



武汉大学学报(信息科学版)

Geomatics and Information Science of Wuhan University

ISSN 1671-8860, CN 42-1676/TN

《武汉大学学报(信息科学版)》网络首发论文

题目: GNSS/SINS 组合导航系统的非线性最大熵 UKF 算法
作者: 林雪原, 孙炜玮
DOI: 10.13203/j.whugis20240045
收稿日期: 2024-09-15
网络首发日期: 2024-10-08
引用格式: 林雪原, 孙炜玮. GNSS/SINS 组合导航系统的非线性最大熵 UKF 算法
[J/OL]. 武汉大学学报(信息科学版). <https://doi.org/10.13203/j.whugis20240045>



网络首发: 在编辑部工作流程中, 稿件从录用到出版要经历录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿等阶段。录用定稿指内容已经确定, 且通过同行评议、主编终审同意刊用的稿件。排版定稿指录用定稿按照期刊特定版式(包括网络呈现版式)排版后的稿件, 可暂不确定出版年、卷、期和页码。整期汇编定稿指出版年、卷、期、页码均已确定的印刷或数字出版的整期汇编稿件。录用定稿网络首发稿件内容必须符合《出版管理条例》和《期刊出版管理规定》的有关规定; 学术研究成果具有创新性、科学性和先进性, 符合编辑部对刊文的录用要求, 不存在学术不端行为及其他侵权行为; 稿件内容应基本符合国家有关书刊编辑、出版的技术标准, 正确使用和统一规范语言文字、符号、数字、外文字母、法定计量单位及地图标注等。为确保录用定稿网络首发的严肃性, 录用定稿一经发布, 不得修改论文题目、作者、机构名称和学术内容, 只可基于编辑规范进行少量文字的修改。

出版确认: 纸质期刊编辑部通过与《中国学术期刊(光盘版)》电子杂志社有限公司签约, 在《中国学术期刊(网络版)》出版传播平台上创办与纸质期刊内容一致的网络版, 以单篇或整期出版形式, 在印刷出版之前刊发论文的录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿。因为《中国学术期刊(网络版)》是国家新闻出版广电总局批准的网络连续型出版物(ISSN 2096-4188, CN 11-6037/Z), 所以签约期刊的网络版上网络首发论文视为正式出版。

DOI:10.13203/j.whugis20240045

引用格式：

林雪原, 孙炜玮. GNSS/SINS 组合导航系统的非线性最大熵 UKF 算法[J].武汉大学学报(信息科学版),2024,DOI: 10.13203/j.whugis20240045 (LIN Xueyuan, SUN Weiwei. Nonlinear Maximum Correntropy UKF Algorithm for GNSS/SINS Integrated Navigation System[J].Geomatics and Information Science of Wuhan University,2024,DOI: 10.13203/j.whugis20240045)

GNSS/SINS 组合导航系统的非线性最大熵 UKF 算法

林雪原¹, 孙炜玮²

1 山东外事职业大学, 山东 威海, 264500

2 海军航空大学, 山东 烟台, 264001

摘要: 无迹卡尔曼滤波器 (UKF) 是解决 GNSS/SINS 组合导航系统非线性滤波的一种有效方法, UKF 在高斯噪声中能表现出良好的性能, 但在非高斯噪声中、尤其是重尾非高斯噪声环境下, 其性能会严重下降。为了提高 UKF 对重尾非高斯噪声的鲁棒性, 本文提出了一种 GNSS/SINS 组合导航系统的最大熵 UKF (MCUKF) 算法。首先, 建立了 GNSS/SINS 组合导航系统的非线性系统模型, 其特点为状态方程为非线性而测量方程为线性; 然后, 利用 UKF 的无迹变换 (UT), 获得了状态及其协方差矩阵的先验估计; 最后, 利用最大熵准则和统计线性回归模型获得状态及其协方差矩阵的后验估计, 并设计了 MCUKF 算法的不动点迭代实现步骤。仿真实验表明, 在高斯噪声中 UKF 性能略优于 MCUKF; 而在重尾噪声环境下, 相对于 UKF, 核带宽为 5 的 MCUKF 可提高位置精度 13.4%、提高速度精度 10.3%; 相对于 AKF, MCUKF 可提高位置精度 8.8%、提高速度精度 7.5%。实验结果表明, 在较小的核带宽时, MCUKF 的滤波性能明显优于 UKF, 可提升复杂环境下组合导航系统的滤波精度。**关键词:** UKF; 最大熵准则; 不动点迭代; 无迹变换; 统计线性回归模型

Nonlinear Maximum Correntropy UKF Algorithm for GNSS/SINS Integrated Navigation System

LIN Xueyuan¹ SUN Weiwei²

1 Shandong Vocational University of Foreign Affairs, Weihai 264500, China

2 Naval Aviation University, Yantai 264001, China

Abstract: Objectives: Unscented Kalman filter (UKF) is an effective method to solve the nonlinear filtering of GNSS/SINS integrated navigation system. UKF shows good performance in Gaussian noise, but its performance will be seriously degraded in non-Gaussian noise, especially when the system is interfered by some heavy tail pulse noise. In order to improve the robustness of UKF against heavy tail pulse noise, this paper proposed a maximum correntropy UKF (MCUKF) algorithm for GNSS/SINS integrated navigation system is proposed in this paper. **Methods:** Firstly, the nonlinear system model of GNSS/SINS integrated navigation system is established, which is characterized by nonlinear state equation and linear measurement variance. Then, a prior estimation of the state and its covariance matrix is obtained by using the unscented transform (UT) of UKF. Finally, the maximum correntropy criterion and statistical linear regression model are used to obtain the posterior estimation of the state and its covariance matrix, and the fixed point iteration of MCUKF algorithm is designed. **Results:** The simulation results show that the performance of UKF is slightly better than MCUKF in Gaussian noise; Compared with UKF, MCUKF with a core bandwidth of 5 can improve position accuracy by 13.4% and velocity accuracy by 10.3%; Compared with AKF, MCUKF can improve position accuracy by 8.8% and speed accuracy by 7.5%. **Conclusions:** The experimental results show that the filtering performance of MCUKF is obviously

收稿日期: 2024-09-15

项目资助: 国家自然科学基金 (62076249); 山东省自然科学基金 (ZR2020MF154)。

第一作者: 林雪原, 博士, 教授, 主要从事组合导航及其信息融合的研究。linxy_ytcn@126.com

通信作者: 孙炜玮, 硕士, 副教授。s353375092@qq.com

better than that of UKF at small core bandwidth, which can improve the filtering accuracy of integrated navigation system in complex environment.

Key words: UKF; maximum correntropy criterion; fixed point iteration; unscented transformation; statistical linear regression model.

