

引文格式:苏勇,李建成,徐新禹,等.重力卫星数据反演地表质量变化的点质量模型法研究进展[J].武汉大学学报(信息科学版),2024,49(9):1503-1516.DOI:10.13203/j.whugis20230294



Citation:SU Yong,LI Jiancheng,XU Xinyu,et al.Progress in Point-Mass Modeling Approach for Surface Mass Distribution Derived from Gravity Satellite Data[J].Geomatics and Information Science of Wuhan University,2024,49(9):1503-1516.DOI:10.13203/j.whugis20230294

重力卫星数据反演地表质量变化的点质量模型法研究进展

苏勇^{1,2,3,4} 李建成^{3,5,6} 徐新禹^{1,3,6} 王长青⁴ 余彪⁷
李琼² 谷延超²

1 武汉大学测绘学院,湖北 武汉,430079

2 西南石油大学土木工程与测绘学院,四川 成都,610500

3 湖北珞珈实验室,湖北 武汉,430079

4 中国科学院精密测量科学与技术创新研究院大地测量与地球动力学国家重点实验室,湖北 武汉,430071

5 中南大学地球科学与信息物理学院,湖南 长沙,410083

6 武汉大学地球空间环境与大地测量教育部重点实验室,湖北 武汉,430079

7 西南交通大学地球科学与环境工程学院,四川 成都,611756

摘要:利用多代重力卫星观测数据监测全球质量变化,使人类对全球物质迁移和环境变化有了更加深刻的认识 and 理解。由于卫星星载仪器精度和分辨率的限制以及建模误差等多种因素的影响,利用重力卫星数据解算的全球质量变化模型受到条带误差的影响,广泛采用的滤波平滑手段虽然可以对其削弱,但同时会引起更严重的信号泄漏问题。为了克服这些问题,并进一步提高重力卫星数据解算地表质量变化模型的时空分辨率和精度,许多学者基于牛顿万有引力定律发展了点质量模型法,该类方法直接建立地表质量变化参数与卫星受摄运动的关系,并采用约束矩阵处理条带误差和向下延拓产生的不适当问题。综述了点质量模型法的研究进展,详细梳理了不同点质量模型法的基本理论和方法,分析了不同约束矩阵的构建策略和特点,简要总结了点质量模型法的后处理方法,以期能为点质量模型法的后续发展和研究提供参考。

关键词:卫星重力测量;全球地表质量变化;时变重力场;点质量模型法

中图分类号:P223

文献标识码:A

收稿日期:2023-11-21

DOI:10.13203/j.whugis20230294

文章编号:1671-8860(2024)09-1503-14

Progress in Point-Mass Modeling Approach for Surface Mass Distribution Derived from Gravity Satellite Data

SU Yong^{1,2,3,4} LI Jiancheng^{3,5,6} XU Xinyu^{1,3,6} WANG Changqing⁴ YU Biao⁷
LI Qiong² GU Yanchao²

1 School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan 430079, China

2 School of Civil Engineering and Geomatics, Southwest Petroleum University, Chengdu 610500, China

3 Hubei LuoJia Laboratory, Wuhan 430079, China

4 State Key Laboratory of Geodesy and Earth's Dynamics, Innovation Academy for Precision Measurement Science and Technology, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China

5 School of Geosciences and Info-Physics, Central South University, Changsha 410083, China

6 Key Laboratory of Geospace Environment and Geodesy, Ministry of Education, Wuhan University, Wuhan 430079, China

7 Faculty of Geosciences and Environmental Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China

Abstract: The successful implementation of multi-generation gravity satellite missions has made signifi-

基金项目:国家自然科学基金(42374004, 42192533, 42074019, 42304097);湖北珞珈实验室开放基金(220100045);四川省自然科学基金(2022NSFSC1047, 2022NSFSC1113);大地测量与地球动力学国家重点实验室开放基金(SKLGED2022-1-1)。

第一作者:苏勇,博士,副教授,主要从事卫星重力测量和全球质量变化监测方面的研究。suyongme@foxmail.com

cant progress in using gravity satellite observation data to monitor global mass changes. This has improved our understanding of large-scale material migration, global environmental changes in the Earth system, and facilitated research on critical environmental issues such as global sea level change monitoring, glacier melting, and groundwater extraction. Limitations in the accuracy and resolution of satellite instruments, along with factors such as modeling errors, result in global mass changes calculated using gravity satellite data being affected by noise patterns in the form of south-north stripes and signal leakage. While commonly used filtering and smoothing methods effectively mitigate the impact of south-north stripes noise, they exacerbate signal leakage problems. To address these issues and enhance the spatiotemporal resolution and accuracy of surface mass changes in the calculation of gravity satellite data, numerous scholars have developed a point-mass modeling approach based on Newton's law of universal gravitation. These methods establish a direct relationship between surface mass changes and perturbed motion of satellites, employing constraint matrices to tackle strip errors and ill-posed problems arising from downward continuation. This article examines the research progress of the point-mass modeling approach, provides a comprehensive overview of the fundamental theories and various methods employed, analyzes different strategies and characteristics of constraint matrices, and provides a concise summary of the post-processing methods associated with this approach. The comprehensive analysis presented in this article is intended to serve as a valuable reference for the future development and research of the point-mass modeling approach.

Key words: satellite gravimetry; global surface mass change; temporal gravity field; point-mass modeling approach

地表物质迁移和质量的重新分布是地球系统运行的客观现象,冰川消融、海平面变化、干旱和洪涝、地震和火山喷发等全球性的资源和环境变化问题都与其密切相关,开展全球地表质量变化监测的研究具有重要的现实意义。地表物质的迁移和质量重新分布直观反映为地球重力场的变化,卫星重力测量技术具有全球覆盖、长周期重复观测、全球范围精度一致性高、不受天气变化和天气因素的影响。基于卫星重力测量数据解算的高精度高分辨率的全球重力场模型使探测全球地表物质的时空变化特征成为可能,为地球科学解决人类社会面临的资源和环境问题提供了技术手段和数据支撑。因此,开展卫星重力测量技术的研究并将其应用于全球地表质量变化监测对地球科学和空间科学研究、自然灾害和环境变化等人类可持续发展面临的问题都具有重要意义^[1-2]。

为了持续、高精度、高分辨率地探测全球重力场及其变化,卫星重力测量技术受到极大关注并已成功实施了多代任务。21世纪以来,全球相继实施了挑战性小卫星载荷任务(challenging minisatellite payload, CHAMP)、重力场恢复与气候实验卫星任务(gravity recovery and climate experiment, GRACE)、地球重力场和稳态海洋环流探测任务(gravity field and steady-state ocean circulation explorer, GOCE)以及 GRACE 后续任务

(GRACE follow-on, GRACE-FO)等4代重力卫星任务和其他一些尚未公开发布数据的重力卫星任务^[3-4]。同时,还有一些可以实施地球重力场探测的非专用重力卫星任务,如 Swarm 和天琴一号,这些卫星均搭载了加速度计、星象仪、GNSS 接收机等与重力场测量相关的关键载荷^[5-6]。重力卫星任务的不断实施对提高人类认识地球重力场及其精细结构的时空变化起到了巨大推动作用,促进了地球科学的持续繁荣发展,为人类监测地球大尺度质量变化提供了丰富的数据支撑。

重力卫星观测数据需要采用合适的精化处理手段和建模方法才能得到满足信噪比要求的全球重力场模型或质量变化。目前,利用重力卫星数据监测全球质量变化的主要建模方法有球谐函数法、Mascon法和点质量模型法。球谐函数法是将重力场模型及其泛函表达为一组截断至一定阶次的斯托克斯系数(即球谐位系数)的集合,利用重力卫星的观测数据解算出这些斯托克斯系数即可得到一段时间的平均重力场,从利用某时间段的观测数据解算重力场模型位系数的角度而言,所谓的静态和时变都是指该时间段的重力场及其泛函的平均值。主流的时变重力场均采用球谐位系数的形式表示,如 CSR(Center of Space Research)、JPL(Jet Propulsion Laboratory)、GFZ(German Research Centre for Geo-

sciences)等 GRACE 官方机构和 ITSG、CNES、Tongji、HUST、WHU、SWPU、SWJTU、IGG 等研究机构发布的系列模型。扣除参考或平均重力场得到时变重力场位系数的变化量,即可计算全球质量变化;采用球谐位系数形式的时变重力场模型进行全球质量变化分析具有简单高效的特点。由于重力卫星对部分波长的重力场信号不敏感,位系数之间存在相关性且高阶位系数的信噪比较低,空域时变信号呈现南北条带噪声,需要对时变重力场模型进行后处理才能有效获得地表质量变化信号。研究人员发展了一系列的位系数改正、去相关算法和滤波平滑算法^[7-9],这些后处理算法在平滑条带噪声的同时会引起信号泄漏和信号衰减的问题^[10],为了解决这些衍生出来的问题,学者们发展了尺度因子法和 Forward-Modeling 法进行信号矫正处理^[11-14]。得益于大量学者卓有成效的工作,球谐位系数形式的时变重力场模型在建模理论和地学研究应用中发展迅速,推动了重力卫星监测全球质量变化的发展。随着利用时变重力场模型监测全球质量变化向小区域和弱信号区域的发展,球谐位系数模型的缺陷逐渐显现,主要体现在:(1)参与月时变重力场模型解算的重力卫星观测数据质量和量的限制,反演的球谐位系数高阶项信噪比迅速下降,只能截断至某一最大阶次,导致难以进

$$\Delta\sigma_i = 10\Delta h_i = \frac{R\rho_{\text{ave}}}{3} \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{1+k_n} \sum_{m=0}^n (\Delta\bar{C}_{i, nm} \cos(m\lambda) + \Delta\bar{S}_{i, nm} \sin(m\lambda)) \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (1)$$

