

引文格式:过家春,刘熠,申文斌,等.基于流形映射原理的地图投影概念分析及其应用[J].武汉大学学报(信息科学版),2024,49(12):2313-2322.DOI:10.13203/j.whugis20230138



Citation: GUO Jiachun, LIU Yi, SHEN Wenbin, et al. Concept Analysis of Map Projection and Its Applications Based on Manifold Mapping Principle[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2024, 49(12): 2313-2322. DOI: 10.13203/j.whugis20230138

# 基于流形映射原理的地图投影概念分析及其应用

过家春<sup>1</sup> 刘熠<sup>2</sup> 申文斌<sup>3</sup> 施贵刚<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 安徽建筑大学土木工程学院,安徽 合肥,230601

<sup>2</sup> 北京雁栖湖应用数学研究院,北京,101408

<sup>3</sup> 武汉大学测绘学院,湖北 武汉,430079

**摘要:**从拓扑流形和高斯投影的历史渊源着手,基于流形映射原理阐述辨析了地图投影的概念原理。从黎曼流形的角度重新认识地球椭球面或球面,分析了椭球面或球面的非欧几何特征、与平面的拓扑关系(不可展性和不同胚性)及其对地图投影的影响。以地图投影的流形映射原理为基础,地图投影的基本矛盾(地球曲面与地图平面之间的矛盾)应该包括不可展和不同胚两个方面,其中不可展性在任何地图投影方式都不可避免地产生投影变形的数学原理所在,不同胚性则对投影函数的定义域和值域、奇异点特征产生影响。同时,流形映射原理在等角投影的定义、等角投影的充分必要条件分析等方面的应用研究进一步验证了相关论断的正确性和可行性。此项工作为从黎曼流形映射的角度研究地图投影学拓展了研究思路。

**关键词:**地图投影;黎曼流形;流形映射;地图投影基本矛盾;等角投影

中图分类号:P282

文献标识码:A

收稿日期:2023-07-20

DOI:10.13203/j.whugis20230138

文章编号:1671-8860(2024)12-2313-10

## Concept Analysis of Map Projection and Its Applications Based on Manifold Mapping Principle

GUO Jiachun<sup>1</sup> LIU Yi<sup>2</sup> SHEN Wenbin<sup>3</sup> SHI Guigang<sup>1</sup>

<sup>1</sup> College of Civil Engineering, Anhui Jianzhu University, Hefei 230601, China

<sup>2</sup> Yanqi Lake Beijing Institute of Mathematical Sciences and Applications, Beijing 101408, China

<sup>3</sup> School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan 430079, China

**Abstract: Objectives:** After a concise statement of the historical origin of topological manifold and Gauss-Krüger projection, this paper expounds and analyzes the principle of manifold mapping of cartographic projection. **Methods:** The Earth ellipsoid or sphere is redefined from the perspective of Riemannian manifold and the non-Euclidean geometric characteristics, and the topological relationship with plane and the influence on map projection are analyzed. **Results:** Based on the principle of manifold mapping, this paper considers that the basic contradiction of map projection (i.e. the contradiction between the earth surface and the map plane) should include two aspects, namely, un-developability and un-homeomorphism, which have impacts on distortions, domains and singular points of map projection, etc. Meanwhile, the correctness and feasibility of the authors' assertions about the principle of manifold mapping are further verified in the definition and the necessary and sufficient conditions of conformal map, etc. **Conclusions:** This work expands the research idea for studying map projection from the perspective of Riemannian manifold mapping.

**Key words:** map projection; Riemannian manifold; manifold mapping; basic contradiction of map projection

**基金项目:**国家自然科学基金(42274053,42122025,42030105);安徽省教育厅青年骨干教师境外访学研修项目(JWFX2023023);安徽建筑大学人才引进项目(2023QDZ30);国家重大科技基础设施项目(2023-EL-PT-000197);安徽省高等学校省级质量工程项目(2021jyxm0266,2022zyzts018)。

**第一作者:**过家春,博士,教授,研究方向为椭球面大地测量与地图投影理论优化与应用。jchguo@ahjzu.edu.cn

tion; conformal projection

地图投影广义上是指在不可展的天体表面(如地球、火星、月球等)与可展曲面(包括平面)之间建立静态或动态的投影函数关系,而狭义上主要是指地球表面与地图平面间的投影问题<sup>[1-4]</sup>。在大地测量和地图投影理论中,地球表面一般以椭球面或球面为数学模型,将其看作是三维欧氏空间下椭球体或球体的外边界,并以其为基础建立地图投影的基本原理与应用体系。然而,从黎曼几何和拓扑流形学的角度,椭球面或球面是二维可定向黎曼流形<sup>[5]</sup>,属于黎曼几何范畴。因此,从黎曼几何的角度,地图投影是非欧几何空间的二维黎曼流形(椭球面或球面,分别记为 $B_{(a,e)}^2$ 和 $S_R^2$ )与欧氏几何空间的二维平面的流形映射。

在基于欧氏几何的地图投影理论与实践,由于没有建立起基于微分几何和黎曼流形原理的数学逻辑,许多地图投影问题的解决并不完善。例如:(1)对于计算曲率和判定法曲率的欧拉公式、麦尼尔定理,仅能直接引用,在欧氏几何体系下很难给出严谨的论述和证明;(2)对于地球曲面的不可展性、等角投影的充要条件等概念,仅局限于文字性描述,缺乏严密的数学语言表达与证明;(3)数学上,定义域、值域和对应法则是函数的3要素,而在地图投影领域,过去几乎忽略了对各类地图投影函数的定义域、值域、奇异点等性质的讨论和界定。

近年来,地图投影的拓扑流形映射特征正日益受到学术界的重视。许多学者给出了单纯地图投影和广义地图投影的定义,体现了从拓扑变换角度认识地图投影的进步,深刻地诠释了地图投影的拓扑学思想<sup>[6-7]</sup>。陆续有学者引入拓扑学的思想来研究地图投影,包括地图投影的拓扑模型和分类构架、全球离散格网系统(discrete global grid system, DGGS)构建、高斯投影的复变函数表达、基于黎曼面的等角投影研究等<sup>[8-13]</sup>。文献[14]应用拓扑学、集合论、布尔代数、模糊数学等原理,对地图学中相关概念、原理和方法给出了系统性的数学定义和表述,指出刺孔球面与二维平面同胚是地图投影基本的共有属性。