1 引言

估计理论在 GNSS/SINS (全球导航定位系统/捷联惯性导航系统) 组合导航系统中起着关键的作用。对于 GNSS/SINS 组合导航系统的高斯线性动态模型, 卡尔曼滤波器 (KF) 在最小均方差 (MMSE) 准则下可提供最优状态估计^[1]。而 GNSS/SINS 组合导航系统本质上是非线性的, 为了解决非线性系统的滤波问题, 迄今为止, 扩展卡尔曼滤波器^[2] (EKF) 和无迹卡尔曼滤波器^[3] (UKF) 是两种广泛使用的滤波方法。EKF 通过一阶线性化近似非线性系统, 并在此近似的基础上使用 KF; 然而当系统高度非线性时, 粗糙的近似可能导致滤波发散; 此外, 雅克比矩阵的推导往往导致 EKF 实现困难^[4]。而 UKF 通过一组选定的 Sigma 点近似状态的概率分布, 并通过非线性方程来传递该分布, 理论证明 UKF 比 EKF 具有更好的滤波精度^[5], 文献[6]通过仿真证明了基于 UKF 的 GNSS/SINS 组合导航系统性能明显优于常规 KF 的滤波性能。

当测量系统受到重尾非高斯噪声的干扰时, UKF 性能不佳。重尾非高斯噪声是非高斯噪声的一种常见形式, 尤其是系统受到脉冲噪声干扰时噪声呈现非高斯的重尾分布^[7]; 这些重尾非高斯噪声在实际的工程应用中经常出现, 如: 当受到内部及外部电磁干扰等时, GNSS 自身不稳定导致所观测信息带有非高斯噪声^[8]; 飞行环境的复杂多变性及载体自身的大幅度机动导致观测信息带有非高斯噪声^[9]; GNSS 接收信号不是足够强时易导致观测信息带有非高斯噪声^[10]。UKF 也是基于 MMSE 准则, 因此对重尾非高斯噪声表现出较强的敏感性。而相关熵作为信息论学习中的一种局部相似度量, 近年来成功地应用于鲁棒机器学习和非高斯信号处理中^[11-12], 在最大熵准则下的自适应滤波算法可以在重尾非高斯噪声中取得优异的滤波性能^[13-14]。文献[15-16]将最大熵的概念简单地应用于 GNSS/SINS 松组合导航系统的线性滤波模型中, 且滤波过程中仅利用测量值目标函数相关熵与状态估计值目标函数相关熵的比值来改变卡尔曼滤波增益, 导致系统对重尾噪声敏感性依然较强。文献[17]将最大熵准则与变分贝叶斯滤波相结合, 并应用于状态方程

及测量方程均为线性的 GNSS/SINS 组合导航系统中, 有效地提高系统对重尾非高斯噪声的鲁棒性。文献[18]将最大熵准则应用于状态方程为线性而测量方程为非线性的 CNS/SINS 组合导航系统中, 以提高弹道导弹的导航精度。文献[19]将最大熵准则应用于状态方程为线性而测量方程为非线性航天器相对状态测量中, 并取得了较好的滤波效果。

由于 GNSS/SINS 组合导航系统中 SINS 是一种典型的非线性系统, 故基于 SINS 误差为被估状态的间接式卡尔曼滤波精度明显低于基于 SINS 导航参数为被估状态的直接式卡尔曼滤波精度^[6]。为此, 基于相关熵的基本概念, 本文利用无迹变换与统计线性回归模型, 将最大熵准则与 UKF 算法进行有机融合, 提出了一种 GNSS/SINS 组合导航系统的最大熵 UKF (MCUKF: Maximum Correntropy UKF) 算法。与文献[17-19]不同的是, 本文算法中状态方程为非线性的、而测量方程为线性的。

2 组合导航系统非线性模型

在 GNSS 接收机直接提供位置及速度信息的基础上, 取“东北天”地理坐标系为导航坐标系 (g 系), 建立 GNSS/SINS 组合导航系统的非线性模型如下^[6]:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = f(\mathbf{X}(t)) + \mathbf{W}(t) \\ \mathbf{Z}(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{V}(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中: $f(\cdot)$ 为非线性函数; $\mathbf{W}(t)$ 为系统噪声向量; $\mathbf{V}(t)$ 为测量噪声向量; $\mathbf{X}(t)$ 为系统状态向量, $\mathbf{Z}(t)$ 为系统测量向量, $\mathbf{H}(t)$ 为测量矩阵, 并表示为^[20]:

$$\mathbf{X}(t) = [\theta \ \gamma \ \varphi \ v_E \ v_N \ v_U \ \lambda \ L \ H \ \varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \nabla_x \ \nabla_y \ \nabla_z]^T \quad (2)$$

$$\mathbf{Z}(t) = [v_{G,E} \ v_{G,N} \ v_{G,U} \ \lambda_G \ L_G \ H_G]^T \quad (3)$$

$$\mathbf{H}(t) = [\mathbf{0}_{6 \times 3} \ \mathbf{I}_{6 \times 6} \ \mathbf{0}_{6 \times 6}] \quad (4)$$

式(2)中: γ 、 θ 、 φ 代表由 SINS 计算得到的横滚角、俯仰角和航向角; v_E 、 v_N 、 v_U 代表由 SINS 计算得到的东向速度、北向速度和天向速度, E、N 和 U 分别代表东向、北向和天向; λ 、 L 、 H 代表由 SINS 计算得到的经度、纬度和高度。式(3)中对应的变量下标 G 代表由 GNSS 提供的相关信息。

记载体坐标系 (b 系) 相对于 g 系的角速度在

b 系内的投影为 $\omega_{gb}^b = [\omega_{gbx}^b \ \omega_{gby}^b \ \omega_{gbz}^b]^T$ ，SINS 姿态解算方程为：

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \mathbf{M} \left(\omega_{gb}^b + \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{\varepsilon_x} \\ w_{\varepsilon_y} \\ w_{\varepsilon_z} \end{bmatrix} \right) \quad (5)$$

式(5)中：

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\cos \theta} \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \gamma & 0 & \sin \gamma \cos \theta \\ \sin \gamma \cos \theta & \cos \theta & -\cos \theta \cos \gamma \\ \sin \gamma & 0 & -\cos \gamma \end{bmatrix} \quad (6)$$

$[w_{\varepsilon_x} \ w_{\varepsilon_y} \ w_{\varepsilon_z}]^T$ 为陀螺白噪声。

SINS 的位置解算方程为：

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_E \\ \dot{V}_N \\ \dot{V}_U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_E \\ f_N \\ f_U \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & (2\omega_{ie} + \dot{\lambda}) \sin L & -(2\omega_{ie} + \dot{\lambda}) \cos L \\ -(2\omega_{ie} + \dot{\lambda}) \sin L & 0 & -\dot{L} \\ (2\omega_{ie} + \dot{\lambda}) \cos L & \dot{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_E \\ V_N \\ V_U \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} + \mathbf{C}_b^g \left(\begin{bmatrix} \nabla_x \\ \nabla_y \\ \nabla_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{\nabla_x} \\ w_{\nabla_y} \\ w_{\nabla_z} \end{bmatrix} \right) \quad (8)$$

其中： $[w_{\nabla_x} \ w_{\nabla_y} \ w_{\nabla_z}]^T$ 为加速度计白噪声。

则，式(1)中系统噪声可以表示为：

$$\mathbf{W}(t) = \left[\left(\mathbf{M} \cdot [\omega_{gbx}^b \ \omega_{gby}^b \ \omega_{gbz}^b]^T \right)^T, \left(\mathbf{C}_b^g \cdot [w_{\nabla_x} \ w_{\nabla_y} \ w_{\nabla_z}]^T \right)^T, \mathbf{0}_{1 \times 9} \right]^T \quad (9)$$

设 \mathbf{W} 方差阵为 \mathbf{Q} ；设 \mathbf{V} 方差阵为 \mathbf{R} 。

3 组合导航系统的最大熵 UKF 算法

3.1 相关熵的概念

相关熵是两个随机变量之间的广义相似性度量，给定两个随机变量 X 和 Y ，设其联合分布函数为 $F_{XY}(x, y)$ ，则其相关熵定义为：

$$V(X, Y) = E[\kappa(X, Y)] = \int \kappa(x, y) \cdot dF_{XY}(x, y) \quad (10)$$

其中： $E[\cdot]$ 代表期望运算， $\kappa(\cdot, \cdot)$ 表示核函数，本文中选取的核函数为高斯核函数：

$$\kappa(x, y) = G_\sigma(e) = \exp(-e^2 / 2\sigma^2) \quad (11)$$

其中： $e = x - y$ ， $\sigma > 0$ 代表核宽度。

取高斯核函数的泰勒级数展开，有：

$$V(X, Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot \sigma^{2n} \cdot n!} E[(X - Y)^{2n}] \quad (12)$$

