



引文格式:刘猛,王正涛.基于拟最优正则化因子组的航空重力向下延拓迭代求解方法[J].武汉大学学报(信息科学版),2025,50(12):2450-2459.DOI:10.13203/j.whugis20230127

Citation:LIU Meng, WANG Zhengtao.Downward Continuation Iterative Regularization Solution Based on Quasi-Optimal Regularization Factor Set[J].Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2025, 50(12):2450-2459.DOI:10.13203/j.whugis20230127

基于拟最优正则化因子组的航空重力向下延拓 迭代求解方法

刘猛¹ 王正涛^{1,2}

1 武汉大学测绘学院,湖北 武汉,430079

2 武汉大学地球空间环境与大地测量教育部重点实验室,湖北 武汉,430079

摘要:迭代 Tikhonov 正则化和迭代 Landweber 正则化法是有效解决向下延拓不适定问题的两种迭代正则化算法。针对迭代正则化法中迭代次数和正则化参数选取问题,首先提出拟最优正则化因子组概念,系统分析二者在拟最优正则化因子组序列中的分布关系;然后提出一种迭代正则化法中最优正则化因子组的选取策略,并推导出 L 曲线法确定与迭代次数对应最优正则化参数的公式;最后通过重力场模型的模拟实验与传统向下延拓方法进行对比,验证了所提正则化因子组选取依据的可靠性。

关键词:向下延拓;Tikhonov 正则化;迭代正则化算法;L 曲线法

中图分类号:P223

文献标识码:A

收稿日期:2024-10-31

DOI:10.13203/j.whugis20230127

文章编号:1671-8860(2025)12-2450-10

Downward Continuation Iterative Regularization Solution Based on Quasi-Optimal Regularization Factor Set

LIU Meng¹ WANG Zhengtao^{1,2}

1 School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan 430079, China

2 Key Laboratory of Geospace Environment and Geodesy, Ministry of Education, Wuhan University, Wuhan 430079, China

Abstract: Objectives: This paper addresses a critical limitation hindering the practical application of widely used iterative regularization methods, such as Tikhonov regularization and Landweber regularization. The lack of a clear strategy for optimally pairing iteration counts with regularization parameters. **Methods:** The concept of a quasi-optimal regularization factor set is constructed. By analyzing the distribution of iteration counts and regularization parameters within these sets, a strategy for selecting the best regularization factor group is proposed. Furthermore, a formula is presented to determine the optimal regularization parameter corresponding to a given iteration count using the L-curve method. **Results:** Analysis of the extension error and the variation within quasi-optimal factor sets reveals a significant correlation between optimal regularization parameters and iteration counts. When the iteration count exceeds 10, the extension solutions corresponding to different quasi-optimal factor sets become nearly identical. For sufficiently large iteration counts, any quasi-optimal factor set yields similar effects. Compared with the traditional Tikhonov regularization, the proposed iterative method based on the new selection strategy produces smoother extension solutions with smaller errors. However, in regions with sharp data variations, some high-frequency signals may be filtered out as noise, leading to no significant improvement in extension performance there. **Conclusions:** The proposed iterative regularization algorithm incorporates the novel selection strategy, and

基金项目:国家自然科学基金(42274003,41974007,41774019)。

第一作者:刘猛,硕士,主要从事固体地球物理学研究。meng.liu@whu.edu.cn

通信作者:王正涛,教授。ztwang@whu.edu.cn

generates smoother and more accurate extension solutions than the traditional Tikhonov method. The results demonstrate its reliability and practical utility.

Key words: downward continuation; Tikhonov regularization; iterative regularization; L-curve

得益于全球定位系统(global positioning system, GPS)与现代重力测量技术的快速发展,航空重力测量技术已日趋完善。相较于传统的陆地、卫星观测,其核心优势在于能够突破地理环境的限制,高效地采集大范围、高精度的重力观测数据。因此,航空重力观测技术在提升中、短波重力场模型精度以及弥补卫星与陆地重力观测的不足方面,发挥着关键作用^[1-4]。

航空重力扰动通常在飞行航线上采集,为满足定量解释中数据需处于同一基准面的要求,需将原始观测数据向下延拓至地表或大地水准面。这一延拓过程本质上是属于典型的不适定问题,随着延拓深度增加,原始数据中的高频干扰会被显著放大,导致观测噪声的累积效应增强,从而使延拓结果呈现出明显的病态性^[5-7]。

