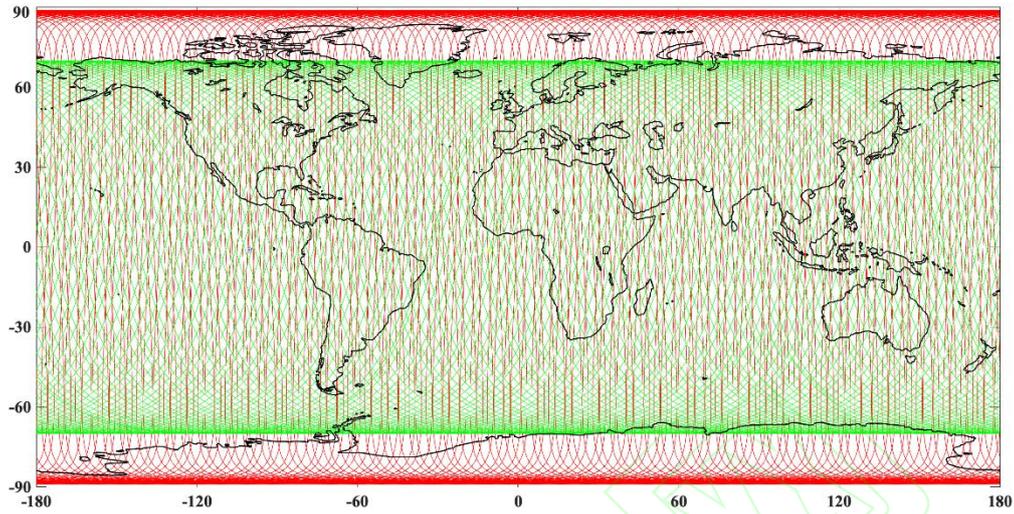


图2 模拟的 Bender 卫星在 7 日内的星下点轨迹（红色：A1、A2，绿色：B1、B2）

Fig. 2 The Trajectory of the Simulated Bender Satellites in 7 days Simulated in this Study (red: A1, A2, green: B1, B2)

## 2.2 数值仿真

本文旨在探究不同星座恢复重力场非潮汐时变信号（AOHIS）的性能，模拟时间从 2002 年 1 月 1 日 0 时至 2002 年 1 月 7 日 24 时，数据采样间隔为 5 s，模拟流程如图 3 所示。首先根据卫星的轨道参数，使用真实模型（包括静态场、海潮模型、时变信号）通过轨道积分来模拟卫星的无误差观测数据，然后添加传感器噪声，得到包含噪声的实际观测数据，在构建观测方程时引入一个参考模型（包括静态场、海潮模型），扣除参考模型的影响，最终恢复得到时变信号的 7 日解。模型反演的最高阶次（ $d/o$ ）为 70，积分短弧长度为 2 h，与文献[17]中保持一致。对时变信号的反演误差定义为恢复结果与真实模型的 AOHIS 信号引起的重力场变化在 7 日内平均值之间的差异。在考虑观测误差、混频误差的情况下，时变信号的恢复结果将与真实模型中 AOHIS 信号的均值产生偏离，以此来评估不同星座对时变重力场的恢复能力。本文采用 Mayer-Gürr 等<sup>[23]</sup>开发的 GROOPS 软件开展数值模拟研究，利用其轨道模拟、噪声模拟、构建法方程、法方程求解等程序完成数据模拟解算工作，求解方法选择的是短弧积分法。