在投影及投影变形指标的优化方面,分析和比较地图投影变形的大圆指标、紧致性和延伸率变形指标等投影变形新指标先后被提出,这些新的投影变形研究方法是对经典底索指标(变形椭圆)的有益补充,体现了从无穷小(黎曼流形的微分结构)角度和从有限小(一定尺度上的局部区

域)角度研究投影的变形指标的互补作用<sup>[15-16]</sup>。对于应用最为广泛的高斯投影及其衍生的UTM(universal transverse mercator)投影,新的复变函数表达及其他优化算法不断被提出并被证明在公式的简洁性、计算精度和计算效率等方面均优于传统经差展开公式,高斯投影椭圆函数表达的理论价值也得以挖掘<sup>[17-18]</sup>。

相关研究进展表明,地图投影是非欧几何面与欧氏几何平面之间的映射关系,地图投影具有显著的非欧几何特征。不过,尽管地图投影的拓扑流形映射特征引起了一定的重视,但相关研究并没有抓住“地球椭球面或球面是非欧几何面,属于二维黎曼流形”这一本质特征,从而使得相关研究基本停留在概念的解释上,限制了相关理论向实用阶段的发展。因此,从流形映射角度重新审视地图投影学,其理论发展与应用推广仍有巨大的创新发展空间。

本文从拓扑流形的定义及其与地图投影的渊源着手,给出椭球面的黎曼流形定义,并在此基础上围绕椭球面(或球面)的非欧几何特征及其与平面的拓扑关系以及对地图投影的影响、椭球面的不可展性、地图投影的基本矛盾的黎曼流形解释等方面开展初步的探讨研究,分析阐述地图投影的流形映射原理本质及其初步应用。

## 1 地图投影的流形映射原理

流形是一类重要的拓扑空间,其显著特性是局部同胚于欧氏空间<sup>[5]</sup>。追溯流形产生、发展和演变的历史可以发现,流形概念起源于高斯投影。事实上,正是高斯为了解决大地测量中的一些计算和投影问题,研究了曲线曲面理论和地图投影,建立了曲面的内蕴几何学,并诞生了非欧几何的思想。其学生黎曼继承了高斯的思想,提出流形的概念,开创黎曼几何。许多学者指出,流形概念诞生的根本原因是高斯投影的研究和推广<sup>[5, 19-21]</sup>。

为阐述流形与高斯投影的渊源关系,现将拓扑流形的定义扼要叙述如下<sup>[5, 22]</sup>:

定义1:拓扑流形。

如图1所示,设 $M^m$ 是一个豪斯多夫空间,若对 $\forall p \in M^m$ ,都存在 $p$ 在 $M^m$ 中的一个开邻域 $U$ 和映射 $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ ,其中, $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ 为开集,使得 $\varphi$ 是 $U$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的开子集 $\varphi(U)$ 上的同胚映射,则

称  $M^n$  是一个  $n$  维拓扑流形。 $(U, \varphi)$  称为  $M^n$  的一个局部坐标系或局部坐标卡,或简称图卡; $\varphi$  称为局部坐标映射;拓扑空间  $M^n$  上的局部坐标卡的集合称为图册或图集。

设  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  和  $(U_\beta, \varphi_\beta)$  是  $n$  维流形  $M^n$  的两个局部坐标卡,若  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ,则  $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  和  $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  是  $\mathbb{R}^n$  的两个非空开集,且映射为:

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \quad (1)$$

式中,符号  $\circ$  代表复合映射。由此建立了两个开集之间的同胚,称为转移映射或坐标变换。该同胚映射的逆映射为:

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}: \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \quad (2)$$

拓扑流形的定义如图 1 所示,其中  $\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}, \varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ 。

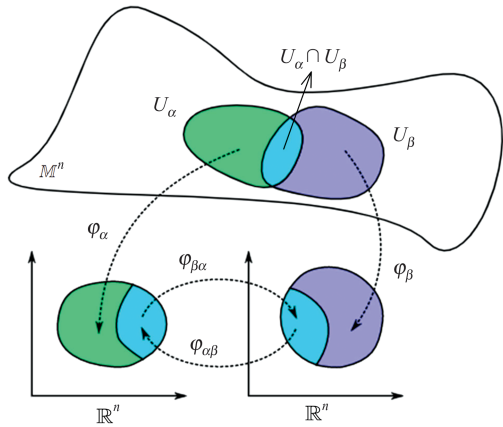


图 1 拓扑流形的定义

Fig. 1 Definition of Topological Manifold

在拓扑流形的基础上,进一步可定义黎曼流形。简单地说,黎曼流形是给定了一个光滑对称、正定的二阶张量场的光滑流形,其严密的数学定义在此不再赘述。

将上述拓扑流形的定义与高斯投影对比,可发现,该定义正是对二维空间下高斯投影的数学抽象并推广到  $n$  维空间。其内涵可以从以下 3 个方面来理解:

1) 地球椭球面  $\mathbb{E}_{(a,e)}^2$  或球面  $S_R^2$  是二维黎曼流形,其能够向二维欧氏空间(平面  $\mathbb{R}^2$ ) 进行投影的内在本质是二者具有局部同胚的性质,地图投影的本质是黎曼流形(非欧几何曲面)与欧氏空间平面的局部同胚映射。

2) 当维数  $n=2$  时,图 1 正是对高斯投影两个相邻投影带之间关系的数学抽象,局部坐标卡或图卡的概念脱胎于高斯投影的分带投影思想,其交集则对应于高斯投影的邻带重叠。一般地,除