为获取稳定的延拓结果,延拓方法的选择尤为关键。传统算法包括最小二乘配置法^[8-9]、等效源法^[10]、逆泊松积分法^[11]等。其中,逆泊松积分法因具有较好的普适性与计算便捷性而被广泛应用,但其延拓解的误差会随着延拓高度和采样点密度的增大而迅速提升^[12]。基于此,文献[13]提出 Tikhonov 正则化算法,通过在法方程中引入正则化参数以缓解不适定问题,在一定程度上起到了对高频噪声的压制作用,被广泛应用于向下延拓过程中^[14-17]。文献[18]对 Tikhonov 正则化方法进行了进一步推广,文献[19]推导了迭代 Landweber 和迭代 Tikhonov 正则化算法的频率域算子,文献[20]通过加入理想观测噪声对两种迭代正则化法在不同参数组下的滤波特性和迭代效果进行分析,验证了迭代正则化法的可靠性。迭代正则化法最终解的质量与迭代次数和正则化参数高度相关,但如何确定最优正则化因

子组仍缺乏明确准则。因此,研究其选取策略在地球位场数据处理领域具有重要意义。

本文针对航空观测数据的正则化向下延拓问题,分析了迭代 Tikhonov 和迭代 Landweber 正则化延拓方法的效果。引入拟最优正则化因子组,揭示了两种算法中拟最优正则化因子组序列内正则化参数和迭代次数的强相关关系。结果表明,当迭代次数较大时,各拟最优因子组所得延拓解在误差水平上趋于一致,此时任一拟最优正则化因子组均可视为最优正则化因子组。因此,本文提出可通过 L 曲线法计算任一较大迭代次数对应的最优正则化参数,从而获得稳定的延拓解。最后,通过重力场仿真试验,验证了本文所提正则化因子组选取策略的可靠性。

1 向下延拓理论方法

1.1 位场延拓

本文建立空间直角坐标系,其中 z 轴垂直向上,向下延拓示意图如图 1 所示。

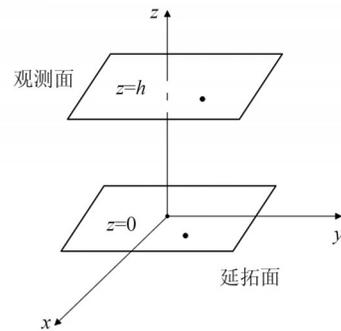


图 1 向下延拓示意图

Fig. 1 Schematic Diagram of Downward Continuation

根据 Dirichlet 方程^[21],可得到位场数据向上延拓^[22]的计算式为:

$$u_h(x, y) = \frac{h}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_0(\xi, \eta)}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + h^2]^{3/2}} d\xi d\eta \quad (1)$$

式中, (x, y) 、 (ξ, η) 分别为观测数据点、待求点; $u_h(x, y)$ 为观测面位场数据; h 为延拓高度; $u_0(\xi, \eta)$ 为延拓面位场数据。

$$U_0(u, v) = U_h(u, v) \cdot R^{-1}(u, v) = U_h(u, v) \cdot e^{2\pi h \sqrt{u^2 + v^2}} \quad (2)$$

式中, u, v 分别为 x, y 的频域变量; U_h, U_0 分别为 u_h, u_0 的对应频域数据; R^{-1} 为向下延拓算子。当

对式(1)进行傅里叶变换,并通过整理推导后,可得到位场数据在空间直角坐标系中的向下延拓表达式^[23]为:

u, v 较大时, $e^{2\pi h \sqrt{u^2 + v^2}}$ 呈指数型增大,高频噪声急剧增强,因此直接向下延拓会使得延拓解不稳定。

1.2 Tikhonov 正则化

针对向下延拓中的不适定问题, Tikhonov 正则化法利用正则化参数 α 抑制对高频干扰信号的增强现象^[24-28]。为便于理论分析与求解, 通常将式(1)转化为如下的算子方程形式:

$$f = Ag \quad (3)$$

式中, f 为观测值向量; A 为设计矩阵; g 为未知值向量。则 Tikhonov 正则化延拓解为:

$$g_\alpha = (A^T A + \alpha I)^{-1} A^T f \quad (4)$$

式中, I 为单位阵; α 为正则化参数, 且 $\alpha > 0$ 。通过傅里叶变换可得频域式^[29]:

$$\begin{cases} U_0(u, v) = R_{\text{Tikhonov}}^{-1}(u, v) \cdot U_h(u, v) \\ R_{\text{Tikhonov}}^{-1}(u, v) = \frac{R(u, v)}{R^2(u, v) + \alpha} \end{cases} \quad (5)$$

式中, R_{Tikhonov}^{-1} 为 Tikhonov 正则化法的向下延拓算子。

正则化参数 α 控制延拓解的精度, 可通过 L 曲线法确定。L 曲线法构建拟合误差 $Ag_\alpha - f$ 和正则解 g_α 的范数并绘制二者对应曲线, 该曲线形状一般与字母 L 相似, 其最大曲率所在拐点位置对应的正则化参数被视为理论最优的正则化参数^[30]。利用一阶和二阶差分可得 L 曲线的曲率 $c(\alpha)$ 为:

$$c(\alpha) = \frac{\rho'\theta'' - \rho''\theta'}{\left[(\rho')^2 + (\theta')^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (6)$$