式中, $\Delta\sigma_i$ 表示单位面积地表区域 i 的质量变化量,单位为 kg/m^2 ; Δh_i 为 $\Delta\sigma_i$ 对应的以 cm 为单位的等效水高 (equivalent water height, EWH), 比例因子 10 的含义为 1 cm 等效水高变化等效于 1 m^2 区域内质量变化 10 kg ; ρ_{ave} 表示地球平均密度; R 表示地球平均半径; k_n 表示 n 阶负荷 Love 数; n 和 m 分别表示球谐位系数的阶和次; N 表示球谐位系数

$$\begin{cases} \Delta\bar{C}_{nm} = \sum_{i=1}^k \Delta\bar{C}_{i, nm} = \sum_{j=1}^k \Delta h_j \left[\frac{10(1+k_n)R^2}{(2n+1)M} \right] \int \bar{P}_{nm}(\sin\theta) \cos(m\lambda) d\Omega \\ \Delta\bar{S}_{nm} = \sum_{i=1}^k \Delta\bar{S}_{i, nm} = \sum_{j=1}^k \Delta h_j \left[\frac{10(1+k_n)R^2}{(2n+1)M} \right] \int \bar{P}_{nm}(\sin\theta) \sin(m\lambda) d\Omega \end{cases} \quad (2)$$

式中, Ω 表示地表区域 i 对应的积分区域,且 $d\Omega = \cos\theta d\theta d\lambda$; M 表示地球的质量。此时,可建立地表质量变化与球谐位系数的关系,通过最小二乘法求解。由于观测数据存在误差,且按式(2)求解地表质量变化是一个向下延拓的不适定问题,需要采用合适的约束条件才能获得稳定解。当采用高精度星间测距或星间距离变率数据直接

进一步提升信号的时空分辨率,且存在截断误差;(2)后处理算法缺乏实际的物理意义,且无法完全处理条带噪声和泄漏问题,如去相关滤波会引起小区域信号失真,泄漏误差改正依赖于研究区域的形状和大小^[11],尺度因子的确定依赖外部参考信息等^[14-15]; (3)精确评估地表质量变化的误差较为困难,不同地球物理信号较难分离等问题^[16]。

针对球谐位系数时变重力场模型存在的缺陷,国内外学者进一步发展了 Mascon 法。Mascon 法最早用于研究月球重力场建模中月表“质量瘤”的处理^[17-18], GRACE 任务实施以来,文献^[19-20]采用该方法并基于 GRACE 星间观测数据计算全球地表质量变化,并认为采用该方法可以探测空间分辨率小于 400 km 、时间分辨率为 10 d 左右的全球地表质量变化。从构建卫星观测数据和地表质量变化参数之间关系的实现形式而言, Mascon 法有球冠积分形式^[21]、单层位积分形式^[22-23]、球谐位系数谱域积分形式^[19-20, 24-25]以及点质量模型法^[26-36],这些方法都是基于牛顿万有引力的基本原理来构建观测方程。

地球质量变化可以用地球重力场模型球谐位系数的变化来表示,地表区域内的质量变化与球谐位系数变化的关系为^[19, 37]:

的最高阶次; θ 和 λ 分别表示地表质量块的余纬和经度; $\Delta\bar{C}_{i, nm}$ 、 $\Delta\bar{S}_{i, nm}$ 为单位面积地表区域 i 的球谐位系数变化; $\bar{P}_{nm}(\cos\theta)$ 表示完全正常化的缔合 Legendre 函数。

设地表区域的个数为 K , 则地表质量变化引起的球谐位系数总的变化量 $\Delta\bar{C}_{nm}$ 、 $\Delta\bar{S}_{nm}$ 可以利用式(1)进行球谐分析:

计算地表质量变化时,可以通过偏微分的链式法则建立关系式,设星间距离变率为 $\dot{\rho}$, 它与地表质量变化之间的关系为^[38]:

$$\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \Delta h_i} = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \left(\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \bar{C}_{nm}} \frac{\partial \Delta\bar{C}_{i, nm}}{\partial \Delta h_i} + \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \bar{S}_{nm}} \frac{\partial \Delta\bar{S}_{i, nm}}{\partial \Delta h_i} \right) \quad (3)$$

许多学者对 Mascon 法进行了深入研究,提出了各种 Mascon 法的具体实现形式,并发布了

模型供研究人员开展应用研究^[22-23, 25, 38-44]。相对于整个地球表面而言,可以用一个“点”来代表地表一个小区域,假设地面质量变化点为一个无“厚度”、点的质量代表该点对应区域内的整体质量,根据牛顿万有引力定律可以直接建立地表质量变化与卫星受摄运动之间的关系,并发展出了多种形式的点质量模型法。与传统 Mascon 相比,该类方法在理论模型方面更加直观,但也需要进行约束求解。对重力卫星观测数据的分析、解释和应用是目前卫星重力测量领域的重点和热点,相关领域发展迅速且文献众多,本文对目前利用重力卫星数据监测全球质量变化的主要方法进行了简单回顾,重点对点质量模型法进行总结分析,梳理了几类点质量模型法的基本原理、理论模型和求解方法,分析并展望去噪约束模型的构建方法和改进方向,对点质量模型法现阶段面临的问题进行了讨论总结。

1 点质量模型法

点质量模型法的基本原理是:卫星在空间进行自由落体运行时刻受到地球重力场的制约和影响,地表质量的重新分布会引起地球重力场的变化,会对卫星的受摄运动产生影响,可通过星载仪器(如 GNSS 接收机、加速度计、星间测距系统)进行观测。根据牛顿万有引力定律,质量的变化会引起加速度或引力位的变化,通过卫星观测数据获得卫星受到的摄动加速度或摄动位,扣除非地表质量变化因素的影响后,即可建立利用重力卫星观测数据解算地表质量变化的点质量模型法。根据卫星观测数据和地表质量变化之间联系量的区别,点质量模型法目前已发展出引力位点质量模型法^[26-28, 34, 36]、径向加速度点质量模型法^[29-30, 33, 35]和三维加速度点质量模型法^[31-32]。研究显示,点质量模型法能有效反演质量变化且比球谐位系数模型具有更高的空间分辨率和信号强度^[45-50]。

1.1 引力位点质量模型法

地表质量的变化会引起空间引力位的变化,根据牛顿万有引力定律,质量变化和引力位变化量之间的关系为^[26-29, 51]:

$$\delta g_r = -\frac{GM}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \Delta \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda)) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \quad (6)$$

式中, $\Delta \bar{C}_{nm}$ 、 $\Delta \bar{S}_{nm}$ 分别表示完全规格化的 cosine 和 sine 位系数的长期变化量,该变化量可以通过对各月时变重力场模型的位系数相对于长期静

$$\delta V(\theta, \lambda, r_j) = G\rho \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{R^2}{l_{ij}} \delta h_i(\theta_i, \lambda_i, R) \sin \theta d\theta d\lambda \quad (4)$$

式中, G 表示万有引力常量; ρ 表示质量体的平均密度; δV 表示由于质量变化引起的引力位的变化量; δm 表示质量变化量; r 表示点的地心向径; l_{ij} 表示引力点和质量点之间的距离,其中 i 和 j 分别表示空间引力点和地面质量点。对于地表质量变化而言,假设全部等效为地表薄层内的水文变化,而空间点(卫星)受到总的引力位 V 可表示为:

$$V = V^{\text{others}} + V^{\text{hydrology}} + e \quad (5)$$

式中, V^{others} 、 $V^{\text{hydrology}}$ 、 e 分别表示除地表质量变化外可模型化的摄动位、地表质量变化和其他不能模型化因素引起的引力位。卫星受到的总引力位可以利用卫星观测数据并基于能量守恒法求解^[52-56],因此联立式(4)和式(5)即可得到利用重力卫星观测数据求解地表质量变化的观测方程。