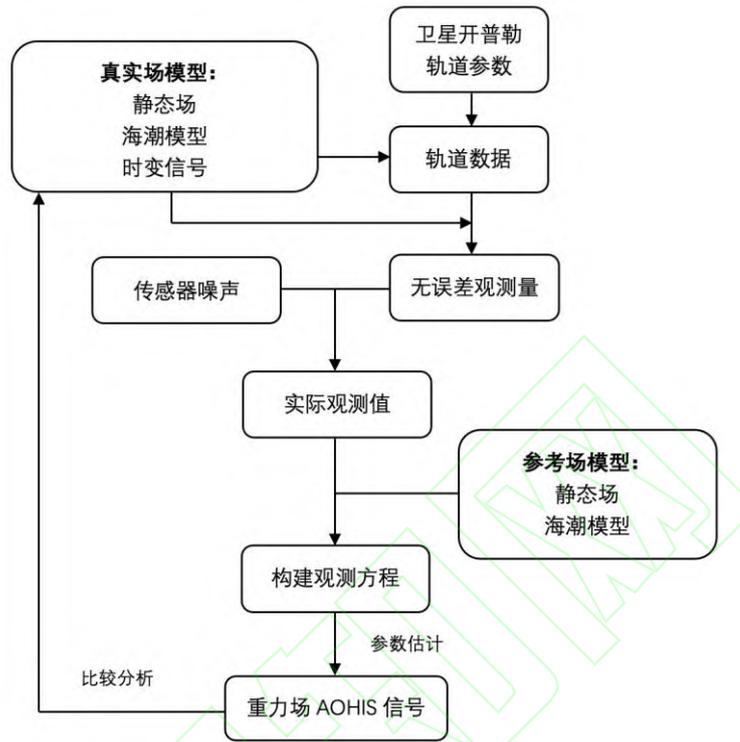


图3 数值仿真模拟流程

Fig. 3 Numerical Simulation Process

### 2.3 模拟方案

考虑到混频效应主要来自对 AOHIS 信号欠采样和海潮模型误差，为探究 VLEO 星座能否通过增加采样降低混频效应，需要将不同误差源单独分析。不考虑观测值噪声的模拟方案如表 3 所示。方案 1 为不考虑所有误差源的情况，真实模型中使用 ESA 发布的地球系统模型 (Earth System Model, ESM) AOHIS<sup>[24]</sup> 在 7 日内的均值，以忽略对 AOHIS 信号高频变化欠采样带来的混频效应，海潮模型均采用 EOT11a 模型<sup>[25]</sup>。方案 2 为仅考虑对 AOHIS 信号时间采样不足导致的混频效应的情况，真实模型中将 6h 时间分辨率的时变模型 ESMAOHIS 线性插值到每一历元。方案 3 为仅考虑海潮模型误差带来的混频效应的情况，参考模型选用了 GOT4.7 模型<sup>[26]</sup>。

表 3 在无噪声条件下的模拟方案

Tab. 3 Simulation Schemes without Noise

方案	模型组分	真实模型	参考模型
方案 1	静态场	GOSG02S (120 d/o)	GOSG02S (120 d/o)
	海洋潮汐	EOT11a (120 d/o)	EOT11a (120 d/o)
	时变场	ESMAOHIS (7 日均值, 120 d/o)	—
方案 2	静态场	GOSG02S (120 d/o)	GOSG02S (120 d/o)
	海洋潮汐	EOT11a (120 d/o)	EOT11a (120 d/o)
	非潮汐时变信号	ESMAOHIS (120 d/o)	—

	静态场	GOSG02S (120 d/o)	GOSG02S (120 d/o)
方案 3	海洋潮汐	EOT11a (120 d/o)	GOT4.7 (120 d/o)
	非潮汐时变信号	ESMAOHIS (7 日均值, 120 d/o)	---

考虑观测值噪声的模拟方案如表 4 所示。方案 4 仅考虑了观测值噪声的影响，方案 5 考虑了观测值噪声以及混频效应的影响。对于 Bender 卫星的噪声模拟，对其轨道位置添加 1 cm 的高斯白噪声，并沿用了用于监测地球重力场变化的卫星星座评估项目（Assessment of Satellite Constellations for Monitoring the Variations in Earth Gravity Field, SC4MGV）给出的噪声模型模拟星间距离变率和加速度计的有色噪声<sup>[27]</sup>；公式(5)为星间距离变率观测值的噪声模型，公式(6)是加速度计沿轨和径向方向（敏感轴）噪声模型，公式(7)是加速度计交叉轨道方向（非敏感轴）噪声模型，噪声功率谱密度（Power Spectral Density, PSD）如图 4 所示。使用 GROOPS 软件的噪声模拟程序，根据公式(5)、(6)、(7)模拟得到有色噪声，添加到对应的无误差观测值中，得到包含有色噪声的观测数据。对于 VLEO 卫星，轨道位置误差是影响其时变重力场恢复的主要因素，考虑到其实际的定轨精度可能难以达到 1 cm，这里对轨道位置分别添加 1 cm、5 cm、10 cm 的高斯白噪声来探究不同噪声水平对解算结果的影响，加速度计有色噪声同样根据公式(6)和(7)来模拟。

由于卫星的观测值中包含有色噪声，加上低低跟踪模式轨道耦合、混频问题的存在，导致观测值之间具有相关性，在解算重力场的过程中基于观测量后验残差构建协方差矩阵对观测值进行去相关处理<sup>[28]</sup>。本文使用 GROOPS 软件中协方差矩阵功能进行去相关，具体流程如下：首先，对不同历元的原始观测数据等权构建法方程求解，得到初始计算结果；随后将参数计算结果代入到设计矩阵中，与原始观测量作差得到观测量残差，估计残差的 PSD；将残差 PSD 通过余弦变换转化为协方差矩阵，用于对原始观测数据去相关，构建得到新的法方程<sup>[23]</sup>。经过多次迭代后的协方差矩阵最终用于观测量的去相关。