式中, ρ, θ 分别为 $Ag_\alpha - f, g_\alpha$ 的范数。

利用 Parseval 等式将 ρ, θ 转换到频率域, 两者的计算式分别为:

$$\begin{cases} \rho = \| R(u, v) \cdot R_{\text{Tikhonov}}^{-1}(u, v) \cdot U_h(u, v) - U_h(u, v) \|_2 \\ \theta = \| R_{\text{Tikhonov}}^{-1}(u, v) \cdot U_h(u, v) \|_2 \end{cases} \quad (7)$$

当曲率 $c(\alpha)$ 取其最大值时, 其对应的 α 即为最优正则化参数。

1.3 迭代 Tikhonov 正则化法

传统 Tikhonov 正则化方法在向下延拓中应用广泛, 但仍存在局限性, 无法同时兼顾解的光滑性和精度。基于此, 文献[18]提出了迭代 Tikhonov 正则化方法:

$$\begin{cases} g_\alpha^0 = 0 \\ (A^T A + \alpha I) g_\alpha^n = \alpha g_\alpha^{n-1} + A^T f \end{cases} \quad (8)$$

经傅里叶变换和数学归纳法可得频域向下延拓的迭代 Tikhonov 正则化算法公式:

$$\begin{cases} U_0^n(u, v) = R_{\text{Tikhonov}}^{-1}(u, v) \cdot U_h(u, v) \\ R_{\text{Tikhonov}}^{-1}(u, v) = R^{-1}(u, v) \cdot \left[1 - \left(\frac{\alpha}{R^2(u, v) + \alpha} \right)^n \right] \end{cases} \quad (9)$$

式中, R_{Tikhonov}^{-1} 为向下延拓算子, 由迭代次数 n 和正则化参数 α 两个正则化因子决定, 以合理策略确定最优正则化因子组合是保证延拓解精度的关键。

1.4 迭代 Landweber 正则化法

迭代 Landweber 正则化法通过构造迭代向量序列收矩阵-向量乘法求解法方程^[31], 本质上是一种最速下降法, 迭代形式如下^[32]:

$$\begin{cases} g_\alpha^0 = 0 \\ g_\alpha^n = g_\alpha^{n-1} + \alpha A^T [f - A g_\alpha^{n-1}] \end{cases} \quad (10)$$

经傅里叶变换和数学归纳法可得频域向下延拓的迭代 Landweber 正则化算法公式:

$$\begin{cases} U_0^n(u, v) = R_{\text{Landweber}}^{-1}(u, v) \cdot U_h(u, v) \\ R_{\text{Landweber}}^{-1}(u, v) = R^{-1}(u, v) \cdot \left[1 - (1 - \alpha R^2(u, v))^n \right] \end{cases} \quad (11)$$

式中, $R_{\text{Landweber}}^{-1}$ 为迭代 Landweber 正则化算法向下延拓算子。

2 数值计算与结果分析

2.1 仿真航空重力观测数据

基于 EGM08 模型的 2 190 阶次, 采用 $5' \times 5'$ 采样间隔, 生成地理范围为 $80^\circ \text{W} \sim 85^\circ \text{W}$, $37^\circ \text{N} \sim 42^\circ \text{N}$, 高程分别为 0 km 和 6 km 处的重力扰动数据作为理论真值。为模拟真实航空观测环境, 向数据中添加标准差为 2 mGal 的高斯白噪声, 并选用均方根误差 (root mean square error, RMSE) 作为评价指标, 仿真数据的详细参数见表 1。在后续计算中, 使用不同延拓方法及参数进行处理, 并通过移去-恢复法 (选用 220 阶 EIGEN-6C4 模型) 进行比较, 以评估各方法的可靠性。

2.2 Tikhonov 正则化

通过绘制 L 曲线并计算其曲率, 确定了最优正则化参数, 其结果如图 2 所示。由图 3 与表 2 中延拓结果与理论真值的差异可以看出, 即使是理想化模拟观测数据, 直接向下延拓所得解同样表现出明显的病态性, 噪声被显著扩大。而 Tikhonov 正则化算法能有效压制噪声, 抑制延拓过

表 1 仿真数据信息统计表/mGal

类别	最大值	最小值	平均值	RMSE
地表重力扰动真值 ($h=0$ km)	61.72	-67.72	-17.98	25.77
航空重力扰动真值 ($h=6$ km)	36.01	-55.79	-17.84	23.23
2 mGal 观测噪声	7.19	-7.74	0.00	1.99
仿真观测数据 ($h=6$ km)	38.55	-58.51	-17.84	23.32