1.2 径向加速度点质量模型法

径向加速度点质量模型法是直接建立卫星受到的径向引力加速度和地面点质量的线性关系,文献[29]对其进行了详细研究并用于定量分析格陵兰岛冰盖消融的长期变化量。径向加速度点质量模型如图1所示,其中, φ 、 λ 分别表示点的纬度和经度,空间点 P 和地面点 Q 之间的球面角距为 ψ_{ij} , r 表示空间点的地心向径。

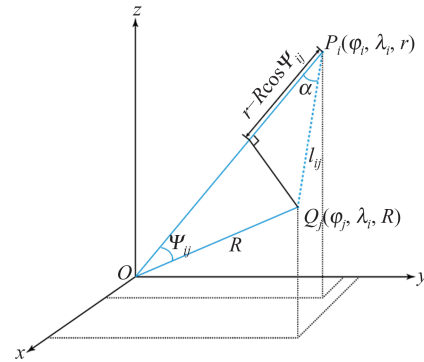


图1 径向加速度点质量模型法

Fig. 1 Radial Acceleration Point-Mass Modeling Approach

由于地表质量长期变化而引起的径向引力加速度变化 δg_r 可以表示为:

态或平均重力场模型位系数的变化量进行拟合得到。考虑到弹性地球的负荷响应,地表质量变化引起的引力加速度变化可以表示为^[29]:

$$\delta g_r^{\text{mass}} = -\frac{GM}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{1+k_n} \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \Delta \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda)) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \quad (7)$$

假设空间中存在 p 个引力加速度点 $\delta g_i (i=1, 2, \dots, p)$, 地面上有 q 个质量点为 $\delta m_j (j=1, 2, \dots, q)$ 。根据牛顿万有引力定律, 由于地面所有质量点的变化而引起空间某点的引力加速度变化可表示为:

$$\delta g_i = G \sum_{j=1}^q \frac{r_i - R \cos \psi_{ij}}{l_{ij}^3} \delta m_j \quad (8)$$

联立式(7)和式(8)即可得到径向引力加速度点质量模型法的观测方程^[29-30, 57-58]。

1.3 三维加速度点质量模型法

在空间直角坐标系中, 卫星受到的摄动加速度可以沿空间直角坐标系的 3 个坐标轴分解, 则因地表质量变化引起的卫星摄动加速度变化可以表达为沿坐标轴的 3 个加速度分量形式, 如图 2 所示。

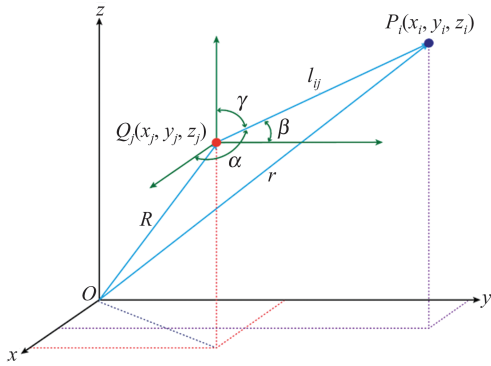


图 2 三维加速度点质量模型法
Fig. 2 3D Acceleration Point-Mass Modeling Approach

相对于整个地表质量变化而言, 可以将卫星视为单位质量体, 设空间中的单位质量点为 $P_i(x_i, y_i, z_i)$, 质量为 δm_j 的地面点为 $Q_j(x_j, y_j, z_j)$, α, β, γ 分别表示地面点 Q 与空间点 P 连线方向与空间直角坐标 3 个坐标轴方向的夹角。对于整个地球系统而言, 卫星在某点受到地表质量变化而引起的摄动位^[31]计算式为:

$$\delta V = G \int \frac{1}{l} dm \quad (9)$$

对引力位沿空间直角坐标系 3 个坐标轴方向求偏导数, 并积分离散化后可得空间任意一点 P_i

$$\begin{pmatrix} \delta \ddot{x}^r \\ \delta \ddot{y}^r \\ \delta \ddot{z}^r \end{pmatrix} = \frac{GM}{2r^2} \sum_{n=0}^N \left(\frac{R}{r}\right)^n \frac{1}{1+k_n} \sqrt{\frac{2n+1}{2n+3}} \sum_{m=0}^n \left\{ \Delta \bar{C}_{nm} \begin{pmatrix} C_{nm}^- - C_{nm}^+ \\ -S_{nm}^- - S_{nm}^+ \\ -2C_{nm}^0 \end{pmatrix} + \Delta \bar{S}_{nm} \begin{pmatrix} S_{nm}^- - S_{nm}^+ \\ C_{nm}^- + C_{nm}^+ \\ -2S_{nm}^0 \end{pmatrix} \right\} \quad (13)$$

式中, GM 表示地球引力常量; $C_{nm}^-, C_{nm}^0, C_{nm}^+$ 和

所受的总的摄动加速度为:

$$\begin{cases} \delta \ddot{r}_i^x = -G \sum_{j=1}^q \frac{x_i - x_j}{l_{ij}^3} \delta m_j \\ \delta \ddot{r}_i^y = -G \sum_{j=1}^q \frac{y_i - y_j}{l_{ij}^3} \delta m_j \\ \delta \ddot{r}_i^z = -G \sum_{j=1}^q \frac{z_i - z_j}{l_{ij}^3} \delta m_j \end{cases} \quad (10)$$

式中, 地面质量点 δm_j 的单位为 kg; 引力加速度的三分量 $\delta \ddot{r}_i^x, \delta \ddot{r}_i^y, \delta \ddot{r}_i^z$ 可采用卫星观测量计算。对于地面点 Q_j 而言, 通常已知其球面坐标 $(r_j, \theta_j, \lambda_j)$, 可转换为直角坐标。忽略实际地形起伏的影响, 假设地面质量点位于同一球面上, 因此对于任意地面质量点 r_j 均为常数, 可取其为地球平均半径。空间点(卫星)受到总的摄动加速度可表示为:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}^{\text{others}} + \delta \ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{e} \quad (11)$$

式中, $\ddot{\mathbf{r}}^{\text{others}}, \delta \ddot{\mathbf{r}}, \mathbf{e}$ 分别表示除地表质量变化以外的其他可模型化摄动力、地表质量变化和其他无法模型化因素引起的残余摄动加速度, 联立式(10)和式(11)即可建立三维加速度点质量模型法的观测方程。当直接采用卫星观测数据(如精密轨道、星间距离变率)解算地表质量变化时, 可利用动力学积分法、加速度法、短弧积分法和天体力学法等建立摄动加速度和观测量之间的关系, 再利用三维加速度点质量模型法求解地表质量变化。以动力学积分法为例, 卫星在某一历元受到的全球地表质量变化引起的摄动加速度对质量变化的偏导数可表示为:

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial m} = \begin{bmatrix} \frac{G}{l_1^3}(x-x_1) & \frac{G}{l_2^3}(x-x_2) & \dots & \frac{G}{l_q^3}(x-x_q) \\ \frac{G}{l_1^3}(y-y_1) & \frac{G}{l_2^3}(y-y_2) & \dots & \frac{G}{l_q^3}(y-y_q) \\ \frac{G}{l_1^3}(z-z_1) & \frac{G}{l_2^3}(z-z_2) & \dots & \frac{G}{l_q^3}(z-z_q) \end{bmatrix} \quad (12)$$

同时, 许多机构解算了系列时变重力场模型, 地表质量变化引起的摄动加速度可以直接采用时变重力场模型求解^[32]:

$S_{nm}^-, S_{nm}^0, S_{nm}^+$ 等系数的计算可以参见文献[59-60]。

对于3种点质量模型法而言,最大的区别在于地表质量变化对卫星的摄动影响是以何种形式表达的,其中引力位点质量模型法和三维加速度点质量模型法既可以采用重力卫星的原始观测数据直接解算,也可以采用时变重力场模型计算虚拟观测值(即卫星受到地表质量变化引起的摄动位或摄动加速度)。由于很难直接建立卫星观测数据和其所受径向加速度之间的关系,径向加速度点质量模型法只能采用时变重力场模型计算;当采用现有的时变重力场模型计算径向加速度伪观测值,再进行约束求解,则可认为径向加速度点质量模型法是对时变重力场模型的一种滤波后处理方法。由于重力卫星轨道设计原因和观测数据存在噪声等多种因素的影响,不论利用哪种点质量模型法求解地表质量变化时都需要采用约束模型对解算结果进行平滑去噪,合适的约束模型是点质量模型法解算地表质量变化的关键。