因此，相关熵是误差变量 $X - Y$ 的所有偶阶矩的加权和。当核宽度 σ 非常大时（与数据的动态范围相比），相关熵主要取决于二阶矩。

在许多实际情况下，数据是有限的，且联合分布 $F_{XY}(x, y)$ 是未知的。此时，可以使用样本均值估计器来估计相关熵：

$$\begin{bmatrix} \dot{L} \\ \dot{\lambda} \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_N & V_E & V_U \\ R_n + h & (R_m + h) \cos L & V_U \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中： R_n 和 R_m 分别地球卯酉圈曲率半径和地球子午圈半径。

假设 f_E 、 f_N 和 f_U 分别为加速度计输出的沿东向、北向和天向的比力测量值， ω_{ie} 为地球自转角速率， g 为当地重力加速度， \mathbf{C}_b^g 为由 b 系到 g 系的姿态转换矩阵。则，SINS 的速度解算方程为^[21]：

$$\hat{V}(X, Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G_\sigma(e(i)) \quad (13)$$

其中： $e(i) = x(i) - y(i)$ ， $\{x(i), y(i)\}_{i=1}^N$ 为从 F_{XY} 中抽取的 N 个样本。

本文目标是求解一个自适应模型的参数向量 \mathbf{w} ，假设 X 和 Y 分别代表模型的输出和期望响应，则基于式(13)的最大相关熵准则（MCC）的学习：

$$\hat{\mathbf{w}} = \arg \max_{\mathbf{w} \in \Omega} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G_\sigma(e(i)) \quad (14)$$

可以表示为解决优化问题，其中： $\hat{\mathbf{w}}$ 代表最优解， Ω 而代表参数的集合。

基于式(14)，将 MCC 和统计线性回归模型相结合，推导出一种新型的组合导航系统非线性滤波，即最大熵 UKF 算法（MCUKF），该算法在非高斯环境下表现良好，因为相关熵包含了误差变量的二阶矩和高阶矩。MCUKF 也包含两个步骤，即时间更新和量测更新。

3.2 时间更新

时间更新过程主要利用无迹变换完成。基于式(1)，测量方程是线性、测量噪声是加性时，系统增广状态向量设置如下^[22,23]：

$$\begin{cases} \mathbf{X}^a = [\mathbf{X} \ \mathbf{W}]^T \\ \boldsymbol{\chi}^a = [(\boldsymbol{\chi}^x)^T \ (\boldsymbol{\chi}^w)^T]^T \end{cases} \quad (15)$$

其中： $\boldsymbol{\chi}^a$ 为增广状态向量 \mathbf{X}^a 的采样点向量；假设 $\boldsymbol{\chi}^x$ 和 $\boldsymbol{\chi}^w$ （ \mathbf{X}_k 和 \mathbf{W}_k ）的维数分别为 n 和 r ； $\boldsymbol{\chi}^a$ 的维数定义为 L_a ，即 $L_a = n + r$ 。

初始化：

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{X}}_0 = E[\mathbf{X}_0] \\ \mathbf{P}_0 = E[(\mathbf{X}_0 - \hat{\mathbf{X}}_0)(\mathbf{X}_0 - \hat{\mathbf{X}}_0)^T] \\ \hat{\mathbf{X}}_0^a = E[\mathbf{X}^a] = [\hat{\mathbf{X}}_0^T \quad \mathbf{0}^T]^T \\ \mathbf{P}_0^a = E[\mathbf{X}^a] = E[(\mathbf{X}_0^a - \hat{\mathbf{X}}_0^a)(\mathbf{X}_0^a - \hat{\mathbf{X}}_0^a)^T] \\ = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (16)$$

一组 $2L_a + 1$ 个样点, 也称作 Sigma 点, 在上一次时间步长 $k-1$, 可以由状态估计量 $\hat{\mathbf{X}}_{k-1}$ 、 $\mathbf{P}_{k-1|k-1}$ 及 \mathbf{Q}_{k-1} 产生:

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_{0,k-1}^a = \hat{\mathbf{X}}_{k-1}^a \\ \chi_{i,k-1}^a = \hat{\mathbf{X}}_{k-1}^a + \left(\sqrt{L_a \mathbf{P}_{k-1}^a} \right)_i, \quad i=1, \dots, L_a \\ \chi_{i,k-1}^a = \hat{\mathbf{X}}_{k-1}^a - \left(\sqrt{L_a \mathbf{P}_{k-1}^a} \right)_i, \quad i=L_a+1, \dots, 2L_a \\ \\ W_0^m = 0 \\ W_0^c = 2 \\ W_i^m = W_i^c = 1/2L_a, \quad i=1, \dots, 2L_a \end{array} \right. \quad (17)$$

其中: $\left(\sqrt{L_a \mathbf{P}_{k-1}^a} \right)_i$ 为 $L_a \mathbf{P}_{k-1}^a$ 的平方根矩阵的第 i 列。

变换后的 Sigma 点表示为:

$$\chi_{i,k|k-1}^x = f(\chi_{i,k-1}^x, \chi_{i,k-1}^w) \quad (19)$$

先验状态均值及其协方差矩阵表示为:

$$\hat{\mathbf{X}}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2L_a} W_i^m \chi_{i,k|k-1}^x \quad (20)$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2L_a} W_i^c \left[\chi_{i,k|k-1}^x - \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1} \right] \left[\chi_{i,k|k-1}^x - \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1} \right]^T \quad (21)$$

3.3 测量更新

将式(20)和式(1)中的第二项组合, 得到如下统计线性回归模型^[24]:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1} \\ \mathbf{Z}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{H}_k \end{bmatrix} \mathbf{X}_k + \boldsymbol{\xi}_k \quad (22)$$

其中: $\boldsymbol{\xi}_k$ 为

$$\boldsymbol{\xi}_k = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1} - \mathbf{X}_k \\ \mathbf{V}_k \end{bmatrix} \quad (23)$$

且:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_k &= \mathbf{E}[\boldsymbol{\xi}_k \boldsymbol{\xi}_k^T] = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{k|k-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{P,k|k-1} \mathbf{S}_{P,k|k-1}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{V,k} \mathbf{S}_{V,k}^T \end{bmatrix} = \mathbf{S}_k \mathbf{S}_k^T \end{aligned} \quad (24)$$

其中: \mathbf{S}_k 可以由 $\boldsymbol{\Sigma}_k$ 的 Cholesky 分解得到。

式(22)的两边同时乘以 \mathbf{S}_k^{-1} , 可以将统计回归模

型转换为:

$$\mathbf{D}_k = \mathbf{M}_k \mathbf{X}_k + \mathbf{e}_k \quad (25)$$

其中:

$$\mathbf{D}_k = \mathbf{S}_k^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1} \\ \mathbf{Z}_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_k = \mathbf{S}_k^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{H}_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_k = \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{F}_k。$$

可以证明: $\mathbf{E}[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T] = \mathbf{I}$, 即 \mathbf{e}_k 为白噪声。