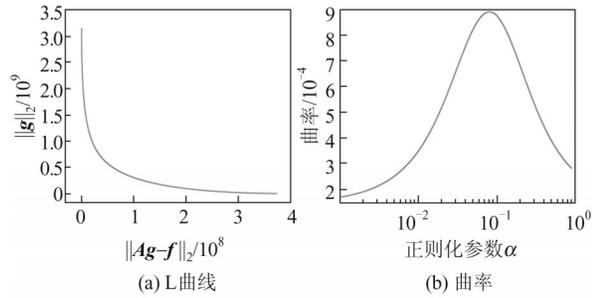


图 2 L 曲线及其曲率图

Fig. 2 Diagram of L-Curve and Its Curvature

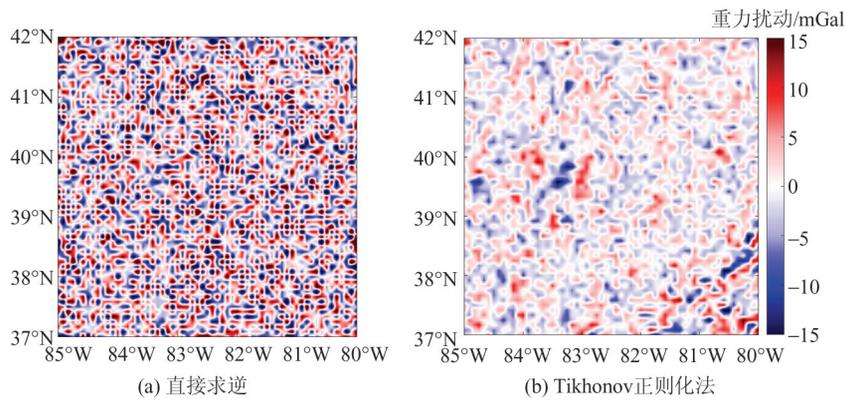


图 3 延拓解与理论真值差异分布图

Fig. 3 Difference Between Continued Values and True Values

表 2 两种向下延拓方法的结果与理论真值差异统计表

向下延拓方法	正则化参数	最大值/mGal	最小值/mGal	平均值/mGal	RMSE/mGal
直接求逆		39.796	-39.199	0.010	12.640
Tikhonov 正则化法	0.082 3	17.322	-20.304	0.016	4.155

程的不稳定性,得到更为可靠的解。

2.3 迭代 Tikhonov 正则化法

图 4(a)为不同正则化参数下,迭代 Tikhonov 正则化算法延拓解的 RMSE 和迭代次数的关系。由图 4(a)可以看出,在一定范围内迭代次数具有正则化效果,但当次数超过最优值时,延拓解发散,表现出半收敛特征。当正则化参数 α 固定时,存在唯一迭代次数 n_α 使得延拓解最优,二者构成一个拟最优正则化因子组。因此,改变正则化参数即可得到一系列拟最优正则化因子组序列。图 4(b)为不同迭代次数下延拓解 RMSE 随正则化参数的变化。由图 4(b)可以看出,当迭代次数 n 确定时,同样存在唯一正则化参数 α_n 使得延拓效果最佳,改变 n 则可得到另一组拟最优正则化因子组序列。

图 5 为同一序列内迭代 Tikhonov 正则化参数与迭代次数的关系,由图 5 可以看出,二者呈强

线性相关。随着迭代次数或正则化参数增大,拟最优因子组对应的延拓效果有小幅提升;但在超过一定范围后,不同因子组所得结果差异极小,此时任一拟最优正则化因子组均可视为最佳选择。

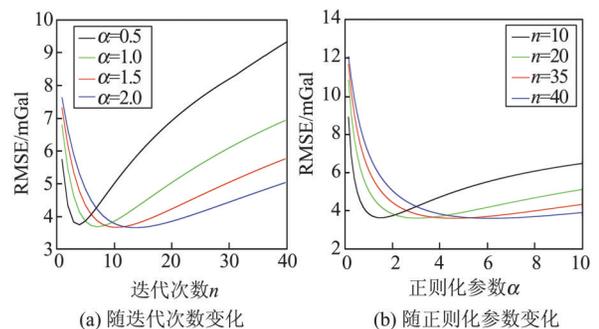


图 4 延拓解 RMSE 随迭代 Tikhonov 正则化因子变化

Fig. 4 Variation Curve of Continued RMSE with Regularization Factors of Iterative Tikhonov Regularization Method