2 点质量模型法的求解

基于式(4)、式(8)、式(10)3种点质量模型法的基本原理,采用重力卫星观测数据或时变重力场模型计算地表质量变化时,利用高斯-马尔可夫模型可统一表达为误差方程的形式:

$$v = Ax - l \quad (14)$$

式中, A 表示设计矩阵; l 表示观测向量; x 表示未知参数向量; v 表示观测数据的改正向量。利用重力卫星数据解算地表质量变化本身是一个向下延拓的不适定问题,并且观测数据受噪声的影响,无法直接利用式(14)求解,引入正则化平衡项,构造最小二乘准则^[61-62]:

$$\|v\|_a^2 = \|Ax - l\|^2 + \alpha \|Mx\|^2 = \min \quad (15)$$

式中, α 表示正则化参数; M 为正则化或约束矩阵。求解可得未知参数的正则化解为:

$$\hat{x}_a = (A^T P A + \alpha M^T M)^{-1} A^T P l \quad (16)$$

为了获得最优解,需要确定最优正则化参数和约束矩阵。最优正则化参数的确定主要有广义交叉验证法、截断奇异值分解法、 L 曲线法和均方根误差最小准则等方法^[63-66]。约束矩阵的构建对最终结果的影响较为重要,约束矩阵会影响解算的地表质量变化信号的空间分布、信号泄漏误差的大小和条带噪声的强度,因此,求解点质量模型法的关键在于构建合适的正则化约束矩阵。目前的约束矩阵构建方法主要包括纯数学约束

条件、附加地理空间信息约束条件和地球物理信息先验约束条件^[31-32, 67-68]。

2.1 约束矩阵的构建

1) 纯数学约束条件

由于利用重力卫星数据解算地表质量变化是一个病态问题,约束矩阵可以直接采用处理病态问题的正则化矩阵,如采用零阶 Tikhonov 正则化方法,则有:

$$M = I \quad (17)$$

部分学者采用这种纯数学的约束条件解算点质量模型法,如构建一阶 Tikhonov 正则化矩阵求解 Greenland 区域的质量变化,取得了较好效果^[29, 31, 69-73]。这些研究表明,采用纯数学方法构建的约束矩阵求解的地表质量变化可以达到与采用高斯形式滤波后球谐位系数模型计算结果相当的效果。该类约束条件最大的优势在于构造形式简单,但仍然面临诸多挑战,如条带噪声的影响无法完全消除,信号在空间存在泄漏问题,约束矩阵不具有明确的物理意义等。

2) 附加地理空间信息约束条件

考虑到地理现象的空间相关性,邻近地表质量变化点之间存在空间相关约束,也就是说相邻地表点的质量变化会受到相互影响,距离越近的点影响越大、相关性越强,可采用空间约束方程构建正则化矩阵^[19, 26, 28, 33, 74-76]。

设 d_{ij} 表示地面两个质量点 i 和 j 之间的距离, D 表示地面质量点的相关距离,此时可以定义空间约束矩阵,当 $d_{ij} \leq D$ 时,有:

$$M_{ij} = \exp\left(1 - \frac{d_{ij}}{D}\right) \quad (18)$$

当 $d_{ij} > D$ 时, $M_{ij} = 0$ 。如果考虑到相邻时间的地表质量变化之间也存在相关性,可以构建时间-空间约束方程。设 t_{ij} 表示地表质量点在两个时间点 i 和 j 之间的时间间隔, T 表示地面质量点的相关时间间隔,则式(18)可拓展为:

$$M_{ij} = \exp\left(2 - \frac{d_{ij}}{D} - \frac{|t_{ij}|}{T}\right) \quad (19)$$

如果进一步考虑相邻地表质量点空间相关性与其空间距离的函数关系,则可构建不同形式的时空约束方程,如等权形式、线性形式、指数形式和高斯形式等^[32, 76]。研究表明,采用附加地理空间信息约束条件构建的约束矩阵求解的地表质量变化的效果整体上优于纯数学约束条件的结果,但仍然无法完全消除条带噪声的影响。

3) 地球物理信息先验约束条件

单纯采用纯数学方式或附加地理空间约束信息构建的约束矩阵主要起到了正则化的作用,进一步的研究表明,采用先验地球物理信息的方差-协方差构建约束矩阵可以得到更好的效果^[34,77-78],但协方差信息会给解算结果带来空域横向误差^[78]。因此,基于先验方差信息构建的约束矩阵可表达为^[35,78]:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_N \end{bmatrix} \quad (20)$$

式中, σ_i 表示第 i 个地表质量点的先验中误差。因此,获取合适的地表质量点的先验中误差信息成为关键,可采用基于陆地水文模型、卫星测高和海

底压力模型等多源数据的方差信息构建约束矩阵^[21]。全球质量变化的月平均均方根(root mean square, RMS)如图 3 所示,其中陆地质量变化 RMS 采用 2000—2023 年的 GLDAS(global land data assimilation system)的 NOAH 模型进行陆地水储量计算,海洋质量变化 RMS 采用 1992—2017 年的 ECCO(estimating circulation and climate of the ocean general model)海底压力模型计算。基于球谐位系数模型计算地表质量变化信号的方差信息构建约束矩阵^[78],采用 GRACE 计算的全球质量变化 RMS 如图 4 所示。由图 3 和图 4 可以看出,不同手段计算的地表质量变化先验信息在空间分布和信号强度上是不一样的,在实际应用分析时需要进行更详细和全面的测试和对比,以确定最优地表质量变化先验模型。

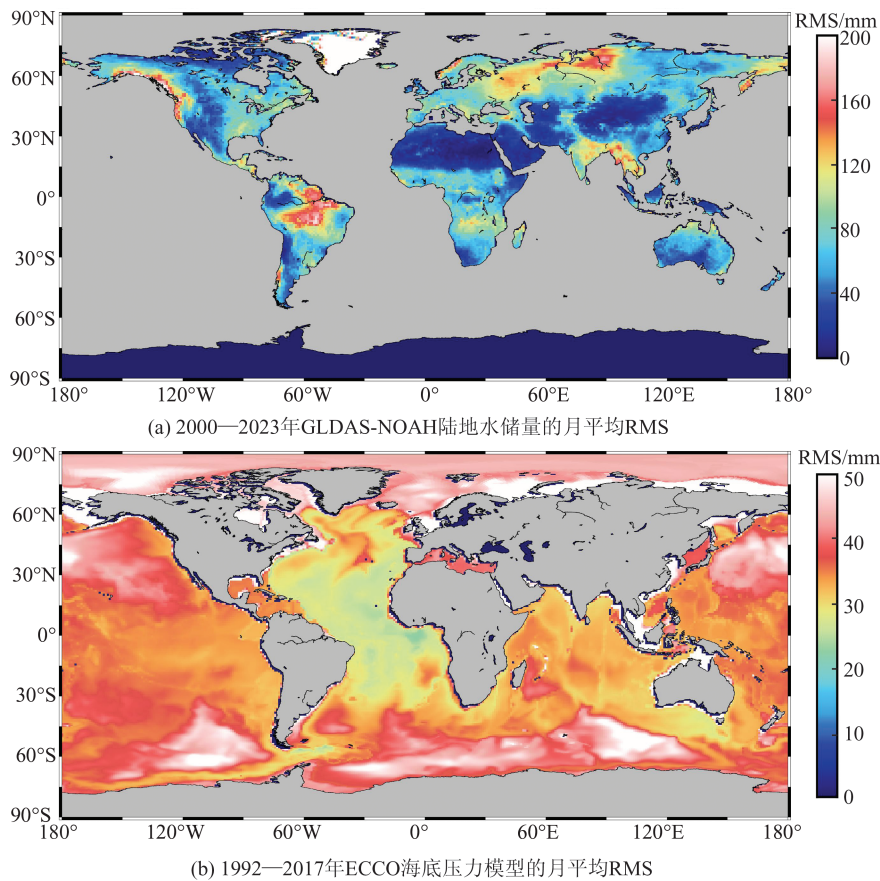


图 3 全球质量变化的月平均 RMS

Fig. 3 Monthly Mean RMS of Global Mass Change

同时附加陆海约束以减弱或消除信号泄漏的影响,通常的做法是认为海洋的质量变化较小,在陆海交界地方海洋质量的变化主要是陆地地区质量变化信号的泄漏,实际的处理方式主要有两种:一是先将跨越陆海边界的格网点拆分为陆地和海洋部分,然后进行地表质量变化计算,如 CSR 解算的 Mascon 模型(图 5);二是先按照划

分好的格网,在不考虑格网点跨越陆海边界的情况下进行求解,再对计算的结果进行处理,将格网点的海洋部分值校正至陆地部分,如 JPL 解算的 Mascon 模型(图 6)。总体而言,格网密度越大,附加陆海约束后的信号泄漏误差越小。