表 4 考虑观测值噪声时的模拟方案

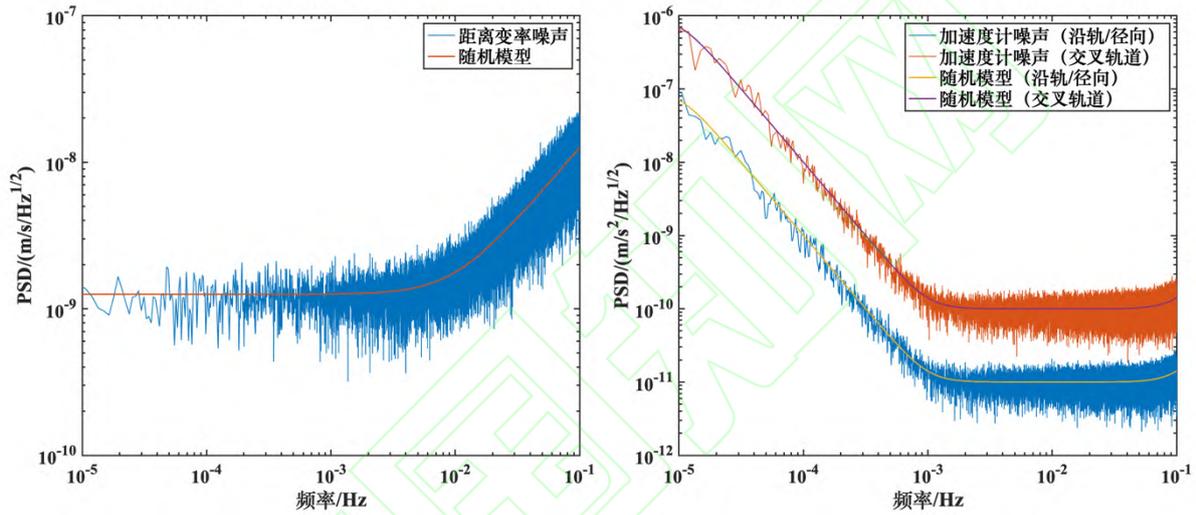
Tab. 4 Simulation Schemes Considering the Observed Noise

方案	模型组分	真实模型	参考模型
	静态场	GOSG02S (120 d/o)	GOSG02S (120 d/o)
	海洋潮汐	EOT11a (120 d/o)	EOT11a (120 d/o)
方案 4	非潮汐时变信号	ESMAOHIS (7 日均值, 120 d/o)	---
	观测值噪声	轨道位置白噪声 (1 cm/5 cm/10 cm), 加速度计噪声, 星间距离变率噪声	---
	静态场	GOSG02S (120 d/o)	GOSG02S (120 d/o)
	海洋潮汐	EOT11a (120 d/o)	GOT4.7 (120 d/o)
方案 5	非潮汐时变信号	ESMAOHIS (120 d/o)	---
	观测值噪声	轨道位置白噪声 (1 cm/5 cm/10 cm), 加速度计噪声, 星间距离变率噪声	---

$$d_{range-rates} = 2 \times 10^{-8} \times 2\pi f \times \sqrt{\left(\frac{10^{-2} \text{ Hz}}{f}\right)^2 + 1} \frac{\text{m}}{\text{s}\sqrt{\text{Hz}}} \quad (5)$$

$$d_{acc.along} = d_{acc.radial} = 10^{-11} \sqrt{\left(\frac{10^{-3} \text{ Hz}}{f}\right)^4 / \left(\left(\frac{10^{-5} \text{ Hz}}{f}\right)^4 + 1\right) + 1 + \left(\frac{f}{10^{-1} \text{ Hz}}\right)^4} \frac{\text{m}}{\text{s}^2\sqrt{\text{Hz}}} \quad (6)$$

$$d_{acc.across} = 10 \times d_{acc.along} \quad (7)$$



(a) 星间距离变率有色噪声 PSD

(b) 加速度计有色噪声 PSD

图 4 星间距离变率(a)和加速度计(b)有色噪声的功率谱密度

Fig. 4 The PSD of Inter-satellite Range Rate Measurement Errors (a), and Accelerometer Errors (b).

### 3 时变重力场恢复结果分析

文中使用(8)式计算等效水高 (Equivalent Water Height, EWH) 的阶误差对时变重力场的恢复结果进行精度评估, 上标 “*est*” 表示重力场时变信号的解算结果, “*ref*” 表示 ESA 发布的 ESM AOHIS 模型在恢复周期内的平均值。

$$\sigma_n(EWH) = \frac{a\rho_e}{3\rho_w} \frac{2n+1}{1+k_n} \sqrt{\sum_{m=0}^n \left[ \left( \bar{C}_{nm}^{est} - \bar{C}_{nm}^{ref} \right)^2 + \left( \bar{S}_{nm}^{est} - \bar{S}_{nm}^{ref} \right)^2 \right]} \quad (8)$$

图 5 给出了在不考虑观测值噪声的情况下, 不同星座构型恢复结果的 EWH 阶误差。在方案 1 中不考虑混频误差时, 低阶部分解算结果较好, 证明了实验中方法的可靠性, 在高阶部分由于模型截断误差的影响, 背景场中高于 70 阶的 AOHIS 信号映射到 70 阶以内, 引起误差偏大。在方案 2 和方案 3 中分别考虑 AOHIS 信号因时间采样不足以及海潮模型误差导致的混频效应时, VLEO 星座的恢复结果以及两星座联合的结果在全阶次优于 Bender 星座, 证明在不考虑观测误差的情况下, 采用超低轨星网