世界地图外,地图总是分区域进行投影,局部坐标卡的集合——图册或图集的数学概念与地图投影中地图集的概念吻合,其英文都是 atlas。

3) 转移映射的定义来源于高斯投影中的投影邻带换算工作。更一般地,转移映射对应于地图投影中的投影变换。

通过以上分析可见,流形的概念起源于地图投影,高斯投影是二维流形映射的现实模型。

基于地图投影的流形映射原理,以下将重点分析椭球面(或球面)的非欧几何特征及其与平面的拓扑关系以及对地图投影的影响,在椭球面的不可展性、地图投影基本矛盾的黎曼流形解释、流形映射原理在等角投影中的应用等方面开展初步的探讨研究。

## 2 椭球面(或球面)的非欧几何特征及其与平面的拓扑关系

当椭球面的第一偏心率  $e=0$  时,即为球面。因此,以下重点讨论椭球面的特征,球面可视为其特例。

### 2.1 椭球面的黎曼流形定义

在欧氏几何空间中,地球椭球面(旋转椭球面)的定义为:

$$\mathbb{E}_{(a,e)}^2 = \left\{ \mathbf{X} \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1 \right\} \quad (3)$$

式中, $a, b$  分别代表地球椭球的长半径、短半径,  $\mathbf{X} = [X \ Y \ Z]^T$ 。

若以大地经纬度  $L, B$  为参数,则可定义为:

$$\mathbb{E}_{(a,e)}^2 = \left\{ \mathbf{X} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \cos B \cos L \\ N \cos B \sin L \\ N(1 - e^2) \sin B \end{bmatrix} \right\} \quad (4)$$

式中, $N$  为卯酉圈曲率半径。

从欧氏几何与非欧几何的区别与联系的角度,式(3)与式(4)两种定义有着本质的区别。式(3)的定义是将椭球面看作满足式(3)的点在三维欧氏空间的集合,椭球面是欧氏空间里的几何实体,属于欧氏几何范畴;而式(4)定义可看作  $(L, B) \subset \mathbb{R}^2$  向  $\mathbf{X} = [X(L, B) \ Y(L, B) \ Z(L, B)]^T \subset \mathbb{R}^3$  的映射。

这一映射原理表明椭球面是二维的,因此记为  $\mathbb{E}_{(a,e)}^2$ 。直观上理解,将平面按一定数学法则作扭曲、拉伸变形,可以完全吻合地覆盖到椭球面上的任意局部区域。反之,椭球面上局部区域可以按一定的数学法则映射到平面上,即地图投

影。二者可以相互映射的内在数学本质是椭圆面是二维黎曼流形,局部同胚于欧氏空间的二维平面。

将式(4)表达为矢量形式,有:

$$\mathbf{r} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k} =$$

$$X(B,L)\mathbf{i} + Y(B,L)\mathbf{j} + Z(B,L)\mathbf{k} \quad (5)$$

式中,  $\mathbf{r}$  为坐标原点至地球椭圆球上任意一点的极径;  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  分别为沿  $X, Y, Z$  坐标轴方向的 3 个相互垂直的单位向量。

根据微分几何中的定义,可求得旋转椭圆球面  $\mathbb{E}_{(a,e)}^2$  的第一基本形式和第二基本形式分别为:

$$(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} =$$

$$\begin{bmatrix} dB & dL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^2 & 0 \\ 0 & N^2 \cos^2 B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dB \\ dL \end{bmatrix} = M^2 (dB)^2 + N^2 \cos^2 B (dL)^2 \quad (6)$$

$$-d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{n} = M (dB)^2 + N \cos^2 B (dL)^2 \quad (7)$$

式中,  $M$  为子午圈曲率半径;  $\mathbf{n}$  为地球椭圆球面任意一点的单位法矢量。

由式(6)可得旋转椭圆球面  $\mathbb{E}_{(a,e)}^2$  的黎曼度量张量为:

$$\mathbf{g} = (g_{ij}) = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^2 & 0 \\ 0 & N^2 \cos^2 B \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中,  $g_{ij}$  代表度量张量  $\mathbf{g}$  中第  $i$  行第  $j$  列的元素。

当  $e = 0$  时,式(6)、式(7)和式(8)则分别对应于球面的第一、第二基本形式和度量张量。

在微分几何或黎曼几何中,大地经纬度  $L, B$  称为曲面的曲纹坐标或高斯坐标,是曲面的自然参数(内蕴几何量),与椭圆球面在欧氏空间的位置没有关系,椭圆球面的全部几何性质由其第一、第二基本形式决定。

椭圆球面或球面的黎曼度量张量严格定义了椭圆球面是黎曼流形。直观上,椭圆球面的黎曼几何特征可以从“过椭圆球面上的‘直线’(即大地线)外一点不能作任何‘直线’与该‘直线’平行”“椭圆球面上三角形的内角和大于  $180^\circ$ ”“椭圆球面的高斯曲率为正”(见 §3.2)等方面得到最直观的理解和认识,如图 2 所示。

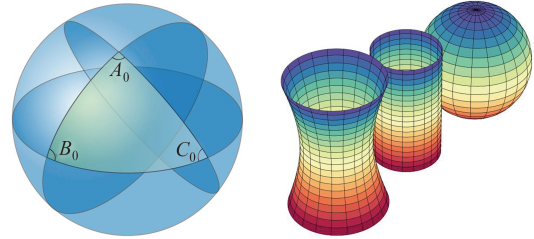
### 2.2 椭圆球面的高斯曲率及其不可展性

由椭圆球面的第一基本形式和第二基本形式的比值计算过椭圆球面上某点的法截线的曲率:

$$\kappa_n = \frac{M (dB)^2 + N \cos^2 B (dL)^2}{M^2 (dB)^2 + N^2 \cos^2 B (dL)^2} \quad (9)$$

记该法截线在该点的大地方位角为  $A$ ,有:

$$\tan A = \frac{N \cos B dL}{M dB} \quad (10)$$



(a)  $A_0 + B_0 + C_0 > 180^\circ$  (b) 高斯曲率为负、零、正的曲面

图 2 椭圆球面或球面的黎曼几何特征

Fig. 2 Riemannian Geometric Characteristics of Ellipsoid or Sphere

将式(10)代入式(9),可得沿大地方位角  $A$  的法截线的曲率:

$$\kappa_A = \frac{M + N \cos^2 B (dL/dB)^2}{M^2 + N^2 \cos^2 B (dL/dB)^2} = \frac{1}{M} \cos^2 A + \frac{1}{N} \sin^2 A \quad (11)$$