在实际应用时,不同机构采用的具体方法也存在差别,如 CSR 基于球谐位系数模型计算的全

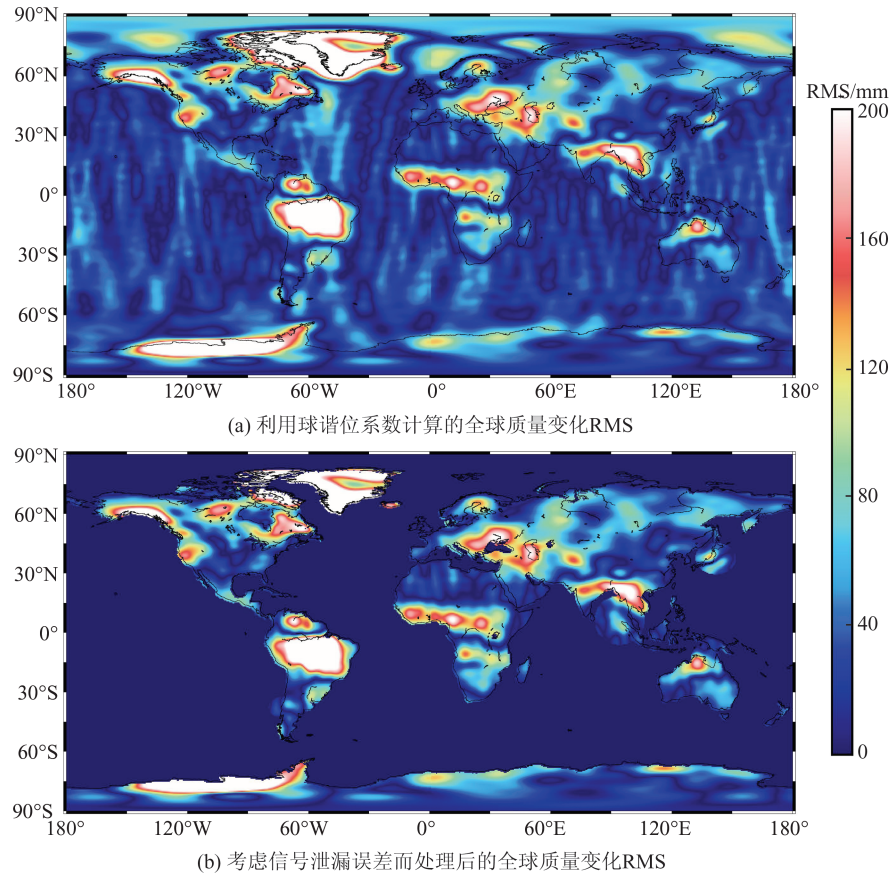


图4 利用GRACE计算的全球质量变化RMS

Fig. 4 Global Mass Change RMS Computed from GRACE Data

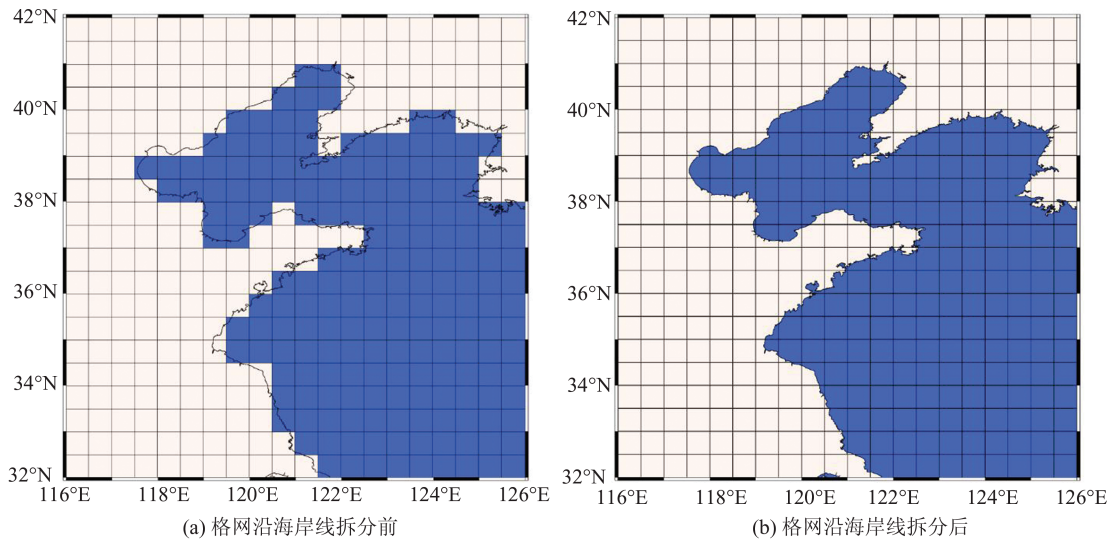


图5 陆海边界格网点分布

Fig. 5 Hexagonal Tiles Across Coastline

球地表质量变化RMS构建约束矩阵,JPL基于先验信息的白噪声构建约束矩阵,GSFC利用先验信息的自协方差矩阵建立约束矩阵。总体而言,基于地球物理信息先验约束条件解算的地表质量变化在去条带噪声和控制泄漏误差方面的效果优于其他形式的约束矩阵,但这类约束条件仍

存在一定缺陷,如先验信息的不确定性会影响解算结果的精度,先验信息与地表质量变化的时间历元的一致性等问题,因此还需要进一步研究先验模型的精化构建方法。

采用重力卫星观测数据以外的任何先验信息构建约束条件所解算的地表质量变化都会受

先验信息的影响,选择合适的先验信息受多种因素的影响,如先验信息本身的精度、现势性、分辨率等,地震形变和海洋质量变化等先验信息还取决于研究人员的研究取舍。因此,为了使计算结果不受外部地球物理先验信号的影响,可以仅采用重力卫星观测数据或其二级产品构建约束矩阵,以解算独立的高精度、高分辨率重力卫星地表质量变化结果。

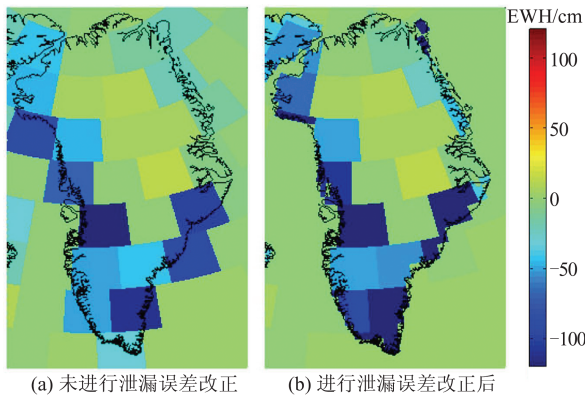


图 6 2011年4月格陵兰岛区域的等效水高形式的地表质量变化(改自文献[21])

Fig. 6 Greenland Mass Anomalies Expressed on a Grid for April 2011 in Equivalent Water Height (Modified from Reference [21])

2.2 地表质量变化点的划分

对于点质量模型而言,地表质量点格网的形式、分布和密度会对解算结果和后续分析产生影响,一方面,地表质量点的分辨率要与重力卫星的探测分辨率相适应,分辨率高会增加计算成本,分辨率低不利于地表质量变化分析;另一方面,地表质量点的形式要易于后续分析处理。球面格网的划分主要有等角格网(地理格网)、等面积格网、等距离格网、高斯格网、三角划分格网等^[79];对于点质量模型法而言,要求格网点尽量均匀分布,因此,等面积格网、等距离格网和三角划分格网是常用的格网类型^[20-21,24,78,80],如CSR采用单位球面外接正二十面体划分全球为40 962个格网点,每个格网平均面积约为12 400 km²,格网中心之间的平均距离约为120 km,沿着赤道大约有320个空间分辨率约1°的格网点(如图5所示)^[81];JPL采用3°×3°的等面积格网,全球共有4 551个圆盘型格网(如图6所示)^[77];GSFC则采用了1°×1°的等面积格网,全球共有41 168个正方形格网^[82]。

对于解算全球地表质量变化而言,均匀分布的格网点有助于全球大尺度的信号分析,但对于

某些感兴趣区域的分析,全球统一的格网分辨率不利于信号分析,因此,为了权衡计算效率和区域信号分析,可以采用变分辨率的全球格网点,即在全球尺度上采用某一合适分辨率的格网点,而对某些关注区域采用更高分辨率的格网点^[83-84]。

如果采用重力卫星观测数据单独解算某区域的地表质量变化,会产生边界效应,即区域边界格网点的信号变强失真。为了避免这种效应影响后续的信号分析,通常的做法是进行区域边界延扩,使边界效应影响的区域在感兴趣区域范围以外,后续分析数据时舍弃边界效应影响区域的数据;或者仅采用飞临局部区域上空的星间测距数据单独计算该区域的地表质量变化^[26, 85]。