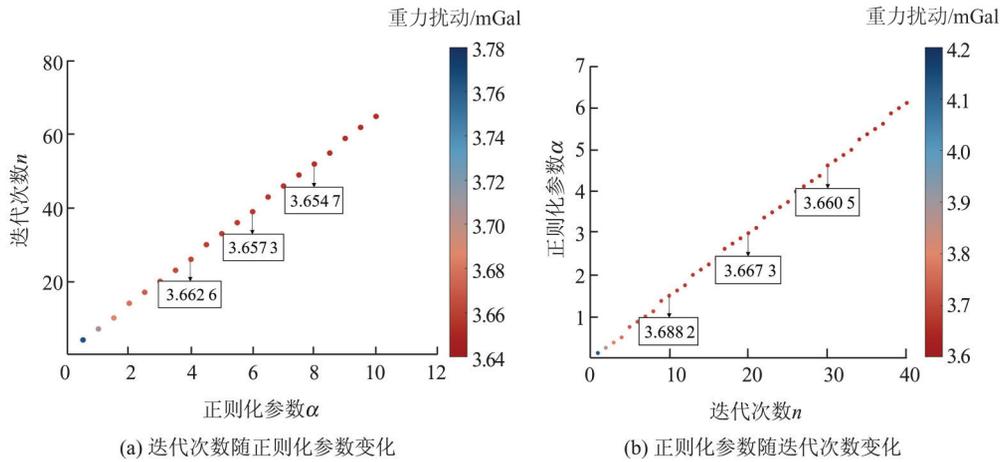


图5 拟最优迭代Tikhonov正则化因子组序列中正则化因子分布

Fig. 5 Distribution of Regularization Factors in the Quasi-Optimal Regularization Factor Set of Iterative Tikhonov Regularization Method

基于上述特性,在使用迭代Tikhonov正则化法对实际观测数据进行向下延拓时,可采用以下策略得到稳定解:(1)选取一个足够大的迭代次数 n ,通常取 n 为30左右即可;(2)利用L曲线法确定对应的正则化参数 α_n ;(3)将 n 与 α_n 代入式(9)进行计算。

此时,式(7)可改写为如下形式::

$$\begin{cases} \rho = \|R(u, v) \cdot R_{\text{Tikhonov}}^{-1}(u, v) \cdot U_h(u, v) - U_h(u, v)\|_2 \\ \theta = \|R_{\text{Tikhonov}}^{-1}(u, v) \cdot U_h(u, v)\|_2 \end{cases} \quad (12)$$

图6为L曲线及对应曲率图,由图6可以看

出,不同迭代次数下的L曲线形态基本一致,所得4个拟最优正则化因子组内,其迭代次数与正则化参数也符合图5所示的线性关系。结合图7和表3中各因子组对应的延拓结果可知,不同因子组的延拓效果基本接近, RMSE 稳定在 3.92 mGal 左右。与传统正则化方法相比,该方法获得的解具有更高的平滑度和精度;但在原始重力扰动数据变化较为剧烈的右下和左中区域,由于高频信息含量较高,部分有效信息被滤除,导致估值偏差,因此在该类区域优化效果并不明显。

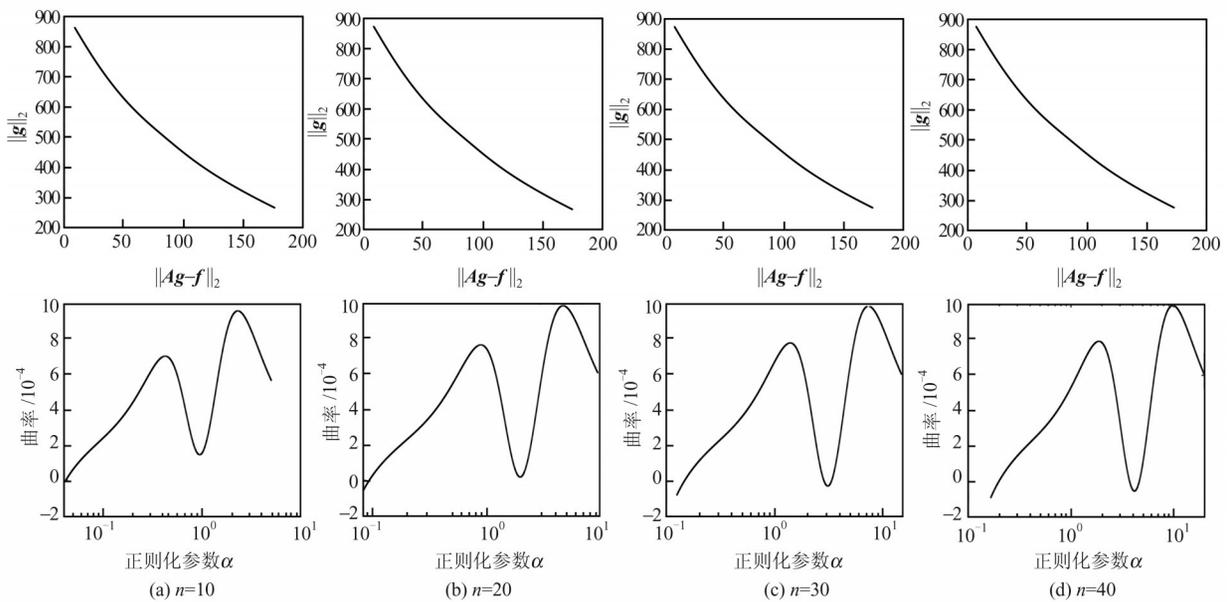


图6 4组迭代Tikhonov正则化次数对应的L曲线及曲率

Fig. 6 L-Curves and Corresponding Curvature Diagrams for Four Sets of Iteration Numbers in Iterative Tikhonov Regularization