式(11)即为计算法截线曲率的欧拉公式<sup>[4, 21]</sup>。

特别地,当大地方位角  $A = 0^\circ$  或  $A = 90^\circ$  时,可求得子午圈和卯酉圈的曲率分别为  $1/M$  和  $1/N$ ,对应的曲率半径即为  $M$  和  $N$ ,是椭圆球面的主曲率和主曲率半径。由主曲率可以定义椭圆球面的高斯曲率:

$$K_g = \frac{1}{MN} \neq 0 \quad (12)$$

当  $e = 0$  时,  $M = N = R$ ,易求得半径为  $R$  球面的高斯曲率为  $K_s = 1/R^2 \neq 0$ 。

根据微分几何原理,高斯曲率是曲面的内蕴几何量,与曲面嵌入三维空间的方式无关,曲面是可展面的充分必要条件是曲面上的高斯曲率处处为零。因此,椭圆球面或球面本质上属于非欧几何面,其不可展性是由其高斯曲率决定的。

### 2.3 椭圆球面与平面的不同胚性

除上述椭圆球面的不可展性外,椭圆球面与平面的拓扑关系还体现在局部的同胚性和整体的不同胚性。前已述及,椭圆球面  $\mathbb{E}_{(a,e)}^2$  或球面  $S_R^2$  是二维黎曼流形,“局部”同胚于二维欧氏空间平面  $\mathbb{R}^2$ 。但在整体上,根据拓扑学原理<sup>[22]</sup>,椭圆球面或球面同胚于扩充复平面,而穿孔椭圆球面或穿孔球面同胚于欧氏平面。

在复分析理论中<sup>[23]</sup>,将复平面加上无穷远点定义为扩充复平面或黎曼球面,记为  $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 。将黎曼球面看作一维复流形,黎曼球面可以由两个图卡描述,而每个图卡的定义域都是复平面  $\mathbb{C}$ 。设  $\zeta \in \mathbb{C}, \xi \in \mathbb{C}$ ,则转移映射定义了

一个复流形,即黎曼球面。转移映射计算式为:

$$\begin{cases} \zeta = \frac{1}{\xi} \\ \xi = \frac{1}{\zeta} \end{cases} \quad (13)$$

几何意义上,黎曼球面可以看成将复平面加无穷远点裹在球面上,如图 3 所示。

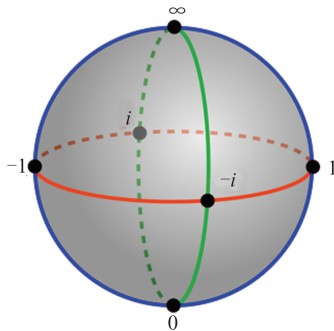


图 3 黎曼球<sup>[20]</sup>

Fig. 3 Riemann Sphere<sup>[20]</sup>

刺孔椭球和刺孔球的定义则是在椭球面或球面上挖去一个极点  $p$ 。显然,根据黎曼球的定义,刺孔椭球面 ( $\mathbb{E}^2 - p$ ) 或刺孔球面 ( $S^2 - p$ ) 同胚于欧氏平面。该原理在直观上是非常容易理解的:在椭球面或球面上挖去一个无穷小的洞(点),则可展开为平面。

球面投影深刻地诠释了黎曼球同胚于扩充复平面、刺孔球同胚于平面的原理。如图 4 所示,以北极点为投影中心的球面投影,南极点被投影到了无穷远。

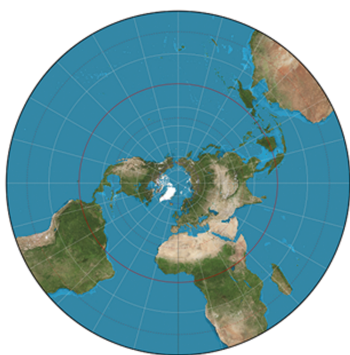


图 4 以北极点为投影中心的球面投影

Fig. 4 Stereographic Projection Centered by North Pole

### 3 地图投影流形映射原理的初步应用

#### 3.1 从流形映射原理认识地图投影的基本矛盾

关于地图投影的矛盾,经典的论述一般认为,“地球曲面的不可展性必然会导致投影变形”这一地球曲面与地图平面之间的矛盾,是地图投

影的根本矛盾、主要矛盾或基本矛盾,不同学者有不同的表述<sup>[1,3]</sup>。文献[24]将地球曲面的不可展性与平面之间的矛盾简单形象地概括为“圆与平”的矛盾。在经典的地图投影学著作中,关于“地球曲面不可展性”的论述,一般仅仅限于文字性描述,没有给出不可展性的确切定义。根据上述高斯曲率的定义,曲面是可展面的充分必要条件是曲面上的高斯曲率处处为零。因此,椭球面(或球面)是不可展面的数学本质是由其内在的几何特征——高斯曲率不为零所决定的。“圆与平”的矛盾对地图投影产生的影响是任何投影方式都不可避免地产生投影变形,常划分为长度变形、角度变形和面积变形。不难求证,圆柱面、圆锥面和平面的高斯曲率均为零,这正是经典的地图投影方式都选择圆柱面、圆锥面或平面作为地图投影的辅助面的数学原理所在。

此外,根据上述地图投影的流形映射原理及椭球面(或球面)的非欧几何特征及其与平面的拓扑关系,除“圆与平”的矛盾外,椭球面(或球面)与平面“不同胚”的矛盾也对地图投影产生深刻的影响。椭球面或球面同胚于扩充复平面、刺孔椭球面 ( $\mathbb{E}^2 - p$ ) 或刺孔球面 ( $S^2 - p$ ) 同胚于欧氏平面的原理表明椭球面或球面不同胚于平面。从拓扑同胚的角度,椭球面或球面比平面多了一个点。因此,若想完整地、无奇点地覆盖全球,至少需要两幅地图,任何一种地图投影方式在椭球面或球面上至少有一个奇异点<sup>[8,22]</sup>。