的观测方式能够通过增加时空采样有效降低混频效应。

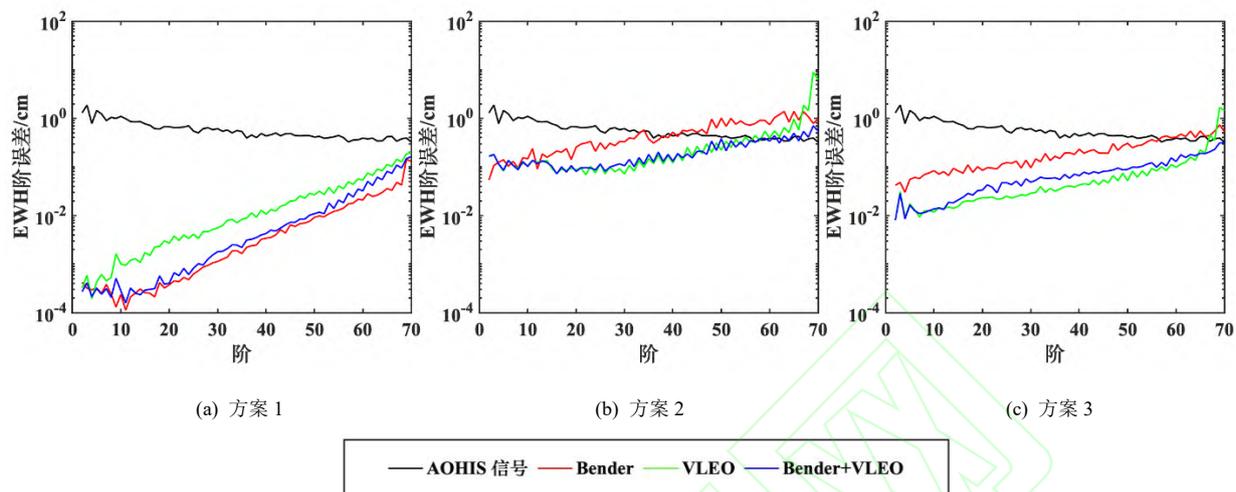


图 5 方案 1 到 3 不同星座解算结果的 EWH 阶误差

Fig. 5 The EWH Degree Error of Different Constellation Solutions in Schemes 1 to 3

图 6 给出了考虑观测值噪声的情况下，不同星座构型恢复结果的 EWH 阶误差。在方案 4 仅考虑观测值噪声带来的误差时，VLEO 星座的恢复结果误差与噪声水平成正比关系，远大于 Bender 星座的结果，仅在 4 阶以内量级较为接近；在 Bender 卫星和 VLEO 星座的联合解中后者的贡献非常有限，仅在轨道噪声为 1 cm 的情况下在小于 7 阶的频段有贡献。在方案 5 考虑观测值噪声以及混频效应的情况下，轨道噪声 1 cm 的 VLEO 星座对时变重力场的恢复结果在 8 阶以内略优于 Bender 星座；对于 VLEO 轨道噪声分别为 1 cm、5 cm、10 cm 的情况，解算的 7 日解的有效阶次（信噪比为 1）大约为 15、9、7；Bender 星座在与 VLEO 星座联合后，解的精度得到明显提高，即使 VLEO 星座轨道噪声在 10 cm 也有很好的提升效果，这是由于 VLEO 星座的加入增加了时空采样，在一定程度上降低了混频效应带来的影响。

对比以上各方案的结果可以发现，VLEO 星座和 Bender 星座恢复重力场时变信号的主要限制因素分别是观测精度和混频误差。VLEO 星座采用 HL-SST 测量模式解算重力场，由于其采样较高的原因，混频效应的影响相对较弱，因此解算模型精度受观测精度影响较大；Bender 星座采用高精度的 LL-SST 测量模式，但时空采样率低，混频效应的作用相对明显。将 Bender 星座与 VLEO 星座联合后将降低观测精度的影响，同时减弱 Bender 星座因采样不足和海潮模型误差带来的混频效应，最终使时变重力场恢复性能得到提高。