根据 MCC 准则, 定义一个成本函数^[25]:

$$J_L(\mathbf{X}_k) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L G_\sigma(d_{i,k} - \mathbf{M}_{i,k} \mathbf{X}_k) \quad (26)$$

其中: $d_{i,k}$ 为 \mathbf{D}_k 的第 i 个元素, 而 $\mathbf{M}_{i,k}$ 为 \mathbf{M}_k 的第 i 行, 且 $L = n + m$ 为 \mathbf{D}_k 的维数, m 为 \mathbf{Z}_k 的维数。

在 MCC 准则下, \mathbf{X}_k 的最优估计来自:

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \arg \max_{\mathbf{X}_k} J_L(\mathbf{X}_k) = \arg \max_{\mathbf{X}_k} \sum_{i=1}^L G_\sigma(e_{i,k}) \quad (27)$$

其中: $e_{i,k}$ 为 \mathbf{e}_k 的第 i 个元素

$$e_{i,k} = d_{i,k} - \mathbf{M}_{i,k} \mathbf{X}_k \quad (28)$$

\mathbf{X}_k 的最优解可通过下式求解:

$$\frac{\partial J_L(\mathbf{X}_k)}{\partial \mathbf{X}_k} = 0 \quad (29)$$

经求解后, 得:

$$\mathbf{X}_k = \left(\sum_{i=1}^L [G_\sigma(e_{i,k}) \mathbf{M}_{i,k}^T \mathbf{M}_{i,k}] \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^L [G_\sigma(e_{i,k}) \mathbf{M}_{i,k}^T d_{i,k}] \right) \quad (30)$$

根据式(28), 因为 $e_{i,k} = d_{i,k} - \mathbf{M}_{i,k} \mathbf{X}_k$, 式(30)是关于 \mathbf{X}_k 的不动点方程, 则式(30)可重写为:

$$\mathbf{X}_k = g(\mathbf{X}_k) \quad (31)$$

因此, 可以得到不动点迭代算法为:

$$\hat{\mathbf{X}}_k^{(j)} = g(\hat{\mathbf{X}}_k^{(j-1)}) \quad (32)$$

其中: $\hat{\mathbf{X}}_k^{(j)}$ 代表在 k 时刻第 j 次定点迭代的估计状态 $\hat{\mathbf{X}}_k$ 。

不动点方程(31)可以表达成矩阵形式:

$$\mathbf{X}_k = \left(\mathbf{M}_k^T \mathbf{C}_k \mathbf{M}_k \right)^{-1} \left(\mathbf{M}_k^T \mathbf{C}_k \mathbf{D}_k \right) \quad (33)$$

其中: $\mathbf{C}_{Z,k} = \text{diag}(G_\sigma(e_{n+1,k}) \cdots G_\sigma(e_{n+m,k}))$,

$$\mathbf{C}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{X,k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{Z,k} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{X,k} = \text{diag}(G_\sigma(e_{1,k}) \cdots G_\sigma(e_{n,k}))。$$

根据矩阵逆引理知识及 KF 的推导过程^[2], 式(33)可以进一步表达为:

$$\mathbf{X}_k = \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1} + \bar{\mathbf{K}}_k (\mathbf{Z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1}) \quad (34)$$

其中:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{K}}_k = \bar{\mathbf{P}}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \bar{\mathbf{P}}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \bar{\mathbf{R}}_k) \\ \bar{\mathbf{P}}_{k|k-1} = \mathbf{S}_{P,k|k-1} \mathbf{C}_{X,k}^{-1} \mathbf{S}_{P,k|k-1}^T \\ \bar{\mathbf{R}}_k = \mathbf{S}_{V,k} \mathbf{C}_{Z,k}^{-1} \mathbf{S}_{V,k}^T \end{cases} \quad (35)$$

$$\frac{\|\hat{\mathbf{X}}_k^{(j)}(4:6) - \hat{\mathbf{X}}_k^{(j-1)}(4:6)\|}{\|\hat{\mathbf{X}}_k^{(j-1)}(4:6)\|} \leq \varepsilon \quad (45)$$

同时, 相应的协方差矩阵更新为:

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_k \mathbf{H}_k) \bar{\mathbf{P}}_{k|k-1} (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_k \mathbf{H}_k)^T + \bar{\mathbf{K}}_k \bar{\mathbf{R}}_k \bar{\mathbf{K}}_k^T \quad (36)$$

注意: 根据式(34), $\bar{\mathbf{K}}_k$ 依赖于 $\bar{\mathbf{P}}_{k|k-1}$ 和 $\bar{\mathbf{R}}_k$, 而 $\bar{\mathbf{P}}_{k|k-1}$ 和 $\bar{\mathbf{R}}_k$ 又通过 $\mathbf{C}_{X,k}$ 和 $\mathbf{C}_{Z,k}$ 与 \mathbf{X}_k 相联系, 即式(34)是 \mathbf{X}_k 的不动点方程。可以通过不动点迭代法求解式(34)。不动点迭代的初始值设为 $\hat{\mathbf{X}}_k^{(0)} = \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1}$ 以保证算法的收敛性, 收敛后的值即后验估计 $\hat{\mathbf{X}}_k$ 。

基于上述分析, GNSS/SINS 组合导航系统的非线性 MCCUKF 算法描述如下:

- ① 选择正的核带宽 σ 和较小的正数 ε ; 设置初始估计 $\hat{\mathbf{X}}_0$ 及其对应的协方差矩阵 \mathbf{P}_0 ; 设 $k=1$;
- ② 应用方程(15)~(21)获得先验估计 $\hat{\mathbf{X}}_{k|k-1}$ 及其协方差矩阵 $\mathbf{P}_{k|k-1}$, 并利用 Cholesky 分解得到 \mathbf{S}_k ;
- ③ 构建统计线性回归模型(22);
- ④ 将方程(22)变换为方程(25), 设 $j=1$ 及 $\hat{\mathbf{X}}_k^{(0)} = \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1}$;
- ⑤ 利用方程(37)~(43)来计算 $\hat{\mathbf{X}}_k^{(j)}$:

$$\hat{\mathbf{X}}_k^{(j)} = \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1} + \bar{\mathbf{K}}_k (\mathbf{Z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1}) \quad (37)$$

其中:

$$\bar{\mathbf{K}}_k = \bar{\mathbf{P}}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \bar{\mathbf{P}}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \bar{\mathbf{R}}_k) \quad (38)$$

$$\bar{\mathbf{P}}_{k|k-1} = \mathbf{S}_{P,k|k-1} \tilde{\mathbf{C}}_{X,k}^{-1} \mathbf{S}_{P,k|k-1}^T \quad (39)$$

$$\bar{\mathbf{R}}_k = \mathbf{S}_{V,k} \tilde{\mathbf{C}}_{Z,k}^{-1} \mathbf{S}_{V,k}^T \quad (40)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_{X,k} = \text{diag}(G_\sigma(\tilde{e}_{1,k}), \dots, G_\sigma(\tilde{e}_{n,k})) \quad (41)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_{Z,k} = \text{diag}(G_\sigma(\tilde{e}_{n+1,k}), \dots, G_\sigma(\tilde{e}_{n+m,k})) \quad (42)$$

$$\tilde{e}_{i,k} = d_{i,k} - \mathbf{M}_{i,k} \mathbf{X}_k^{(j-1)}, \quad i=1 \sim n+m \quad (43)$$

⑥ 比较当前的估计值与最后一步的估计值, 以确定迭代停止条件。根据式(2), 导航参数的估计值主要有姿态估计值、位置估计值和速度估计值, 其中位置估计值中经度和纬度是以国际单位(弧度)来表达的、高度是以米来表示的, 速度估计值均是以 m/s 来表示的。所以, 迭代停止条件可设定为如下两种^[26]:

根据水平位置估计值而确定的迭代停止条件:

$$\frac{\|\hat{\mathbf{X}}_k^{(j)}(7:8) - \hat{\mathbf{X}}_k^{(j-1)}(7:8)\|}{\|\hat{\mathbf{X}}_k^{(j-1)}(7:8)\|} \leq \varepsilon \quad (44)$$

根据速度估值而确定的迭代停止条件:

如果迭代停止条件满足, 则 $\hat{\mathbf{X}}_k = \hat{\mathbf{X}}_k^{(j)}$, 并进入步骤⑦; 否则, $j+1 \rightarrow j$, 并返回步骤⑤。

⑦ 计算后验协方差矩阵:

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_k \mathbf{H}_k) \bar{\mathbf{P}}_{k|k-1} (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_k \mathbf{H}_k)^T + \bar{\mathbf{K}}_k \bar{\mathbf{R}}_k \bar{\mathbf{K}}_k^T \quad (46)$$

由式(41)、(42)可以看出, 当 $\tilde{e}_{i,k} = 0$ 时, MCCUKF 简化为 UKF。

4 实验分析

4.1 实验设计

本实验相关工作依托于实验室搭建的 GNSS/SINS 组合导航综合仿真实验系统。实验设置如表 1 所示。设定飞行器初始位置为 E118°、N29°、50m, 初始航向角为 90°, 飞行时间为 2000s, 飞行轨迹如图 1 所示; 捷联解算周期为 0.02s, 滤波周期为 1s。

表 1 实验参数设置

Tab. 1 Simulation parameter setting of navigation sensors

类型	误差项	误差值
传感器误差	陀螺仪常值漂移	5 %s
	陀螺仪白噪声	5 %s
	加速度计常值漂移	$5 \times 10^{-5} g$
	加速度计白噪声	$5 \times 10^{-5} g$
滤波初始误差	GNSS 位置误差	8 m
	GNSS 速度误差	0.2 m/s
	姿态角误差	0.5 °
	速度误差	0.1 m/s
	位置误差	5m

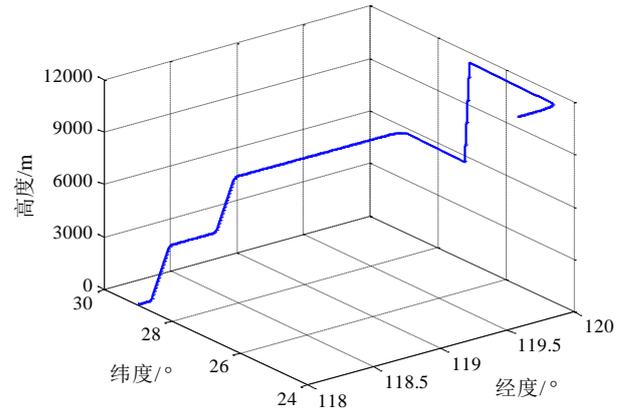


图 1 载体飞行轨迹

Fig. 1 Flight trajectory of carrier

根据表 1 的参数设置, 同时基于式(1)的 GNSS/SINS 组合导航系统非线性系统模型, 可以得到正常情况下测量噪声方差阵表达如下:

$$\mathbf{R}_T = \text{diag} \left[0.1^2 \quad 0.1^2 \quad 0.1^2 \quad (8/R_e)^2 \quad (8/R_e / \cos L)^2 \quad 8^2 \right] \quad (47)$$

其中： \mathbf{R}_T 的前三项代表 GNSS 速度误差方差（单位： m^2/s^2 ），第四项、第五项分别为 GNSS 经度误差方差、纬度误差方差（单位均为： rad^2 ），第六项为 GNSS 高度误差方差（单位： m^2 ）； R_e 代表地球半径； L 代表纬度。

4.2 高斯噪声环境下的实验分析

假设飞行器处于正常的飞行环境中，即 GNSS 输出噪声方差与式(47)一致，即 $\mathbf{V}_k \sim N(0, \mathbf{R}_T)$ 。基于 4.1 节设置的实验条件，进行了一组实验，迭代停止条件采用式(44)。图 2~图 4 给出了在高斯噪声环境下基于 UKF 及 MCKUF ($\sigma = 5$) 的各导航参数的误差对比曲线，可以看出两种滤波方法的性能基本相同，无法分清孰优孰劣。

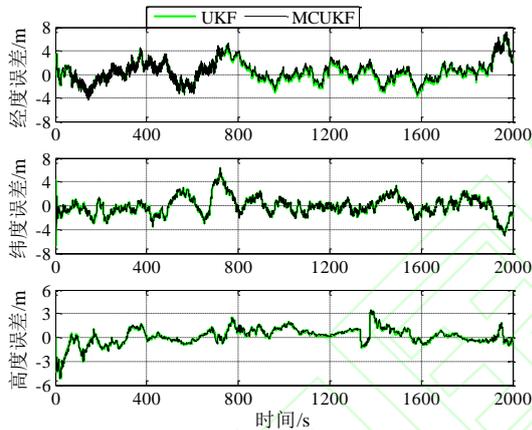


图 2 高斯噪声干扰下位置误差曲线对比图
Fig. 2 Position error curve comparison diagram under Gaussian noise interference

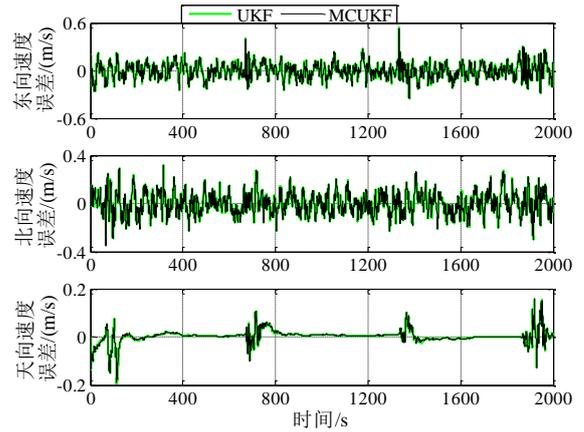


图 3 高斯噪声干扰下速度误差曲线对比图
Fig. 3 Velocity error curve comparison diagram under Gaussian noise interference

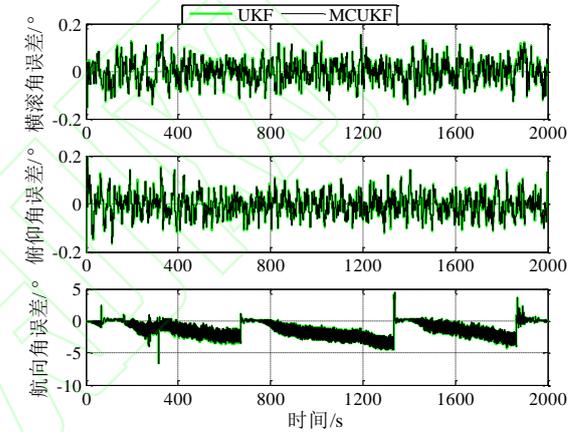


图 4 高斯噪声干扰下姿态误差曲线对比图
Fig. 4 Attitude error curve comparison diagram under Gaussian noise interference