若把地图投影及其逆过程的函数模型概括为:

$$\begin{cases} x = f_1(B, L) \\ y = f_2(B, L) \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} B = g_1(x, y) \\ L = g_2(x, y) \end{cases} \quad (15)$$

“不同胚”的原理告诉人们,任何一种投影函数在全球区域至少存在一个不满足特定的投影条件或者没有定义的奇异点。因此,对于任何一种地图投影方式,确定了投影函数,就存在函数的定义域与值域问题。椭球面或球面与平面“不同胚”的性质,是任何地图投影都无法回避的基本矛盾之一,是确定投影函数的定义域与奇异点的数学原理基础,对地图投影的制图范围和投影性质产生直接影响。根据“不同胚”的原理,如何确定各种投影方式的定义域、值域和奇异点性质,应该是完整的地图投影理论的重要组成部分,而当前

地图投影学的理论与方法几乎忽略了这一点。

综合以上分析,地球曲面与制图平面之间的矛盾应该包括地球曲面的不可展性和地球曲面与平面不同胚性两个方面,可概括为“圆与平”的矛盾和“不同胚”的矛盾。此两个方面的矛盾分别由椭球面的不可展特性和与平面不同胚的特征所决定,是相互独立的,又统一于地球椭球面或球面的黎曼几何特征及其与制图平面的拓扑关系,并均对地图投影产生影响。

根据文献[25]对根本矛盾、主要矛盾和基本矛盾的概念剖析,基本矛盾是事物存在和发展的基础,决定事物发展过程的本质,贯穿事物发展过程的始终。因此,地图投影矛盾应该概括为基本矛盾,包括“圆与平”矛盾和“不同胚”矛盾两个方面。

### 3.2 流形映射原理在等角投影中的应用

根据上文分析,流形的概念起源于地图投影,地图投影的本质是非欧几何面(球面或椭球面)与欧氏空间平面间的流形映射;而椭球面或球面与平面的拓扑关系主要包括椭球面或球面的不可展性和其与平面的“不同胚”性两个方面。椭球面或球面的不可展性也即“圆与平”的矛盾对地图投影产生的影响是任何投影方式都不可避免地产生投影变形;“不同胚”的矛盾则是确定投影函数的定义域与奇异点的数学原理基础,对地图投影的制图范围和投影性质产生直接影响。本节主要从上述流形映射原理出发,探讨地图投影的流形映射原理在等角投影中的初步应用。

首先,定义复分析和黎曼流形领域的全纯函数、共形映射和等温坐标等数学原理<sup>[5, 21-22, 23]</sup>,分析其数学原理与等角投影的关系,然后在此基础上总结、分析等角投影的概括性定义及等角投影的充分必要条件。

定义2:全纯函数和共形映射。

在复分析领域,如果复变函数:

$$z = x + iy = f(u + iv) = x(u, v) + iy(u, v) \quad (16)$$

在非空、连通的开区域  $U$  内的每一点都是可微的,且满足柯西-黎曼方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u} \end{cases} \quad (17)$$

则称该函数在开区域  $U$  内是解析的,或称该函数为解析函数、全纯函数。柯西-黎曼方程也常称为柯西-黎曼条件。

式(16)、式(17)中的  $x, y, u$  和  $v$  均为抽象复变函数  $z$  的相应变量或参数。

进一步地,若该函数在开区域  $U$  内是双射的且全纯的函数,且其一阶导处处非零,则称该函数在开区域  $U$  内是共形映射或保角映射。在大地测量和地图投影领域,共形映射一般称为等角投影。

定义3:等温坐标。

对于二维黎曼流形,若选取参数  $(\bar{\mu}, \bar{\nu})$  使其第一基本形式为:

$$(ds)^2 = \rho^2(\bar{\mu}, \bar{\nu}) \left[ (d\bar{\mu})^2 + (d\bar{\nu})^2 \right] \quad (18)$$

式中,  $\rho^2(\bar{\mu}, \bar{\nu}) > 0$  且为光滑函数,则称参数  $(\bar{\mu}, \bar{\nu})$  为该二维流形的等温坐标。

式(18)表明,光滑函数  $\rho^2(\bar{\mu}, \bar{\nu})$  使得曲面上局部区域内的线素  $(ds)^2$  与平面上的线素  $(d\bar{\mu})^2 + (d\bar{\nu})^2$  成比例,且在任意一点沿各个方向的比例一致。因此,等温坐标的意义在于确定了可定向曲面(二维黎曼流形或一维复流形)与平面(二维欧氏空间或一维复平面)间的共形映射。

对于地球椭球,其第一基本形式可表达为:

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= M^2(dB)^2 + N^2 \cos^2 B(dL)^2 = \\ &= N^2 \cos^2 B \left[ \frac{M^2}{N^2 \cos^2 B} (dB)^2 + (dL)^2 \right] = \\ &= N^2 \cos^2 B \left[ (dq)^2 + (dL)^2 \right] \end{aligned} \quad (19)$$

式中,  $dq = MdB/(N \cos B)$ , 对其积分可得:

$$q = q(B) = \int_0^B \frac{1 - e^2}{(1 - e^2 \sin^2 B) \cos B} dB = \operatorname{artanh}(\sin B) - e \operatorname{artanh}(e \sin B) \quad (20)$$

在地图投影中,  $q$  称为等量纬度。显然,等量纬度  $q$  是等温坐标的分量,  $(q, L)$  构成了椭球面的等温坐标。

根据上述共形映射与等温坐标、等量纬度的定义,并考虑等角投影中的中央子午线  $L_0$  与经差  $l$  之间的关系  $l = L - L_0$ , 可以按如下方式定义一类等角投影。