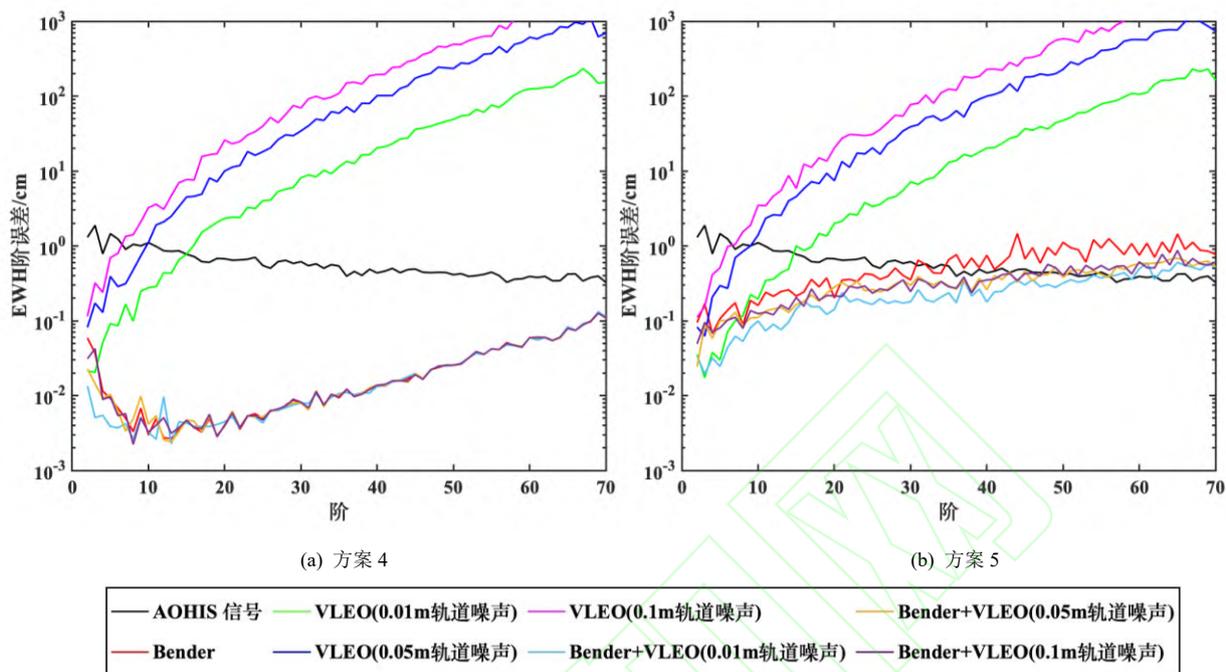


图6 方案4到5不同星座解算结果的EWH阶误差

Fig. 6 The EWH Degree Error of Different Constellation Solutions in Schemes 4 to 5

为了进一步分析不同星座构型恢复时变重力信号的能力，下面对结果在频域和空间域进行分析，图7、图8给出了方案5中VLEO轨道精度在1 cm时解算结果的位系数误差谱图和前8阶位系数等效水高误差的空间分布，可以看到在考虑所有误差源的情况下，VLEO星座的恢复结果在低阶扇谐波项优于Bender星座的恢复结果，在前8阶等效水高误差低于Bender星座。将两种星座联合解算后相对Bender星座单独解算的结果在扇谐波项精度得到明显提高。

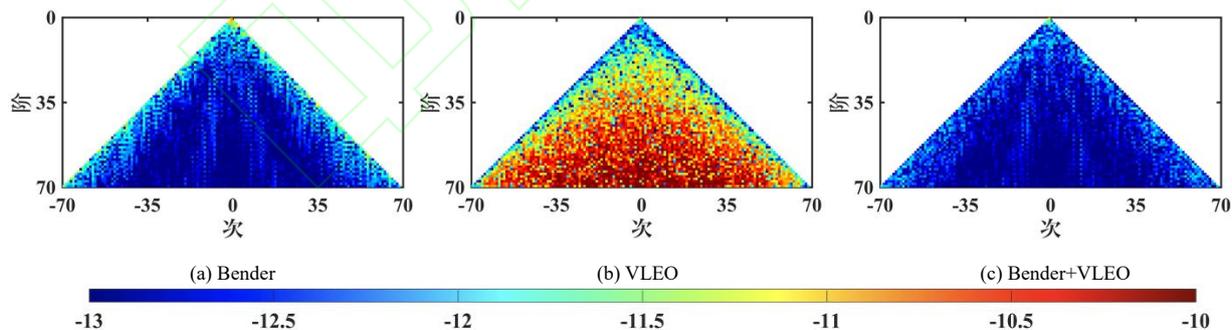


图7 方案5中VLEO轨道精度在1 cm时不同星座解算结果的球谐系数误差谱图

Fig. 7 In Scheme 5, the Spherical Harmonic Coefficients Errors of Different Constellation Solution Results when the Orbital Accuracy of VLEO is 1 cm