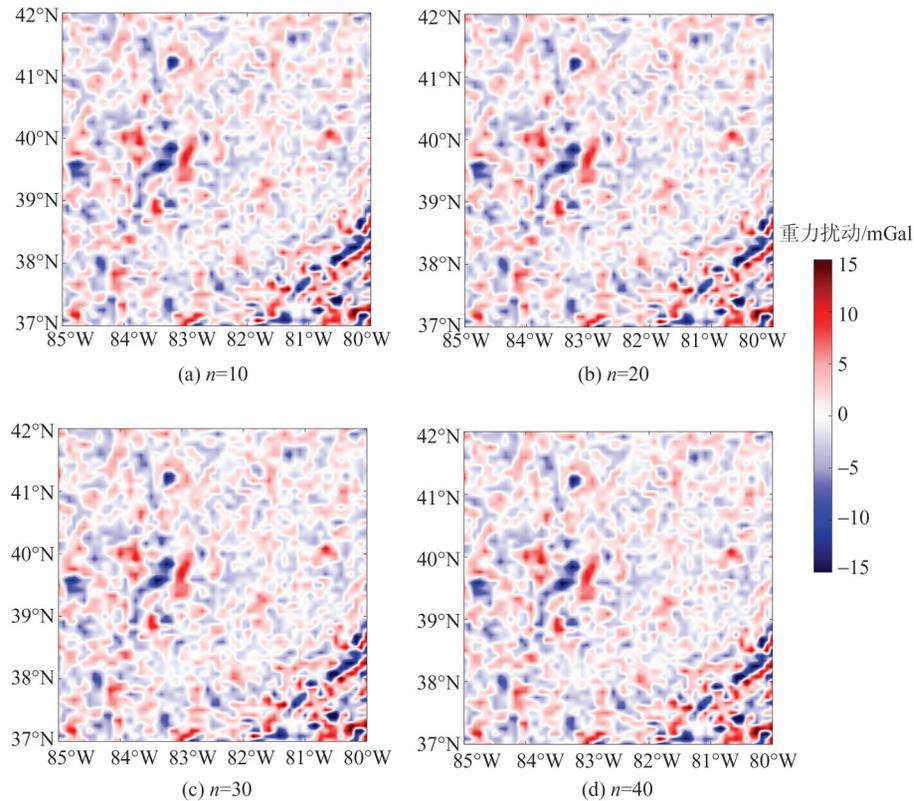


图 7 4 组拟 Tikhonov 正则化法拟最优因子组对应延拓解与理论真值差异分布

Fig. 7 Distribution of Difference Between Downward-Continued Solutions and Theoretical True Values for Four Quasi-Optimal Regularization Parameter Sets in Iterative Tikhonov Regularization

表 3 4 组 Tikhonov 正则化法拟最优正则化因子组的延拓结果与理论真值差异统计表

Table 3 Statistics of Differences Between Downward-Continued Results and Theoretical True Values for Four Quasi-Optimal Regularization Parameter Sets in Tikhonov Regularization

向下延拓方法	迭代次数	正则化参数	最大值/mGal	最小值/mGal	平均值/mGal	RMSE/mGal
迭代 Tikhonov 正则化法	10	2.28	18.28	-24.69	0.013	3.915
	20	4.82	18.54	-25.08	0.013	3.935
	30	7.38	18.63	-25.21	0.013	3.943
	40	9.83	18.61	-25.17	0.012	3.936

2.4 迭代 Landweber 正则化法

图 8(a) 和图 8(b) 分别展示了在不同正则化参数或迭代次数下,采用迭代 Landweber 正则化算法进行向下延拓所得结果的 RMSE 和另一因子的关系。与 §2.3 相同,在正则化参数 α 或迭代次数 n 取固定值时,存在唯一迭代次数 n_α 或正则化参数 α_n ,使得延拓效果最佳,由此也可得到两个拟最优正则化因子组序列。图 9 为同一序列内迭代 Landweber 正则化参数与迭代次数的关系,由图 9 可以看出,序列内两个正则化因子呈现明显反线性关系。