为了定量地分析在高斯噪声干扰下 UKF 与 MCKUF 的滤波性能，表 2 给出了基于 UKF 及 MCKUF 算法的各导航参数误差的 RMS。由于测量噪声是与初期假设一致的高斯噪声，UKF 在所有滤波器中实现了最小的 MSE，并达到最高的滤波精度，相对于 MCKUF ($\sigma = 5$)，UKF 可提高位置精度 1.6%、提高速度精度 0.7%。在 MCKUF 中，随着核带宽的增加，各导航参数误差呈降低的趋势，故应该选择更大的核带宽以获得更好的滤波精度。同时，可以观测到当核带宽较小时，迭代次数较大；在高斯噪声环境下，UKF 性能略高于 MCKUF。

表 2 测量噪声为高斯噪声时 UKF 和 MCKUF ($\varepsilon = 10^{-9}$) 滤波精度对比

滤波器	位置误差 RMS/(m)			速度误差 RMS/(m/s)			姿态误差 RMS/(°)			平均迭代次数
	经度方向	纬度方向	高度方向	东向速度方向	北向速度方向	天向速度方向	横滚角方向	俯仰角方向	航向角方向	
UKF	1.7519	1.5218	1.0150	0.0865	0.0844	0.0243	0.0456	0.0448	1.3546	1

MCKF ($\sigma=3$)	1.7686	1.5331	1.0325	0.0874	0.0846	0.0247	0.0482	0.0473	1.3913	2.818
MCKF ($\sigma=5$)	1.7681	1.5291	1.0230	0.0874	0.0846	0.0247	0.0482	0.0472	1.3902	2.4211
MCKF ($\sigma=7$)	1.7646	1.5260	1.0167	0.0872	0.0845	0.0246	0.0477	0.0468	1.3831	2.236
MCKF ($\sigma=17$)	1.7612	1.5256	1.0158	0.0870	0.0845	0.0246	0.0472	0.0464	1.3756	2.013
MCKF ($\sigma=30$)	1.7533	1.5267	1.0152	0.0865	0.0845	0.0245	0.0458	0.0450	1.3549	2.000

4.3 重尾非高斯噪声环境下的实验分析

假设测量值受到重尾高斯噪声的干扰,且该重尾非高斯噪声满足分布^[24-26]:

$$V_k \sim \begin{cases} N(0, R_T) & 90\% \\ \chi^2(0, 100R_T) & 10\% \end{cases} \quad (48)$$

其中: χ^2 代表卡方分布。

同样,基于 4.1 节设置的实验条件,进行了另外一组实验,迭代停止条件依然采用式(44)。图 5~图 7 给出了基于 UKF 算法及 MCKUF ($\sigma=3$) 算法的导航误差对比曲线,可以看出基于 MCKUF 的各导航参数误差明显小于基于 UKF 的对应导航参数误差,为此在重尾非高斯噪声干扰下, MCKUF ($\sigma=3$) 滤波性能优于 UKF。

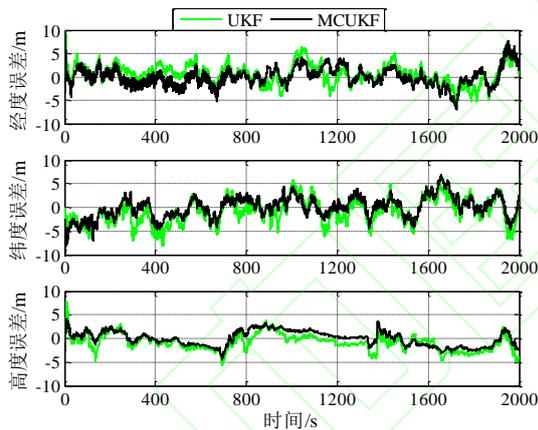


图 5 重尾非高斯噪声干扰下位置误差曲线对比图
Fig. 5 Position error curve comparison diagram under heavy tail non-Gaussian noise interference

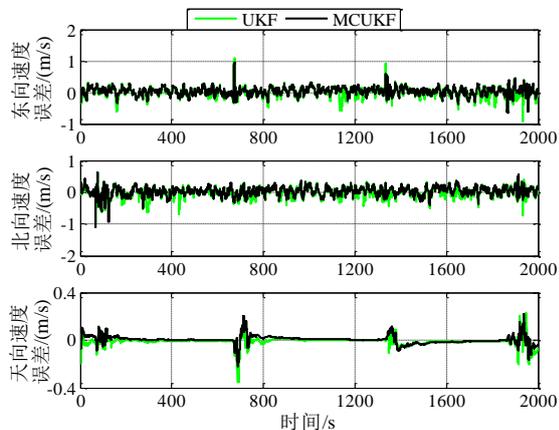


图 6 重尾非高斯噪声干扰下速度误差曲线对比图
Fig. 6 Speed error curve comparison diagram under heavy

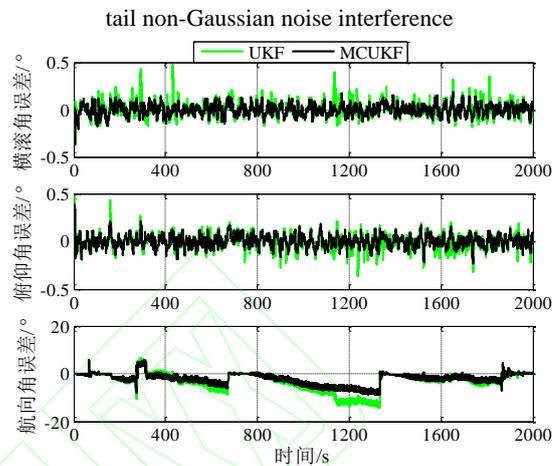


图 7 重尾非高斯噪声干扰下姿态误差曲线对比图
Fig. 7 Attitude error curve comparison diagram under heavy tail non-Gaussian noise interference

目前,基于自适应特性的卡尔曼滤波器^[24,25](AKF)对于非高斯噪声也具有鲁棒性,为了对比 AKF 与 MCKUF 的滤波性能,图 8~图 9 给出基于 AKF 算法及 MCKUF ($\sigma=3$) 算法的部分导航误差对比曲线。

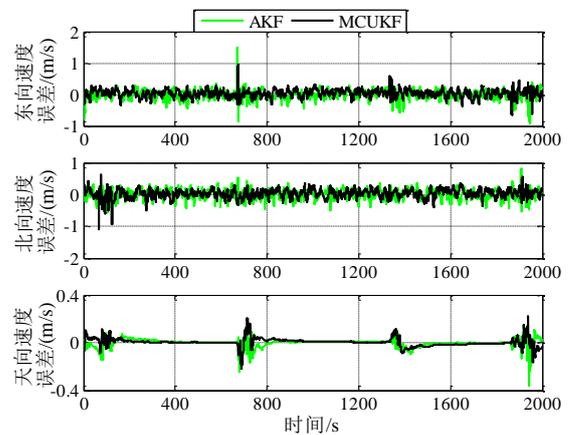


图 8 重尾非高斯噪声下基于 AKF 和 MCKUF 的速度误差曲线对比图

Fig. 8 Velocity error curve comparison diagram based on AKF an MCKUF under heavy tail non-Gaussian noise