2.3 点质量模型法解的后处理

由于重力卫星轨道和星载仪器设计因素的影响,重力卫星对某些重力场信号分量不敏感,球谐位系数模型或Mascon模型在实际应用时,通常采用其他手段的解算结果进行替换,点质量模型也采用同样的方式进行处理。采用一阶位系数进行地心改正^[86],C20项位系数采用卫星激光测距数据解算的结果替换^[87],同时,地表质量变化受到冰后回弹的影响,需要采用模型进行扣除^[21, 78, 82]。

对于点质量模型法而言,如果采用球谐位系数形式的时变重力场模型(即Level-2产品)计算的沿轨摄动位或加速度虚拟观测值计算地表质量变化,直接对球谐位系数的一阶和C20项改正;如果采用重力卫星的轨道或星间测距观测值(即Level-1B产品)计算地表质量变化,则可对点质量结果进行球谐分析后再替换。冰后回弹的改正一般直接采用模型值扣除即可。采用点质量模型法解算的地表质量变化进行应用分析时,需要结合实际需要进行更多后处理工作^[81]。

3 结 语

卫星重力测量是大地测量学中继GNSS之后具有革命性突破的技术,尤其是GRACE重力卫星计划实施以来,利用其所搭载的高精度GNSS接收机和微米级星间微波测距系统无接触地感应地球重力场的变化,不受大气对流层和电离层延迟的影响,成功用于监测全球范围内的质量变化,在大地测量学、水文学、冰川学和地震学等多学科领域取得了巨大的成功;充分挖掘重力卫星观测数据在地球系统质量迁移和环境变化

监测中的作用具有重要意义。

受重力卫星仪器精度和分辨率的限制、反演建模算法不完善以及地球物理背景模型时空分辨率和精度限制等多种因素的影响,持续提升利用重力卫星观测数据解算的地表质量变化的时空分辨率和精度仍然是研究的重点和难点。点质量模型法作为一类有效利用重力卫星观测数据监测全球质量变化的方法得到了长足发展,有别于球谐位系数模型和Mascon模型法,点质量模型法理论假设直观、算法形式简单。与Mascon模型法相似,点质量模型法可以有效融合先验信息约束平滑条带误差并有效校正泄漏误差的影响。

本文总结分析了目前点质量模型法的研究进展,详细比较了引力位点质量模型法、径向加速度点质量模型法和三维加速度点质量模型法的理论特点,并对约束矩阵的构建、地表质量点划分和点质量解的后处理进行了简要总结。约束矩阵的构建对解算更高时空分辨率和精度的地表质量变化具有重要影响,尤其是目前Mascon模型采用的约束矩阵构建策略会限制其产品在小尺度区域质量变化监测和具有三维结构的地震重力变化问题上的应用^[88],因此,探索更有效的约束矩阵构建方法是点质量模型法和Mascon法的研究重点。

随着重力卫星任务的不断实施和重力卫星观测数据的不断积累,基于重力卫星观测数据监测全球质量变化将有更大的应用和发展空间。同时,中国重力卫星计划的不断实施,充分挖掘中国重力卫星任务的价值并拓展其应用范围,将有力促进中国在相关领域的科技水平,持续开展点质量模型法的深入研究,在理论和实践方面对实现这些目的具有明显的推动作用。

参 考 文 献

- [1] Tapley B D, Bettadpur S, Watkins M, et al. The Gravity Recovery and Climate Experiment: Mission Overview and Early Results [J]. *Geophysical Research Letters*, 2004, 31(9): L09607.
- [2] Wahr J, Swenson S, Zlotnicki V, et al. Time-Varyable Gravity from GRACE: First Results [J]. *Geophysical Research Letters*, 2004, 31(11): L11501.
- [3] Flechtner F, Reigber C, Rummel R, et al. Satellite Gravimetry: A Review of Its Realization [J]. *Surveys in Geophysics*, 2021, 42(5): 1029-1074.
- [4] Ran Jiangjun, Yan Zhengwen, Wu Yunlong, et al. Research Status and Future Perspectives in Next Generation Gravity Mission [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2023, 48(6): 841-857. (冉将军, 闫政文, 吴云龙, 等. 下一代重力卫星任务研究概述与未来展望 [J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2023, 48(6): 841-857.)
- [5] Jäggi A, Dahle C, Arnold D, et al. Swarm Kinematic Orbits and Gravity Fields from 18 Months of GPS Data [J]. *Advances in Space Research*, 2016, 57(1): 218-233.
- [6] Zhou Hao, Luo Zhicai, Zhou Zebing, et al. Earth's Gravity Field Determination Based on Tianqin-1 Observations [J]. *Journal of Huazhong University of Science and Technology (Natural Science Edition)*, 2022, 50(9): 117-125. (周浩, 罗志才, 周泽兵, 等. 基于天琴一号观测数据反演地球重力场模型 [J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2022, 50(9): 117-125.)
- [7] Wahr J, Molenaar M, Bryan F. Time Variability of the Earth's Gravity Field: Hydrological and Oceanic Effects and Their Possible Detection Using GRACE [J]. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 1998, 103(B12): 30205-30229.
- [8] Swenson S, Wahr J. Post-Processing Removal of Correlated Errors in GRACE Data [J]. *Geophysical Research Letters*, 2006, 33(8): L08402.
- [9] Zheng Qiuyue, Chen Shi. Review on the Recent Developments of Terrestrial Water Storage Variations Using GRACE Satellite-Based Datum [J]. *Progress in Geophysics*, 2015, 30(6): 2603-2615. (郑秋月, 陈石. 应用GRACE卫星重力数据计算陆地水变化的相关进展评述 [J]. 地球物理学进展, 2015, 30(6): 2603-2615.)
- [10] Seo K W, Wilson C R, Chen J L, et al. GRACE's Spatial Aliasing Error [J]. *Geophysical Journal International*, 2008, 172(1): 41-48.
- [11] Baur O, Kuhn M, Featherstone W E. GRACE-Derived Ice-Mass Variations over Greenland by Accounting for Leakage Effects [J]. *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)*, 2009, 114(B6): B06407.
- [12] Chen J L, Wilson C R, Li J, et al. Reducing Leakage Error in GRACE-Observed Long-Term Ice Mass Change: A Case Study in West Antarctica [J]. *Journal of Geodesy*, 2015, 89(9): 925-940.
- [13] Landerer F W, Swenson S C. Accuracy of Scaled GRACE Terrestrial Water Storage Estimates [J]. *Water Resources Research*, 2012, 48(4): W04531.
- [14] Long D, Yang Y T, Wada Y, et al. Deriving Scaling Factors Using a Global Hydrological Model