与 §2.3 结论相似,各拟最优正则化因子组的延拓效果基本一致。此外,由图 8(b) 可以看出,当正则化参数大于 2 时,延拓解出现发散。因此,在实际计算时,可先将正则化参数的搜索范围限

定在 $[0, 1]$ 区间内。基于此,处理实际观测数据时可采取与 §2.3 类似的策略确定正则化因子组,进而获得迭代 Landweber 正则化算法的最优延拓解。具体实现步骤为:(1)选取一个较大的迭代次数 n ;(2)利用 L 曲线法确定相应的正则化参数 α_n ;(3)将 n 和 α_n 代入式 (11) 进行计算。

此时,式 (7) 可改写为如下形式:

$$\begin{cases} \rho = \|R(u, v)R_{\text{Landweber}}^{-1}(u, v)U_h(u, v) - U_h(u, v)\|_2 \\ \theta = \|R_{\text{Landweber}}^{-1}(u, v) \cdot U_h(u, v)\|_2 \end{cases} \quad (13)$$

图 10 为不同迭代次数下采用 Landweber 正则化方法的 L 曲线及其对应曲率图。由图 10 可以看出,其相似图形所得 4 个拟最优正则化因子

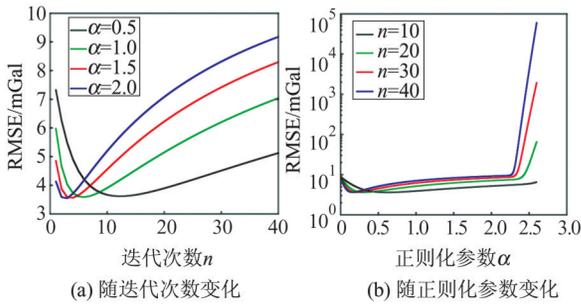


图8 迭代Landweber正则化法中延拓解RMSE随正则化因子变化
Fig. 8 Variation Curve of Continued RMSE with Regularization Factors of Iterative Landweber Regularization Method

组内,迭代次数与正则化参数仍符合图8所示的

反线性关系。各因子组对应的延拓结果如图11和表4所示,其结果基本一致, RMSE稳定在约3.94 mGal。除高频信号较丰富的区域外,整体延拓效果均得到一定改善,进一步验证了本文所提策略的可靠性。

3 结语

本文对向下延拓过程中的迭代正则化延拓方法进行了深入研究,构建了拟最优正则化因子组,基于此提出了最优正则化因子组的确定策略,利用重力场模型构建了模拟试验,与传统向下延拓方法进行了对比,总结如下:

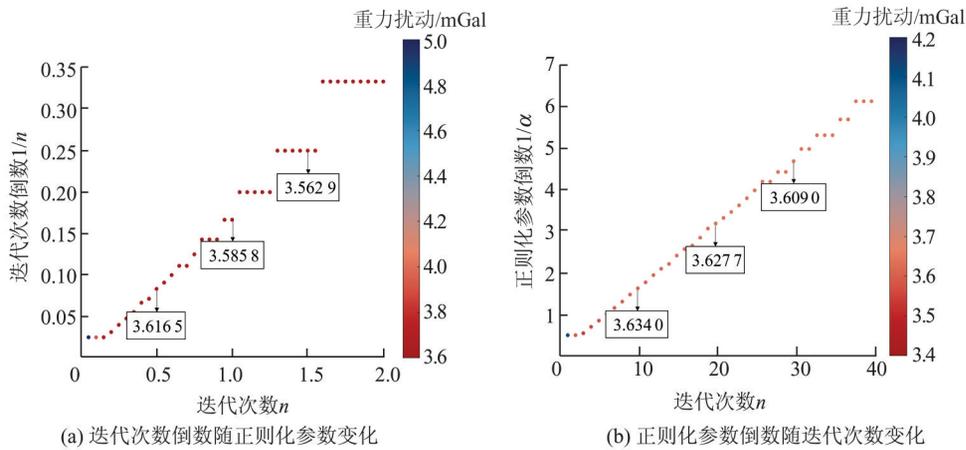


图9 拟最优迭代Landweber正则化因子组序列中正则化因子分布
Fig. 9 Distribution of Regularization Factors in the Quasi-Optimal Regularization Factor Set of Iterative Landweber Regularization Method