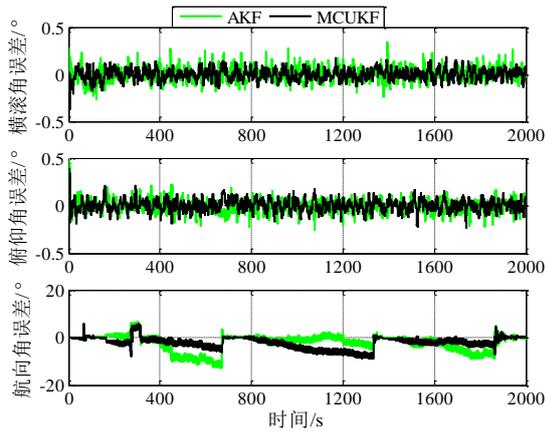


图9 重尾非高斯噪声下基于 AKF 和 MCKUF 的姿态误差曲线对比图

Fig. 9 Attitude error curve comparison diagram based on AKF an MCKUF under heavy tail non-Gaussian noise

为了定量地分析 AKF、UKF 及 MCKUF 的滤波精度，表 3 给出了在重尾非高斯噪声干扰下，各导航参数误差的 RMS 统计分析。可以看出，当核带宽过大时，MCKUF 的滤波性能不好，实验过程中发现当 $\sigma < 2$ 时滤波过程产生数据溢出进而产生滤波异常。然而，当 $\sigma = 3$ 时的 MCKUF 优于所有的滤波器、可以实现最小的 MSE，为了获得较高的滤波精度应选择相对较小的核带宽；相对于 UKF，MCKUF ($\sigma = 5$) 可提高位置精度 13.4%、提高速度精度 10.3%；相对于 AKF，MCKUF ($\sigma = 5$) 可提高位置精度 8.8%、提高速度精度 7.5%；即：在重尾非高斯噪声下，AKF 的滤波性能优于 UKF，而 MCKUF 的滤波性能优于 AKF。同样，核带宽越大 MCKUF 收敛速度越快；一般情况下，MCKUF 的不动点迭代算法仅需几次迭代即可收敛到最优解。

由于 MCKUF 涉及到循环迭代处理过程，所以为了考察其实时性，在 Intel Core i3-1125G4 (2.0GHz/L3 8M) 处理器环境下对 MCKUF 的每次滤波所耗时间进行了记录，其变化曲线如图 10 所示。根据表 1 所示，本实验的滤波周期为 1s，即共有 2000 次滤波。通过图 10 可以看出最大滤波耗时为 5×10^{-3} s，远远小于 IMU 的计算周期 0.02s。故

MCKUF 完全可以保证系统的实时性。

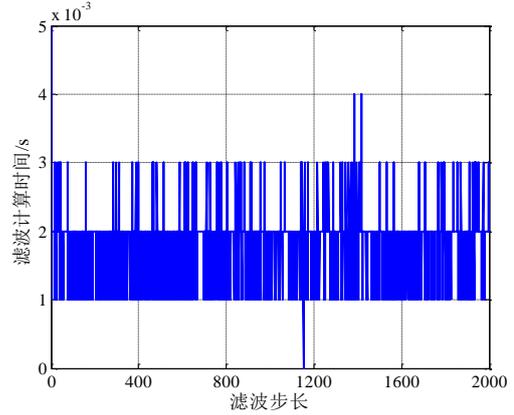


图 10 MCKUF 滤波计算耗时变化曲线

Fig. 10 MCKUF filter calculation time change curve

5 结论

在高斯模型下 GNSS/SINS 非线性组合导航系统的 UKF 算法基于 MMSE 准则是最优的，当测量系统受到重尾非高斯噪声干扰时系统性能下降。为了解决该问题，利用无迹变换获得状态及其协方差矩阵的先验估计，基于最大熵准则及统计线性回归模型获得状态及其协方差矩阵的后验估计，进而提出了非线性组合导航系统的最大熵 UKF(MCKUF) 算法。

仿真实验结果表明，在高斯噪声干扰下，UKF 滤波性能优于 MCKUF；在重尾非高斯噪声干扰下，MCKUF 滤波性能优于 UKF。通常 MCKUF 不动点迭代算法仅需要很少的迭代次数即可收敛到最优状态，较小的核带宽使得 MCKUF 的鲁棒性更强（相对于重尾非高斯噪声干扰）、但过小的核带宽可能导致滤波发散，而核带宽趋于无穷大时 MCKUF 等价于 UKF。为此，下一步的研究方向为具有自适应带宽的 MCKUF 算法。

表 3 测量噪声为重尾非高斯噪声时 UKF 和 MCKUF ($\epsilon = 10^{-9}$) 滤波精度对比

滤波器	位置误差 RMS/(m)			速度误差 RMS/(m/s)			姿态误差 RMS/(°)			平均迭代次数
	经度方向	纬度方向	高度方向	东向速度方向	北向速度方向	天向速度方向	横滚角方向	俯仰角方向	航向角方向	
UKF	2.1520	2.6643	1.7259	0.1450	0.1504	0.0350	0.0820	0.0788	3.9190	1
AKF	2.166	2.405	1.654	0.138	0.148	0.035	0.0763	0.0752	3.562	1

MCKF ($\sigma=3$)	1.9628	2.2901	1.5660	0.1186	0.1298	0.0328	0.0578	0.0619	2.5216	2.956
MCKF ($\sigma=5$)	1.9323	2.2072	1.5560	0.1279	0.1363	0.0340	0.0657	0.0692	2.8457	2.881
MCKF ($\sigma=7$)	1.9616	2.1756	1.5146	0.1340	0.1406	0.0341	0.0706	0.0723	3.1973	2.621
MCKF ($\sigma=9$)	1.9976	2.1740	1.4851	0.1378	0.1434	0.0342	0.0733	0.0744	3.4297	2.457
MCKF ($\sigma=15$)	2.0625	2.1961	1.4485	0.1423	0.1476	0.0347	0.0772	0.0770	3.7231	2.222
MCKF ($\sigma=30$)	2.1021	2.2131	1.4885	0.1444	0.1497	0.0349	0.0793	0.0783	3.8676	2.056