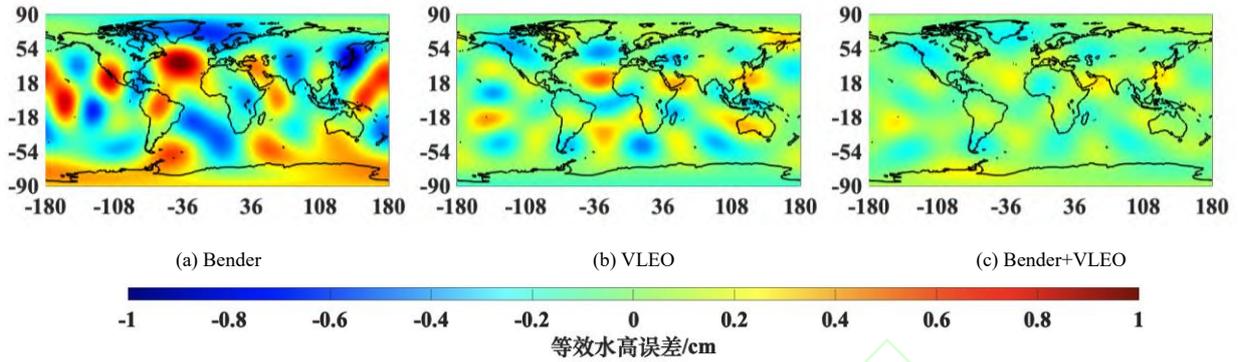


图 8 方案 5 中 VLEO 轨道精度在 1 cm 时不同星座解算结果前 8 阶的等效水高误差的空间分布

Fig. 8 In Scheme 5, the Spatial Distribution of Equivalent Water Height Errors in the first 8 Degrees of Different Constellation Solution Results when the Orbital Accuracy of VLEO is 1 cm

针对 VLEO 星座在不同定轨精度条件下，联合 Bender 星座恢复时变模型的结果，图 9 给出了方案 5 部分星座解算结果在前 70 阶等效水高误差的空间分布。图中可见，VLEO 星座的加入可以有效降低 Bender 星座恢复结果的混频效应以及南北条带误差，即使 VLEO 星座的定轨精度在 0.1 m 时，在中低纬度区域南北条带误差也会得到显著降低，有效提高了时变重力场的解算精度。

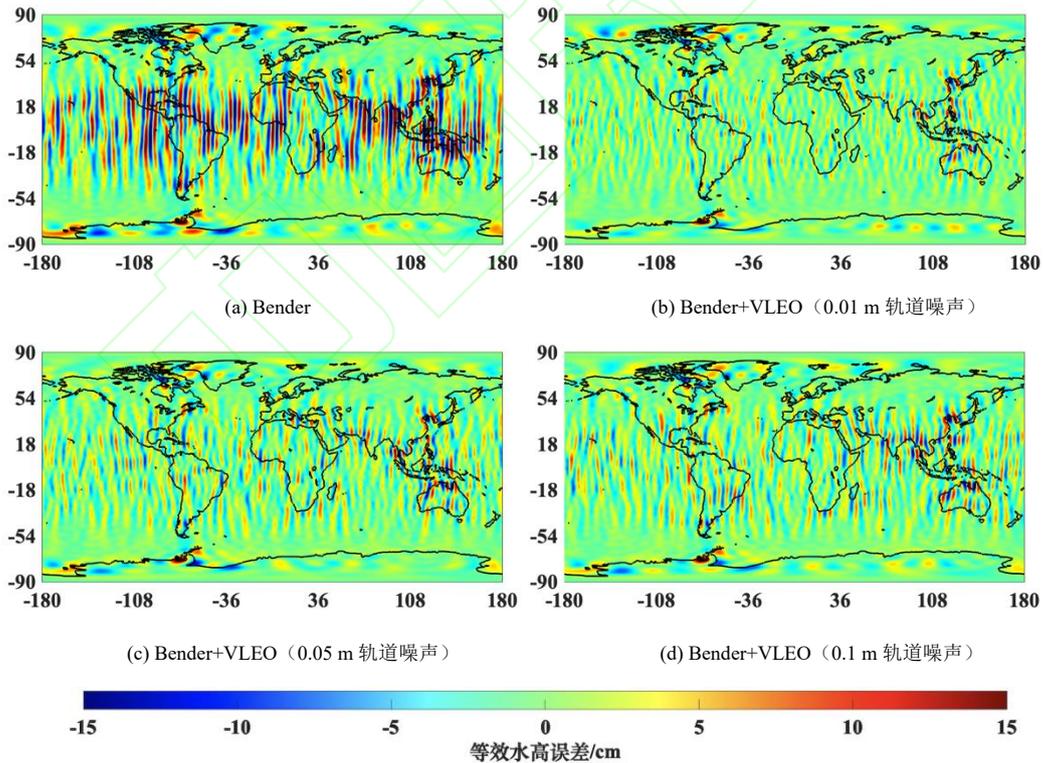


图 9 方案 5 中不同星座恢复结果前 70 阶的等效水高误差的空间分布

Fig. 9 The Spatial Distribution of the Equivalent Water Height Errors in the first 70 Degrees Using Different Constellations in Scheme 5

## 4 结论

本文模拟了 VLEO 卫星星座与 Bender 星座 7 天的观测数据, 在考虑 AOHIS 信号混频误差、海潮模型误差、轨道位置误差、星间距离变率误差和加速度计观测误差的情况下, 采用短弧积分法恢复时变重力场 AOHIS 信号, 并对 VLEO 星座、Bender 星座及两星座联合恢复时变重力场的性能进行对比分析, 重点分析了观测误差和混频误差对 VLEO 星座、Bender 星座及联合星座对恢复时变重力场的影响, 主要得到以下结论:

1) 在不考虑观测量噪声时, VLEO 星座相比 Bender 星座大幅度增加了观测采样的数量, 有效降低了因对 AOHIS 信号时间采样不足和海潮模型误差引起的混频效应。