定义4:等角投影。

在椭球面或球面上的某一非空、连通的开区域  $D$  内,若复变函数:

$$z = f(q + il) = x(q, l) + iy(q, l) \quad (21)$$

是双射全纯函数,且其一阶导处处非零,则称该函数在开区域  $D$  内确定了椭球面到平面的一个等角投影。

根据此定义,由式(21)定义的复变函数在开区域  $D$  内是等角投影的充分必要条件是该函数

在开区域  $D$  内解析的(柯西-黎曼条件蕴含其中)、双射的(一一对应),且其一阶导处处不为零。

进一步地,其长度比和子午线收敛角可表达为:

$$\begin{cases} m = \frac{d\sqrt{x^2+y^2}}{ds} = \left| \frac{dz}{ds} \right| = \left| \frac{dz/d\chi}{ds/d\chi} \right| \\ \tan \gamma = -\frac{\text{Im}(dz/d\chi)}{\text{Re}(dz/d\chi)} = \frac{\partial x/\partial l}{\partial y/\partial l} = -\frac{\partial y/\partial q}{\partial x/\partial q} \end{cases} \quad (22)$$

式中,  $\chi = q + il$ 。上述原理体现了从流形映射原理阐述等角投影在数学逻辑上的严密性,同时说明了柯西-黎曼条件仅是等角投影的必要条件,而非充分必要条件。等角投影的充要条件和椭球面或球面与平面“不同胚”的原理表明,对于任何一个等角投影,都存在确定投影函数的定义域、奇异点个数与分布(是否满足等角条件)的问题,这是完整认识投影性质的重要组成部分。

以高斯投影为例,根据上述原理,将子午线弧长公式扩充到复数域,即可得到高斯投影的复变函数表达:

$$\begin{cases} z = x + iy = \int_0^{B'} \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 B')^{3/2}} dB' \\ q + il = \text{artanh}(\sin B') - e \text{artanh}(e \sin B') \end{cases} \quad (23)$$

式中,  $B'$  为复变大地纬度。

进一步地,引入复数域第一类椭圆积分:

$$w = u + iv = \int_0^B \frac{1}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}} dB \quad (24)$$

即对应于椭圆函数  $\text{sn} w = \sin B$ ,代入式(23)则可得高斯投影的椭圆积分与椭圆函数表达<sup>[18,26]</sup>:

$$\begin{cases} z = f(w) = aE(w) - \frac{ae^2 \text{sn} w \text{cn} w}{\text{dn} w} = \\ aE(K+w) - aE \\ q + il = \text{artanh}(\text{sn} w) - e \text{artanh}(e \text{sn} w) \end{cases} \quad (25)$$

式中,  $K$  为第一类完全椭圆积分;  $E(w)$  和  $E(K+w)$  为第二类椭圆积分;  $\text{sn}()$ 、 $\text{cn}()$ 、 $\text{dn}()$  以及下文的  $\text{sn}'()$ 、 $\text{cn}'()$ 、 $\text{dn}'()$  为椭圆函数,定义可参见文献[26]。

将式(25)的实部和虚部分离,则可得高斯投影的实变函数表达形式<sup>[27]</sup>:

$$\begin{cases} x = aE(u) - \frac{ae^2 \text{sn} u \text{cn} u \text{dn} u}{\text{dn}^2 u + \text{dn}^2 v - 1} \\ y = av - aE'(v) + \frac{a(1-e^2) \text{sn}'v \text{cn}'v \text{dn}'v}{\text{dn}^2 u + \text{dn}^2 v - 1} \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} q = \text{artanh}(\text{sn} u \text{dn}'v) - e \text{artanh}(e \text{sn} u \text{dn}'v) \\ l = \text{artanh}(dc u \text{sc}'v) - e \text{artanh}(e dc u \text{sc}'v) \end{cases} \quad (27)$$

由式(24)、式(25)第二式及式(27)的反函数确定的投影称为 Thompson 投影,与高斯投影关系密切。

根据高斯投影的椭圆积分与椭圆函数表达,可以得到高斯投影的长度比和子午线收敛角公式:

$$\begin{cases} m = \frac{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi} \frac{\sqrt{1-\sin^2 u \text{dn}'^2 v}}{\sqrt{\text{dn}^2 u + \text{dn}'^2 v - 1}} \\ \tan \gamma = -(1-e^2) \text{sd} u \text{nc} u \text{sd}'v \text{cn}'v \end{cases} \quad (28)$$

式(23)、式(25)、式(26)和式(7)是高斯投影的解析函数表达,比高斯投影的描述性定义更为严谨、准确,且高斯投影必须满足的3个条件蕴含其中,即中央子午线投影后为直线,中央子午线投影后长度不变,投影具有等角性质。

利用高斯投影的椭圆积分与椭圆函数表达进行高斯投影计算,需要求解式(28)和式(29)反函数,文献[18]解决了该问题,并分析了基于椭圆积分与椭圆函数表达的高斯投影过程分为3步,反映了高斯投影的本质过程,如图5所示(引用并修改自文献[18],图中字母符号不再逐一说明)。

此外,高斯投影的椭圆积分与椭圆函数表达在实用上也具有意义,如在 Mathematica、Matlab 等数学软件中内置有椭圆函数与椭圆积分函数库,计算高斯投影坐标时可直接调用,使用 C++、Python 等程序设计语言的第三方库,如 Math Toolkit、mpmath、numpy 等,也可实现椭圆函数与椭圆积分的计算,进而可以直接实现高斯投影的计算。

最后,根据椭球面或球面与平面“不同胚”的原理,Thompson 投影和高斯投影都不可能无奇点地按等角条件映射全球。根据这一原理和等角投影的性质,笔者在文献[18]中分析了正轴墨卡托投影、Thompson 投影和高斯投影的基本定义域,现转录于表1。在此基本定义域内,任何一点都满足等角条件;若超出此基本定义域,则必然存在奇异点(不满足等角条件或投影函数没有定义)。

综合分析图5和表1可以发现,在  $B_1$  点, Thompson 投影满足柯西-黎曼条件,但其一阶导等于0,所以 Thompson 投影在该点不满足等角条件,其在该点的经纬网不再正交。Thompson 投影在  $B_1$  点的性质充分说明柯西-黎曼条件并不是等角投影的充要条件,而仅是必要条件。