参考文献

- [1] Lin Xueyuan, Yao Libo, Sun Weiwei, et al. Integrated Navigation System's State Estimation and Application based on Multi-Scale[M]. *Science Press*, 2020.11. (林雪原, 姚力波, 孙炜玮, 等. 基于多尺度的组合导航系统状态估计及应用[M]. 科学出版社, 2020.11.)
- [2] Qin Yongyuan, Zhang Hongyue, Wang Shuhua. Kalman filter and integrated navigation principle[M]. *Xi'an: Northwest University of Technology Press*, 2012. (秦永元, 张洪钺, 王淑华. 卡尔曼滤波与组合导航原理[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2012.)
- [3] Ding Guoqiang, Ma Junxia, Xiong Ming, et al. The SINS' SRC-KF Attitude Estimation Modeling Algorithm[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2016, 41(3): 367-372. (丁国强, 马军霞, 熊明, 等. SINS 的 SRC-KF 姿态估计算法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2016, 41(3): 367-372.)
- [4] Zhang Xiaohong, Tao Xianlu, Wang Yingzhe, et al. MEMS-Enhanced Smartphone GNSS High-Precision Positioning for Vehicular Navigation in Urban Conditions[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2022, 47(10): 1740-1749. (张小红, 陶贤露, 王颖喆, 等. 城市场景智能手机 GNSS/MEMS 融合车载高精度定位[J]. 武汉大学学报信息科学版, 2022, 47(10): 1740-1749.)
- [5] Julier S, Uhlmann J, Durrant-Whyte H F. A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators[J]. *IEEE Transactions on automatic control*, 2000, 45(3): 477-482.
- [6] Li Rongbing, Liu Jianye, Lai Jizhou, et al. Sigma-Point direct Kalman filtering algorithm for inertialintegrated navigation system[J]. *Control and Decision*, 2009, 24(7): 1018-1022. (李荣冰, 刘建业, 赖际舟, 等. Sigma-Point 直接式卡尔曼滤波惯性组合导航算法[J]. 控制与决策, 2009, 24(7): 1018-1022)
- [7] Wu Xiaohang. Fitering and Information Fusion Algorithm Under Non-ideal Conditions for Nonlinear Systems[D]. *Harbin Institute of Technology*, 2019.6. (吴晓航. 非理想情况下非线性系统的滤波及信息融合算法[D]. 哈尔滨工业大学, 2019.6.)
- [8] Huang Y, Zhang Y, Li N, et al. A Robust Gaussian Approximate Fixed-Interval Smoother for Nonlinear Systems with Heavy-Tailed Process and Measurement Noises[J]. *IEEE Signal Processing Letters*. 2016, 23(4): 468-472.
- [9] Huang Y L, Zhang Y G, Wu Z M, et al. Robust Gaussian Approximate Filter and Smoother with Colored Heavy Tailed Measurement Noise[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2017, 43(1): 114-131.
- [10] Lim C P, Volakis J L, Sertel K, et al. Indoor Propagation Models Based on Rigorous Methods for Site-Specific Multipath Environments[J]. *IEEE Transactions on Antennas Propagation*, 2006, 54(6): 1718-1725.
- [11] Chen Badong, Xing Lei, Zhao Haiquan, et al. Generalized correntropy for robust adaptive filtering[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64(13): 3376-3387.
- [12] Wang Ying, Pan Chunhong, Xiang Shiming, et al. Robust hyperspectral unmixing with correntropy-based metric[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2015, 24(11):4027-404
- [13] Shi Liming, Lin Yun. Convex combination of adaptive filters under the maximum correntropy criterion in impulsive interference[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2014, 21(11):1385-1388.
- [14] Chen Badong, Xing Lei, Liang Junli, et al. Steady-state mean-square error analysis for adaptive filtering under the maximum correntropy criterion[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2014, 21(7):880-884.
- [15] Xu Kaijun, Zhang Rong, Yang Yong, et al. Research on GPS/INS Integrated Navigation Fusion Algorithm Based on Maximum Correlation Entropy[J]. *Modern Computer*, 2022, 28(17): 52-56. (徐开俊, 张榕, 杨泳, 等. 基于最大相关熵的 GPS/INS 组合导航融合算法研究[J]. 现代计算机, 2022, 28(17): 52-56.)
- [16] Zhou Weichao. Integrated navigation method based on maximum joint entropy Kalman filter[J]. *Information Technology*, 2022, (9):78-83. (周伟超. 基于最大相关熵卡尔曼滤波的组合导航方法[J]. 信息技术, 2022, (9):78-83.)
- [17] Luo Kaixin, Wu Meiping, Fan Ying. Robust adaptive filtering based on maximum entropy method and its application[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2020, 42(3): 667-673. (罗凯鑫, 吴美平, 范颖. 基于最大熵方法的鲁棒自适应滤波及其应用[J]. 系统工程与电子技术, 2020, 42(3): 667-673.)
- [18] Hou Bowen, He Zhangming, Li Dong, et al. Maximum Correntropy Unscented Kalman Filter for Ballistic Missile Navigation System based on SINS/CNS Deeply

- Integrated Mode[J]. *Sensors*, 2018(18): 1724-1748.
- [19] Liu Xi, Qu Hua, Zhao Jihong, et al. Maximum Correntropy Unscented Kalman Filter for Spacecraft Relative State Estimation[J]. *Sensors*, 2016(16): 1530-1545.
- [20] Gao Bingbing, Gao Shesheng, Hu Gaoge, et al. Adaptive UKF based on Maximum Likelihood Principle and Receding Horizon Estimation[J]. *System Engineering and Electrics*, 2016, 38(9): 1629-1637. (高兵兵, 高社生, 胡高歌, 等. 基于极大似然准则与滚动时域估计的自适应 UKF 算法[J]. 系统工程与电子技术, 2016, 38(9): 1629-1637.)
- [21] Lin Xueyuan, Liu Lili, Dong Yunyun, et al. Improved Adaptive Filtering Algorithm for GNSS/SINS Integrated Navigation System[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2023, 48(1): 127-134. (林雪原, 刘丽丽, 董云云, 等. 改进的 GNSS/SINS 组合导航系统自适应滤波算法[J]. 武汉大学学报.信息科学版, 2023, 48(1): 127-134.)
- [22] Lin Xueyuan, Wang Ping, Xu Jialong, et al. An Optimal Fusion Algorithm for GNSS/CNS/SINS Integrated Navigation based on Sequential UKF[J]. *Journal of Geodesy and Geodynamics*, 2022, 42(12): 1211-1215. (林雪原, 王萍, 许家龙, 等. 基于序贯 UKF 的 GNSS/CNS/SINS 组合导航最优融合算法[J]. 大地测量与地球动力学, 2022, 42(12): 1211-1215.)
- [23] Zhu Luing, Sun Weiwei, Liu Chengming, et al. Research on federal UKF algorithm for multi-sensor integrated navigation system[J]. *Journal of Electronic Measurement and Instrumentation*, 2022, 36(7): 91-98. (朱璐璐, 孙炜炜, 刘成铭, 等. 多传感器组合导航系统的联邦 UKF 算法研究[J]. 电子测量与仪器学报, 2022, 36(7): 91-98.)
- [24] Chen Badong, Liu Xi, Zhao Haiquan, et al. Maximum correntropy Kalman filter [J]. *Automatica*, 2017, 76: 70-77.
- [25] Chen Badong, Wang Jianji, Zhao Haiquan, et al. Convergence of a Fixed-Point Algorithm under Maximum Correntropy Criterion[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2015, 22(10): 1723-1727.
- [26] YANG Y, SONG L, XU T. Robust Estimator for Correlated Observations based on Bifactor Equivalent Weights[J]. *Journal of Geodesy*, 2002(76): 353-358.

网络首发:

标题: GNSS/SINS 组合导航系统的非线性最大熵 UKF 算法

作者: 林雪原, 孙炜炜

收稿日期: 2024-09-15

DOI:10.13203/j.whugis20240045

引用格式:

林雪原, 孙炜炜. GNSS/SINS 组合导航系统的非线性最大熵 UKF 算法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2024, DOI: 10.13203/j.whugis20240045 (LIN Xueyuan, SUN Weiwei. Nonlinear Maximum Correntropy UKF Algorithm for GNSS/SINS Integrated Navigation System[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2024, DOI: 10.13203/j.whugis20240045)

网络首发文章内容和格式与正式出版会有细微差别, 请以正式出版文件为准!

您感兴趣的其他相关论文:

不变 RTS 平滑算法及其在 5G/SINS 组合导航中的应用研究

罗亚荣, 郭文飞, 齐书峰, 郭迟

武汉大学学报(信息科学版), 2024, 49(5): 747-755.

<http://ch.whu.edu.cn/article/doi/10.13203/j.whugis20210587>

MGEX 差分码偏差产品对 BDS-3 伪距单点定位的影响研究

胡倬铭, 袁海军, 何秀凤, 章浙涛, 王进

武汉大学学报(信息科学版), 2024, 49(5): 756-764.

<http://ch.whu.edu.cn/article/doi/10.13203/j.whugis20210454>

多系统单频紧组合 GNSS-R 测高方法

邓垦, 周佩元, 杜兰, 蔡巍

武汉大学学报(信息科学版), 2024, 49(1): 146-155.

<http://ch.whu.edu.cn/article/doi/10.13203/j.whugis20220785>