2) 在考虑所有误差源的情况下, 对于 7 日解, 当卫星定轨精度达到 1 cm 时, VLEO 星座和 Bender 星座可分别恢复 15 阶和 35 阶以内的有效信号, 在 8 阶以内 VLEO 星座性能略优于 Bender 星座, 限制 VLEO 星座和 Bender 星座性能的主要因素分别是观测精度和混频误差。

3) 联合 VLEO 星座与 Bender 星座解算时变重力场比使用单个星座整体精度更高, 即使 VLEO 卫星轨道精度在 10cm 时, 也可有效降低 Bender 星座产生的南北条带效应, 当定轨精度达到 1 cm 时, 联合解有效阶次可达 55 阶。通过两种星座联合, 减弱了观测误差和混频效应的影响, 有效提升了短周期时变重力场的恢复性能。

另外, VLEO 星座可以设计很多种星座构型, 不同构型也会对结果产生不同影响, 例如采用极轨加倾斜轨道的星座模式, 在不同纬度地区对时变重力场的恢复结果可能存在差异, 这将涉及到低轨卫星星座设计, 这不是本文的讨论范围, 未来可以对该问题专门开展研究。

## 参考文献

- [1] Li X, Zhong B, Li J, et al. Joint inversion of GNSS and GRACE/GFO data for terrestrial water storage changes in the Yangtze River Basin[J]. *Geophysical Journal International*, 2023, 233(3): 1596-1616.
- [2] Xu G, Wu Y, Liu S, et al. How 2022 extreme drought influences the spatiotemporal variations of terrestrial water storage in the Yangtze River Catchment: Insights from GRACE-based drought severity index and in-situ measurements[J]. *Journal of Hydrology*, 2023, 626: 130245.
- [3] Luthcke S B, Arendt A A, Rowlands D D, et al. Recent glacier mass changes in the Gulf of Alaska region from GRACE mascon solutions[J]. *Journal of Glaciology*, 2008, 54(188): 767-777.
- [4] Ghobadi-Far K, Han S C, Allgeyer S, et al. GRACE gravitational measurements of tsunamis after the 2004, 2010, and 2011 great earthquakes[J]. *Journal of Geodesy*, 2020, 94: 1-9.
- [5] Tapley B D, Watkins M M, Flechtner F, et al. Contributions of GRACE to understanding climate change[J]. *Nature climate change*, 2019, 9(5): 358-369.
- [6] Tapley B D, Bettadpur S, Watkins M, et al. The gravity recovery and climate experiment: Mission overview and early results[J]. *Geophysical research letters*, 2004, 31(9).
- [7] Kornfeld R P, Arnold B W, Gross M A, et al. GRACE-FO: the gravity recovery and climate experiment follow-on mission[J]. *Journal of spacecraft and rockets*, 2019, 56(3): 931-951.
- [8] Liu Wei, Chang Xiaotao, Zhu Guangbin, et al. Ocean tide aliasing analysis of Bender-type constellation gravity mission. *Journal of Huazhong University of Science and Technology (Natural Science Edition)*, 2023, 51(03): 67-71. (刘伟, 常晓涛, 朱广彬, 等. Bender-type 重力卫星星座海潮混频特性研究[J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2023, 51(03): 67-71.)
- [9] Zenner L, Fagiolini E, Daras I, et al. Non-tidal atmospheric and oceanic mass variations and their impact on GRACE data analysis[J]. *Journal of Geodynamics*, 2012, 59: 9-15.
- [10] Watkins M, Sprague G, Case K. Time Variable Gravity Mapping Mission (Grace Follow-On/Grace II) Study[C]//GRACE Science Team Meeting, San Francisco, USA, 2008.