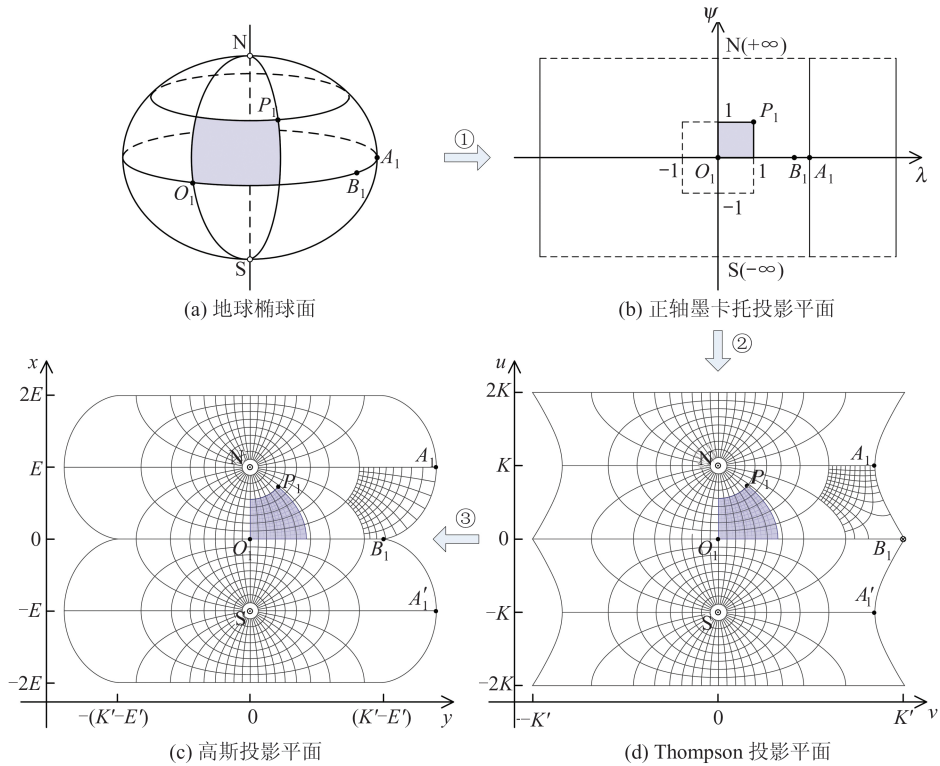


图5 高斯投影过程<sup>[18]</sup>

Fig. 5 Procedure of Gauss Projection<sup>[18]</sup>

表1 正轴墨卡托投影、Thompson 投影和高斯投影的基本定义域

Tab. 1 Fundamental Regions of the Normal Mercator, Thompson and Gauss Projections

投影名称	基本定义域
正轴墨卡托投影	$\{ B_1  < \pi/2,  L  < \pi\}$
Thompson 投影	$\{ B_1  < \pi/2,  L  < \pi/2\} - \{B_1 = 0, (1-e)\pi/2 \leq  L  < \pi/2\}$
高斯投影	$\{ B_1  < \pi/2,  L  < \pi/2\} - \{B_1 = 0, (1-e)\pi/2 \leq  L  < \pi/2\}$

## 4 结 语

投影一词起源于几何学,最初是指透视投影。回顾地图投影学的发展历史,地图投影也起源于透视投影,最先发展起来的是方位投影。然而,随着数学学科的发展,投影是微分几何、射影几何和拓扑流形学共同的研究主题,已不仅仅局限于透视投影。地图投影作为数学中的投影原理在地图学中的应用,绝大多数的地图投影也是非透视的数学变换。同时,分析表明,由于椭球面或球面的非欧几何特性,在基于欧氏几何的地图投影理论与实践,在对相关投影原理的论述、投影条件与投影性质的分析等方面已显现出很大的局限性。基于此,本文从高斯投影和拓扑流形的渊源出发,阐明了流形概念起源于高斯投影,并从流形映射的角度重新审视地图投影,深化了地图投影基本矛盾的数学内涵,拓展了地图投影基本矛盾的内容,并基于流形映射原理探讨了全纯函数、共形映

射和等角投影的关系,分析了等角投影的充分必要条件,以 Thompson 投影和高斯投影作为实例,验证了相关论断的正确性,初步探讨了流形映射原理在地图投影尤其是等角投影中的应用,对本文提出的从欧氏几何角度研究地图投影的局限性做出了有益的回应和探讨。

本文提出的从流形映射的角度认识、分析地图投影,仅初步探讨了流形映射原理在诠释地图投影基本矛盾、定义分析等角投影等方面的应用,但也一定程度上为地图投影学的研究提供了新的思路,期望该研究思路与途径能够进一步地在等角投影、等积投影和等距离投影等各种地图投影方式的定义、投影变换、投影的定义域与值域、整体拓扑与局部投影性质分析等方面发挥作用。

## 参 考 文 献

[1] Zhu Guorui. Cartography[M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2003. (祝国瑞. 地图学[M]. 武汉:



- 武汉大学出版社, 2003.)
- [2] Ren Liucheng. The Principle of Space Map Projection[M]. Beijing: Sino Maps Press, 2013. (任留成. 空间地图投影原理[M]. 北京: 测绘出版社, 2013.)
- [3] Bian Shaofeng, Li Houpu, Li Zhongmei. Research Progress in Mathematical Analysis of Map Projection by Computer Algebra[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2017, 46(10): 1557-1569. (边少锋, 李厚朴, 李忠美. 地图投影计算机代数分析研究进展[J]. 测绘学报, 2017, 46(10): 1557-1569.)
- [4] Kong Xiangyuan, Guo Jiming, Liu Zongquan. Foundation of Geodesy[M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2006. (孔祥元, 郭际明, 刘宗泉. 大地测量学基础[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2006.)
- [5] Li Yangcheng, Guo Ruizhi, Cui Denglan. Differential Manifold Foundation [M]. Beijing: Science Press, 2011. (李养成, 郭瑞芝, 崔登兰. 微分流形基础[M]. 北京: 科学出版社, 2011.)
- [6] Hu Peng, Hu Yuju. A Research on Map Projection and Its Classification[J]. *Acta Geodaetica et Cartographic Sinica*, 1988, 17(4): 286-294. (胡鹏, 胡毓钜. 关于地图投影及其分类的探讨[J]. 测绘学报, 1988, 17(4): 286-294.)
- [7] Hu Peng, You Lian, Yang Chuanyong, et al. Map Algebra [M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2006. (胡鹏, 游涟, 杨传勇, 等. 地图代数[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2006.)
- [8] Grafarend E W. Map Projections [M]. Berlin: Springer, 2014.
- [9] Liu Yi. Research on Isometric Map Projection Based on Riemann Surface[D]. Nanjing: Nanjing Normal University, 2015. (刘熠. 基于黎曼面的等角地图投影研究[D]. 南京: 南京师范大学, 2015.)
- [10] Bian Shaofeng, Li Houpu. Computer Algebra Analysis on Geodesy [M]. Beijing: Science Press, 2018. (边少锋, 李厚朴. 大地测量计算机代数分析[M]. 北京: 科学出版社, 2018.)
- [11] Bian Shaofeng, Li Houpu. Complex Function Representation of Gaussian Projection[M]. Beijing: Science Press, 2021. (边少锋, 李厚朴. 高斯投影的复变函数表示[M]. 北京: 科学出版社, 2021.)
- [12] Wang Rui, Ben Jin, Liang Xiaoyu, et al. Research on the Equal-Area Projection for the Construction of the Rhombic Triacanthahedron Grid Systems [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2023, DOI: 10.13203/j.whugis20220231. (王蕊, 賁进, 梁晓宇, 等. 菱形三十面体格网系统构建的等积投影方法研究[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2023, DOI: 10.13203/j.whugis20220231.)
- [13] Jiao Chenchen, Li Songlin, Li Houpu, et al. Non-iterative Algorithm for Calculating the Reference Latitude of Conformal Conic Projection[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2023, 48(2): 301-307. (焦晨晨, 李松林, 李厚朴, 等. 等角圆锥投影基准纬度非迭代算法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2023, 48(2): 301-307.)
- [14] Zhong Yexun, Hu Baoqing. Mathematical Cartography[M]. Beijing: Sino Maps Press, 2017. (钟业勋, 胡宝清. 数理地图学: 地图学及其数学原理[M]. 北京: 测绘出版社, 2017.)
- [15] Yan Jin, Yang Xuan, Li Ni, et al. Spherical Great Circle Arcs Based Indicators for Evaluating Distortions of Map Projections [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2020, 49(6): 711-723. (闫瑾, 杨绚, 李妮, 等. 地图投影变形球面大圆弧的度量指标[J]. 测绘学报, 2020, 49(6): 711-723.)
- [16] Krisztian K. Comparing Finite and Infinitesimal Map Distortion Measures [J]. *International Journal of Cartography*, 2019, 5(1): 3-22.
- [17] Bian Shaofeng, Li Zhongmei, Li Houpu. The Non-singular Formula of Gauss Projection in Polar Regions by Complex Numbers [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2014, 43(4): 348-352. (边少锋, 李忠美, 李厚朴. 极区非奇异高斯投影复变函数表示[J]. 测绘学报, 2014, 43(4): 348-352.)
- [18] Guo J C, Shen W B, Ning J S. Development of Lee's Exact Method for Gauss-Krüger Projection [J]. *Journal of Geodesy*, 2020, 94(6): 58.
- [19] Liu Yuhui, Qu Anjing. Map Projections and the Origin of Manifold [J]. *Studies in Philosophy of Science and Technology*, 2016, 33(6): 83-87. (刘宇辉, 曲安京. 地图投影与流形的起源[J]. 科学技术哲学研究, 2016, 33(6): 83-87.)
- [20] Chen Huiyong. The Origin of Thought of Riemannian Geometry—From the View Point of Geometry, Physics and Philosophy [J]. *Journal of Inner Mongolia Normal University (Natural Science Edition)*, 2020, 49(5): 398-405. (陈惠勇. 黎曼几何学思想的渊源: 几何、物理与哲学的视角[J]. 内蒙古师范大学学报(自然科学汉文版), 2020, 49(5): 398-405.)
- [21] Su Buqing, Hu Hesheng, Shen Chunli, et al. Differential Geometry [M]. Beijing: People's Education Press, 1979. (苏步青, 胡和生, 沈纯理, 等. 微分几何[M]. 北京: 人民教育出版社, 1979.)
- [22] Munkres J R. Topology [M]. Beijing: China Machine Press, 2004.
- [23] Lin Xiaolin, Bai Yunxiao, Wang Xiaoqin, et al. Complex Function and Integral Transform [M]. Bei-

- jing: Science Press, 2016. (蔺小林, 白云霄, 王晓琴, 等. 复变函数与积分变换[M]. 北京: 科学出版社, 2016.)
- [24] Huang Yi, Wang Yunjia. Penetration of Dialectics in Cartography Course and Improvement of Learning Transfer[J]. *Geomatics & Spatial Information Technology*, 2018, 41(5): 5-7. (黄翌, 汪云甲. 辩证法在地图学中渗透及促进学习迁移的探索[J]. 测绘与空间地理信息, 2018, 41(5): 5-7.)
- [25] Li Taijun. On the Differences and Relations Between Basic Contradiction, Fundamental Contradiction and Main Contradiction[J]. *Journal of Yanbian University (Social Sciences Edition)*, 1980, 13(2): 11-14. (李太俊. 谈谈基本矛盾、根本矛盾、主要矛盾的区别和联系[J]. 延边大学学报(哲学社会科学版), 1980, 13(2): 11-14.)
- [26] Wang Zhuxi, Guo Dunren. *Special Functions* [M]. Beijing: Science Press, 2000. (王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论[M]. 北京: 科学出版社, 2000.)
- [27] Lee L P. The Transverse Mercator Projection of the Entire Spheroid[J]. *Empire Survey Review*, 1962, 16(123): 208-217.