- to Restore GRACE Total Water Storage Changes for China's Yangtze River Basin [J]. *Remote Sensing of Environment*, 2015, 168: 177-193.
- [15] Wu Yunlong, Li Hui, Zou Zhengbo, et al. Investigation of Water Storage Variation in the Heihe River Using the Forward-Modeling Method [J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2015, 58(10): 3507-3516. (吴云龙, 李辉, 邹正波, 等. 基于 Forward-Modeling 方法的黑河流域水储量变化特征研究[J]. 地球物理学报, 2015, 58(10): 3507-3516.)
- [16] Chen J L, Cazenave A, Dahle C, et al. Applications and Challenges of GRACE and GRACE Follow-On Satellite Gravimetry [J]. *Surveys in Geophysics*, 2022, 43(1): 305-345.
- [17] Muller P M, Sjogren W L. Mascons: Lunar Mass Concentrations [J]. *Science*, 1968, 161 (3842): 680-684.
- [18] Antoni M. A Review of Different Mascon Approaches for Regional Gravity Field Modelling Since 1968 [J]. *History of Geo- and Space Sciences*, 2022, 13 (2): 205-217.
- [19] Rowlands D D, Luthcke S B, Klosko S M, et al. Resolving Mass Flux at High Spatial and Temporal Resolution Using GRACE Intersatellite Measurements [J]. *Geophysical Research Letters*, 2005, 32 (4): L04310.
- [20] Rowlands D D, Luthcke S B, McCarthy J J, et al. Global Mass Flux Solutions from GRACE: A Comparison of Parameter Estimation Strategies—Mass Concentrations Versus Stokes Coefficients [J]. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 2010, 115(B1): B01403.
- [21] Watkins M M, Wiese D N, Yuan D N, et al. Improved Methods for Observing Earth's Time Variable Mass Distribution with GRACE Using Spherical Cap Mascons [J]. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 2015, 120(4): 2648-2671.
- [22] Abedini A, Keller W, Amiri-Simkooei A. Estimation of Surface Density Changes Using a Mascon Method in GRACE-Like Missions [J]. *Journal of Earth System Science*, 2021, 130(1): 26.
- [23] Abedini A, Keller W, Amiri-Simkooei A R. On the Performance of Equiangular Mascon Solution in GRACE-like Missions [J]. *Annals of Geophysics*, 2021, 64(2): GD219.
- [24] Luthcke S B, Sabaka T J, Loomis B D, et al. Antarctica, Greenland and Gulf of Alaska Land-Ice Evolution from an Iterated GRACE Global Mascon Solution [J]. *Journal of Glaciology*, 2013, 59 (216): 613-631.
- [25] Klosko S, Rowlands D, Luthcke S, et al. Evaluation and Validation of Mascon Recovery Using GRACE KBRR Data with Independent Mass Flux Estimates in the Mississippi Basin [J]. *Journal of Geodesy*, 2009, 83(9): 817-827.
- [26] Han S C, Shum C K, Braun A. High-Resolution Continental Water Storage Recovery from Low-Low Satellite-to-Satellite Tracking [J]. *Journal of Geodynamics*, 2005, 39(1): 11-28.
- [27] Han S C, Shum C K, Jekeli C, et al. Improved Estimation of Terrestrial Water Storage Changes from GRACE [J]. *Geophysical Research Letters*, 2005, 32(7): L07302.
- [28] Tangdamrongsub N, Hwang C, Shum C K, et al. Regional Surface Mass Anomalies from GRACE KBR Measurements: Application of L-Curve Regularization *Anda Priori* Hydrological Knowledge [J]. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 2012, 117(B11): B11406.
- [29] Baur O, Sneeuw N. Assessing Greenland Ice Mass Loss by Means of Point-Mass Modeling: A Viable Methodology [J]. *Journal of Geodesy*, 2011, 85 (9): 607-615.
- [30] Baur O. Greenland Mass Variation from Time-Varying Gravity in the Absence of GRACE [J]. *Geophysical Research Letters*, 2013, 40(16): 4289-4293.
- [31] Su Yong, Yu Bing, You Wei, et al. Surface Mass Distribution from Gravity Satellite Observations by Using Three-Dimensional Point-Mass Modeling Approach [J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2017, 60 (1): 50-60. (苏勇, 于冰, 游为, 等. 基于重力卫星数据监测地表质量变化的三维点质量模型法 [J]. 地球物理学报, 2017, 60(1): 50-60.)
- [32] Su Yong, Zheng Wenlei, Yu Biao, et al. Surface Mass Distribution Derived from Three-Dimensional Acceleration Point-Mass Modeling Approach with Spatial Constraint Methods [J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2019, 62(2): 508-519. (苏勇, 郑文磊, 余彪, 等. 反演地表质量变化的附有空间约束的三维加速度点质量模型法 [J]. 地球物理学报, 2019, 62(2): 508-519.)
- [33] Guo Feixiao, Sun Zhongmiao, Zhao Jun, et al. Regional Ground Surface Mass Variations Inversed by Radial Point-Mass Model Method with Spatial Constraints [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2018, 47(5): 592-599. (郭飞霄, 孙中苗, 赵俊, 等. 附加空间约束的径向点质量模型方法反演区域地表质量变化 [J]. 测绘学报, 2018, 47(5): 592-599.)

- [34] Zhong B, Li Q, Chen J L, et al. Improved Estimation of Regional Surface Mass Variations from GRACE Intersatellite Geopotential Differences Using a Priori Constraints[J]. *Remote Sensing*, 2020, 12(16): 2553.
- [35] Yin Heng, You Wei, Fan Dongming, et al. Variance Constraint Radial Point-Mass Method for Inversion of Earth Surface Mass Variation[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2022, 65(7): 2464-2483. (尹恒, 游为, 范东明, 等. 反演地表质量变化的附有方差约束的径向点质量方法[J]. *地球物理学报*, 2022, 65(7): 2464-2483.)
- [36] Ramillien G, Biancale R, Gratton S, et al. GRACE-Derived Surface Water Mass Anomalies by Energy Integral Approach: Application to Continental Hydrology[J]. *Journal of Geodesy*, 2011, 85(6): 313-328.
- [37] Chao B F, Gross R S. Changes in the Earth's Rotation and Low-Degree Gravitational Field Induced by Earthquakes[J]. *Geophysical Journal International*, 1987, 91(3): 569-596.
- [38] Luthcke S B, Arendt A A, Rowlands D D, et al. Recent Glacier Mass Changes in the Gulf of Alaska Region from GRACE Mascon Solutions[J]. *Journal of Glaciology*, 2008, 54(188): 767-777.
- [39] Lemoine F G, Luthcke S B, Rowlands D D, et al. The Use of Mascons to Resolve Time-Variable Gravity from GRACE[M]// *Dynamic Planet*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2007: 231-236.
- [40] Krogh P E, Andersen O B, Michailovsky C I B, et al. Evaluating Terrestrial Water Storage Variations from Regionally Constrained GRACE Mascon Data and Hydrological Models over Southern Africa—Preliminary Results[J]. *International Journal of Remote Sensing*, 2010, 31(14): 3899-3912.
- [41] Sabaka T J, Rowlands D D, Luthcke S B, et al. Improving Global Mass Flux Solutions from Gravity Recovery and Climate Experiment (GRACE) Through Forward Modeling and Continuous Time Correlation[J]. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 2010, 115(B11): B11403.
- [42] Awange J L, Fleming K M, Kuhn M, et al. On the Suitability of the $4^\circ \times 4^\circ$ GRACE Mascon Solutions for Remote Sensing Australian Hydrology[J]. *Remote Sensing of Environment*, 2011, 115(3): 864-875.
- [43] Andrews S B, Moore P, King M A. Mass Change from GRACE: A Simulated Comparison of Level-1B Analysis Techniques[J]. *Geophysical Journal International*, 2015, 200(1): 503-518.
- [44] Yang X C, Tian S Y, Feng W, et al. Spatio-Temporal Evaluation of Water Storage Trends from Hydrological Models over Australia Using GRACE Mascon Solutions[J]. *Remote Sensing*, 2020, 12(21): 3578.
- [45] Guo Feixiao, Xiao Yun, Wang Feifei. Mascon Inversion Method of Earth Surface Mass Anomaly Using GRACE Range Rate Data[J]. *Progress in Geophysics*, 2014, 29(6): 2494-2497. (郭飞霄, 肖云, 汪菲菲. 利用GRACE星间距离变率数据反演地球表层质量变化的Mascon方法[J]. *地球物理学进展*, 2014, 29(6): 2494-2497.)
- [46] Guo Feixiao, Xiao Yun, Wang Feifei, et al. A Study of the Methods of Recovering Continental Water Storage Variation Using GRACE Level-1B Data[J]. *Engineering of Surveying and Mapping*, 2015, 24(6): 18-22. (郭飞霄, 肖云, 汪菲菲, 等. 利用GRACE卫星Level-1B数据反演陆地水储量变化的方法研究[J]. *测绘工程*, 2015, 24(6): 18-22.)
- [47] Guo Feixiao, Sun Zhongmiao, Ren Feilong, et al. Comparison and Analysis of Different Mascon Model Results[J]. *Journal of Geodesy and Geodynamics*, 2019, 39(10): 1022-1026. (郭飞霄, 孙中苗, 任飞龙, 等. 不同Mascon模型解比较分析[J]. *大地测量与地球动力学*, 2019, 39(10): 1022-1026.)
- [48] Su Yong, Wei Wei, Li Qiong, et al. Drought Monitoring in Southwest China in 2010 Using Three-Dimensional Acceleration Point-Mass Modeling Approach[J]. *Journal of Geodesy and Geodynamics*, 2022, 42(4): 403-409. (苏勇, 魏伟, 李琼, 等. 利用三维加速度点质量模型法监测2010年中国西南干旱[J]. *大地测量与地球动力学*, 2022, 42(4): 403-409.)
- [49] Su Yong, Wei Wei, Li Qiong, et al. Monitoring the Variation of Terrestrial Water Storage in North China Using GRACE and GRACE-FO Gravity Satellite Data[J]. *Progress in Geophysics*, 2022, 37(5): 1854-1862. (苏勇, 魏伟, 李琼, 等. 联合GRACE、GRACE-FO重力卫星数据监测华北地区水储量变化[J]. *地球物理学进展*, 2022, 37(5): 1854-1862.)
- [50] Wei Wei, Su Yong, Zheng Wenlei, et al. Monitoring the Variation of Terrestrial Water Storage in North China by Three-Dimensional Acceleration Point-Mass Modeling Approach[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2022, 47(4): 551-560. (魏伟, 苏勇, 郑文磊, 等. 利用三维加速度点质量模型法解算华北地区陆地水储量变化[J]. *武汉大学学报(信息科学版)*, 2022, 47(4): 551-560.)
- [51] Pail R. Synthetic Global Gravity Model for Plane-