- [11] Daras I, Pail R. Treatment of temporal aliasing effects in the context of next generation satellite gravimetry missions[J]. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 2017, 122(9): 7343-7362.
- [12] Wiese D N, Visser P, Nerem R S. Estimating low resolution gravity fields at short time intervals to reduce temporal aliasing errors[J]. *Advances in Space Research*, 2011, 48(6): 1094-1107.
- [13] Hauk M, Pail R. Treatment of ocean tide aliasing in the context of a next generation gravity field mission[J]. *Geophysical Journal International*, 2018, 214(1): 345-365.
- [14] Zhao Qian, Jiang Weiping, Xu Xinyu, et al. Feasibility study on application of satellite formations for eliminating the influence from aliasing error of ocean tide model. *Science China: Earth Sciences*, 2015, 45(02): 169-176. (赵倩, 姜卫平, 徐新禹, 等. 卫星编队用于消除海潮模型混频误差影响的可行性研究[J]. *中国科学: 地球科学*, 2015, 45(02): 169-176.)
- [15] Bender P L, Wiese D N, and Nerem R S. A possible Dual-GRACE mission with 90 degree and 63 degree inclination orbits[C]//Proceedings of the 3rd International Symposium on Formation Flying, Missions and Technologies, Noordwijk, Netherlands, 2008.
- [16] Pail R, Chen Q, Engels J, et al. Additional constellation and scientific analysis of the next generation gravity mission concept (ADDCON)[R]. Munich: Technical University of Munich, 2018.
- [17] Pail R, Yeh H, Feng W, et al. Next-Generation Gravity Missions: Sino-European Numerical Simulation Comparison Exercise[J]. *Remote Sensing*, 2019, 11(22).
- [18] Xue Wen, Hu Min, Ruan Yongjing, et al. Analysis of the first stage deployment of Starlink constellation based on TLE[J]. *Chinese Space Science and Technology*, 2022, 42(05): 24-33. (薛文, 胡敏, 阮永井, 等. 基于 TLE 的 Starlink 星座第一阶段部署情况分析[J]. *中国空间科学技术*, 2022, 42(05): 24-33.)
- [19] Lyu Jiuming, Lu Jiangong, Diao Jingjing, et al. The status quo of ultra-low altitude satellite technology and its future use[J]. *National Defense Technology*, 2020, 41(1): 33-37. (吕久明, 路建功, 刁晶晶, 等. 超低轨道卫星技术发展现状及应用[J]. *国防科技*, 2020, 41(1): 33-37.)
- [20] 樊巍. 中国启动建设超低轨道卫星星座[N]. *环球时报*, 2023-07-14(008).
- [21] Mayer-Gürr T. Gravitationsfeldbestimmung aus der Analyse kurzer Bahnbögen am Beispiel der Satellitenmissionen CHAMP und GRACE[D]. Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 2006.
- [22] Zhao Yongqi, Li Jiancheng, Xu Xinyu, et al. Determination of static gravity field model by using satellite data of GOCE and GRACE. *Chinese Journal of Geophysics*, 2023, 66(6): 2322-2336. (赵永奇, 李建成, 徐新禹, 等. 利用 GOCE 和 GRACE 卫星观测数据确定静态重力场模型[J]. *地球物理学报*, 2023, 66(06): 2322-2336.)
- [23] Mayer-Gürr T, Behzadpour S, Eicker A, et al. GROOPS: A software toolkit for gravity field recovery and GNSS processing[J]. *Computers & geosciences*, 2021, 155: 104864.
- [24] Dobsław H, Bergmann-Wolf I, Dill R, et al. The updated ESA Earth System Model for future gravity mission simulation studies[J]. *Journal of Geodesy*, 2015, 89(5).
- [25] Savcenko R, Bosch W. EOT11A - Empirical Ocean Tide Model from Multi-Mission Satellite Altimetry[J]. *Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut*, 2008.
- [26] Ray R D. A global ocean tide model from TOPEX/POSEIDON altimetry: GOT99.2[M]. Goddard Space Flight Center: National Aeronautics and Space Administration, 1999.
- [27] Iran Pour S, et al. Assessment of satellite constellations for monitoring the variations in Earth gravity field—SC4MGV[R]. Netherlands: European Space Agency, ESA/ESTEC, 2015.
- [28] Ditmar P, Klees R, Liu X. Frequency-dependent data weighting in global gravity field modeling from satellite data contaminated by non-stationary noise[J]. *Journal of Geodesy*, 2007, 81: 81-96.

## 网络首发:

标题: 超低轨卫星星座恢复短周期时变重力场的模拟分析

作者: 刘有建, 李建成, 徐新禹, 魏辉, 赵永奇

收稿日期: 2024-04-10

DOI:10.13203/j.whugis20240047

## 引用格式:

刘有建, 李建成, 徐新禹, 等. 超低轨卫星星座恢复短周期时变重力场的模拟分析[J]. *武汉大学学报(信息科学版)*, 2024, DOI: 10.13203/j.whugis20240047 (LIU Youjian, LI Jiancheng, XU Xinyu, et al. Simulation

analysis of short-period time-varying gravity field in recovery of very-low orbit satellite constellation[J].Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2024 , DOI: 10.13203/j.whugis20240047)

网络首发文章内容和格式与正式出版会有细微差别，请以正式出版文件为准！

---

您感兴趣的其他相关论文：

#### 联合重力卫星和水井资料监测华北平原地下水储量变化

曹杰, 肖云, 龙笛, 崔英杰, 刘淼, 张锦柏, 王宇康, 洪晓东, 陈培宁

武汉大学学报(信息科学版), 2024, 49(5): 805-818.

<http://ch.whu.edu.cn/cn/article/doi/10.13203/j.whugis20230116>

#### 下一代重力卫星任务研究概述与未来展望

冉将军, 闫政文, 吴云龙, 钟敏, 肖云, 楼立志, 王长青

武汉大学学报(信息科学版), 2023, 48(6): 841-857.

<http://ch.whu.edu.cn/cn/article/doi/10.13203/j.whugis20220629>

#### 利用卫星重力测量确定地球重力场模型的进展

罗志才, 钟波, 周浩, 吴云龙

武汉大学学报(信息科学版), 2022, 47(10): 1713-1727.

<http://ch.whu.edu.cn/cn/article/doi/10.13203/j.whugis20220537>