- tary Bodies and Applications in Satellite Gravity Gradiometry [D]. Graz: Technical University Graz, 1999.
- [52] Bjerhammar A. On the Energy Integral for Satellites [J]. *Tellus*, 1969, 21(1): 1-9.
- [53] Jekeli C. The Determination of Gravitational Potential Differences from Satellite-to-Satellite Tracking [J]. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1999, 75(2): 85-101.
- [54] Shang K, Guo J Y, Shum C K, et al. GRACE Time-Variable Gravity Field Recovery Using an Improved Energy Balance Approach [J]. *Geophysical Journal International*, 2015, 203(3): 1773-1786.
- [55] Zhong B, Li Q, Li X P, et al. Basin-Scale Terrestrial Water Storage Changes Inferred from GRACE-Based Geopotential Differences: A Case Study of the Yangtze River Basin, China [J]. *Geophysical Journal International*, 2023, 233(2): 1318-1338.
- [56] Zhong B, Li X P, Chen J L, et al. WHU-GRACE-GPD01s: A Series of Constrained Monthly Gravity Field Solutions Derived from GRACE-Based Geopotential Differences [J]. *Earth and Space Science*, 2023, 10(4): e2022EA002699.
- [57] Sørensen L S, Jarosch A H, Aðalgeirsdóttir G, et al. The Effect of Signal Leakage and Glacial Isostatic Rebound on GRACE-Derived Ice Mass Changes in Iceland [J]. *Geophysical Journal International*, 2017, 209(1): 226-233.
- [58] Wang W, Shen Y Z, Chen Q J, et al. One-Degree Resolution Mascon Solution over Antarctic Derived from GRACE Level-2 Data [J]. *Frontiers in Earth Science*, 2023, 11: 1129628.
- [59] Ilk K H. Ein Beitrag Zur Dynamik Ausgedehnter Körper: Gravitation Wechsel Wirkung [J]. *Deutsche Geodaetische Kommission Bayer Akad Wiss*, 1983, 288: 11-17.
- [60] Mayer-Gürr T. Gravitational Field Determination from the Analysis of Short Orbital Arcs Using the Example of the Satellite Missions CHAMP and GRACE [D]. Bonn: University of Bonn, 2006.
- [61] Kusche J, Klees R. Regularization of Gravity Field Estimation from Satellite Gravity Gradients [J]. *Journal of Geodesy*, 2002, 76(6): 359-368.
- [62] Loomis B D, Luthecke S B, Sabaka T J. Regularization and Error Characterization of GRACE Mascons [J]. *Journal of Geodesy*, 2019, 93(9): 1381-1398.
- [63] Hansen P C. Analysis of Discrete Ill-Posed Problems by Means of the L -Curve [J]. *SIAM Review*, 1992, 34(4): 561-580.
- [64] Ditmar P, Kusche J, Klees R. Computation of Spherical Harmonic Coefficients from Gravity Gradiometry Data to be Acquired by the GOCE Satellite: Regularization Issues [J]. *Journal of Geodesy*, 2003, 77(7): 465-477.
- [65] Xu P L, Shen Y Z, Fukuda Y, et al. Variance Component Estimation in Linear Inverse Ill-Posed Models [J]. *Journal of Geodesy*, 2006, 80 (2) : 69-81.
- [66] Shen Y Z, Xu P L, Li B F. Bias-Corrected Regularized Solution to Inverse Ill-posed Models [J]. *Journal of Geodesy*, 2012, 86(8): 597-608.
- [67] Swenson S C, Wahr J M. Estimating Signal Loss in Regularized GRACE Gravity Field Solutions [J]. *Geophysical Journal International*, 2011, 185(2) : 693-702.
- [68] Zhong B, Tan J T, Li Q, et al. Simulation Analysis of Regional Surface Mass Anomalies Inversion Based on Different Types of Constraints [J]. *Geodesy and Geodynamics*, 2021, 12(4): 298-307.
- [69] Zhan Jingang, Wang Yong, Shi Hongling, et al. Removing Correlative Errors in GRACE Data by the Smoothness Priors Method [J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2015, 58(4): 1135-1144. (詹金刚, 王勇, 史红岭, 等. 应用平滑先验信息方法移除 GRACE 数据中相关误差 [J]. *地球物理学报*, 2015, 58(4): 1135-1144.)
- [70] Chen T Y, Shen Y Z, Chen Q J. Mass Flux Solution in the Tibetan Plateau Using Mascon Modeling [J]. *Remote Sensing*, 2016, 8(5): 439.
- [71] Guo Feixiao, Miao Yuewang, Xiao Yun, et al. Recovery Water Storage Variation in China and Its Adjacent Area by Method of Point-Mass Model [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2017, 42(7): 1002-1007. (郭飞霄, 苗岳旺, 肖云, 等. 采用点质量模型方法反演中国大陆及周边地区陆地水储量变化 [J]. *武汉大学学报(信息科学版)*, 2017, 42(7): 1002-1007.)
- [72] Feng Wei, Wang Changqing, Mu Dapeng, et al. Groundwater Storage Variations in the North China Plain from GRACE with Spatial Constraints [J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2017, 60(5): 1630-1642. (冯伟, 王长青, 穆大鹏, 等. 基于 GRACE 的空间约束方法监测华北平原地下水储量变化 [J]. *地球物理学报*, 2017, 60(5): 1630-1642.)
- [73] Ran J J, Ditmar P, Liu L, et al. Analysis and Mitigation of Biases in Greenland Ice Sheet Mass Balance Trend Estimates from GRACE Mascon Products [J]. *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)*, 2021, 126(7): e2020JB020880.
- [74] Luthecke S B, Rowlands D D, Lemoine F G, et al.

- Monthly Spherical Harmonic Gravity Field Solutions Determined from GRACE Inter-Satellite Range-Rate Data Alone[J]. *Geophysical Research Letters*, 2006, 33(2): L02402.
- [75] Chen Y Q. Recovery of Terrestrial Water Storage Change from Low-Low Satellite-to-Satellite Tracking[D]. Columbus: The Ohio State University, 2007.
- [76] Ramillien G L, Seoane L, Frappart F, et al. Constrained Regional Recovery of Continental Water Mass Time-Variations from GRACE-Based Geopotential Anomalies over South America[J]. *Surveys in Geophysics*, 2012, 33(5): 887-905.
- [77] Save H, Bettadpur S, Tapley B D. Reducing Errors in the GRACE Gravity Solutions Using Regularization [J]. *Journal of Geodesy*, 2012, 86(9): 695-711.
- [78] Save H, Bettadpur S, Tapley B D. High-Resolution CSR GRACE RL05 Mascons [J]. *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)*, 2016, 121(10): 7547-7569.
- [79] Eicker A. Gravity Field Refinement by Radial Basis Functions from In-Situ Satellite Data [D]. Bonn: University of Bonn, 2008.
- [80] Schrama E J O, Wouters B, Rietbroek R. A Mascon Approach to Assess Ice Sheet and Glacier Mass Balances and Their Uncertainties from GRACE Data [J]. *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)*, 2014, 119(7): 6048-6066.
- [81] Save H. CSR GRACE and GRACE-FO RL06 Mascon Solutions v02 [EB/OL]. [2024-06-30]. https://www2.csr.utexas.edu/grace/RL06_mascons.html.
- [82] Loomis B D, Felikson D, Sabaka T J, et al. High-Spatial-Resolution Mass Rates from GRACE and GRACE-FO: Global and Ice Sheet Analyses [J]. *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)*, 2021, 126(12): e2021JB023024.
- [83] Ran J, Ditmar P, Klees R, et al. Statistically Optimal Estimation of Greenland Ice Sheet Mass Variations from GRACE Monthly Solutions Using an Improved Mascon Approach [J]. *Journal of Geodesy*, 2018, 92(3): 299-319.
- [84] Ran J J, Ditmar P, Klees R. Optimal Mascon Geometry in Estimating Mass Anomalies Within Greenland from GRACE [J]. *Geophysical Journal International*, 2018, 214(3): 2133-2150.
- [85] Zou Xiancai, Jin Taoyong, Zhu Guangbin. Research on the Mascon Method for the Determination of Local Surface Mass Flux with Satellite-Satellite Tracking Technique [J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2016, 59(12): 4623-4632. (邹贤才, 金涛勇, 朱广彬. 卫星跟踪卫星技术反演局部地表物质迁移的 Mascon 方法研究 [J]. *地球物理学报*, 2016, 59(12): 4623-4632.)
- [86] Swenson S, Chambers D, Wahr J. Estimating Geocenter Variations from a Combination of GRACE and Ocean Model Output [J]. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 2008, 113(B8): B08410.
- [87] Cheng M K, Tapley B D, Ries J C. Deceleration in the Earth's Oblateness [J]. *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)*, 2013, 118(2): 740-747.
- [88] Zhang Lan, Sun Wenke. Progress and Prospect of GRACE Mascon Product and Its Application [J]. *Reviews of Geophysics and Planetary Physics*, 2022, 53(1): 35-52. (张岚, 孙文科. 重力卫星 GRACE Mascon 产品的应用研究进展与展望 [J]. *地球与行星物理论评*, 2022, 53(1): 35-52.)