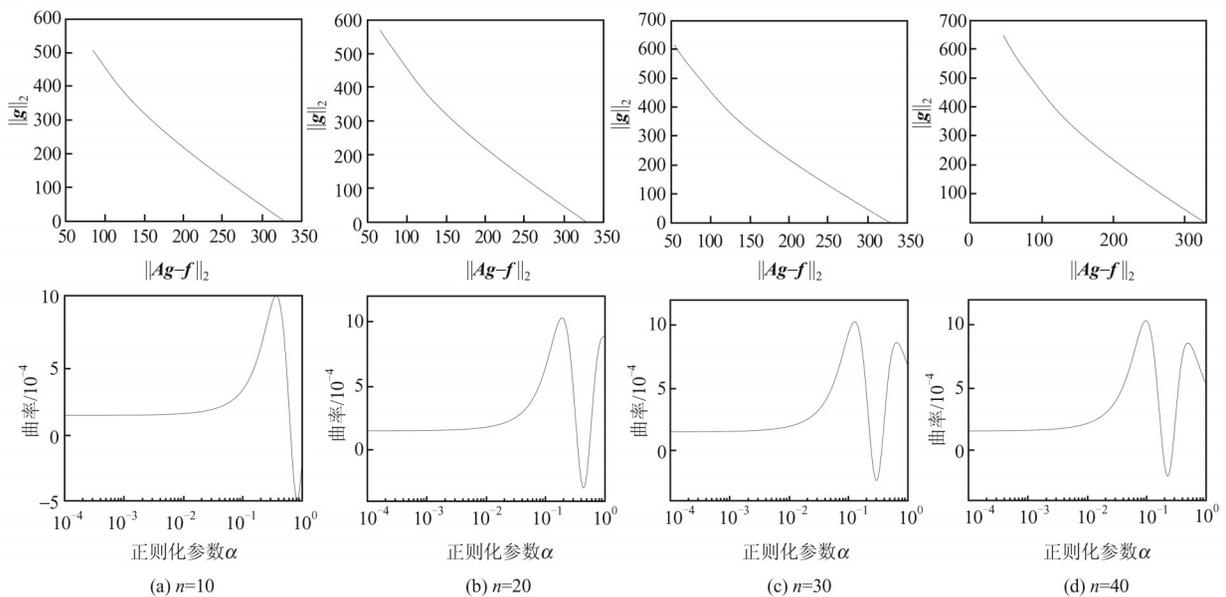


图10 4组迭代Landweber正则化次数对应的L曲线及曲率
Fig. 10 L-Curves and Corresponding Curvature Diagrams for Four Sets of Iteration Numbers in Iterative Landweber Regularization

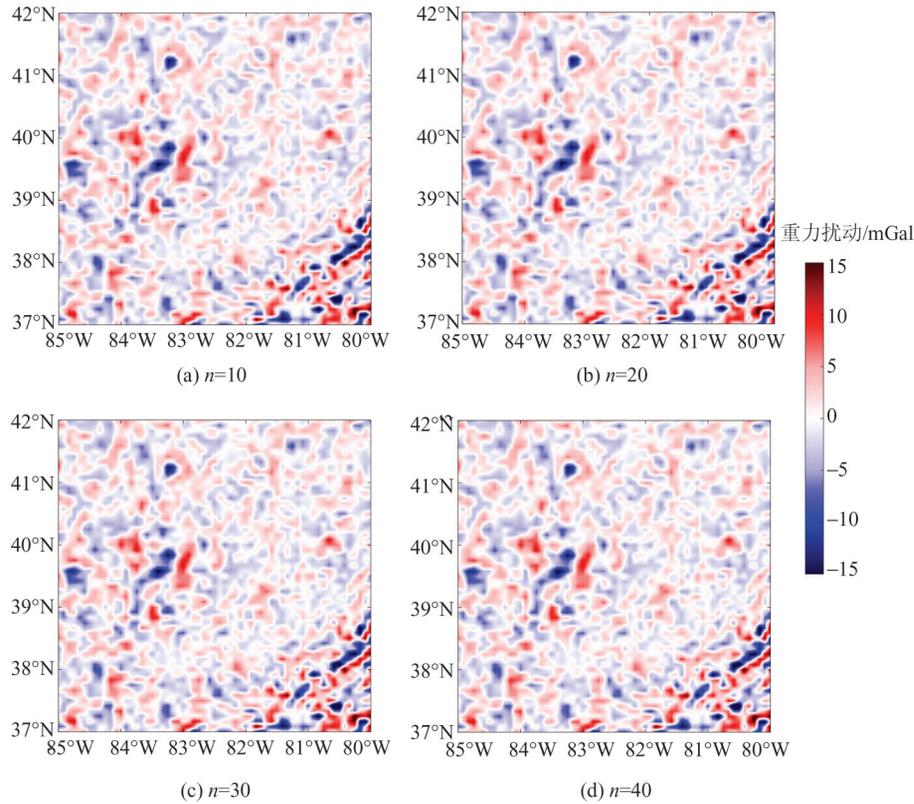


图 11 4 组拟 Landweber 正则化法拟最优因子组对应延拓解与理论真值差异分布

Fig. 11 Distribution of Difference Between Downward-Continued Solutions and Theoretical True Values for Four Quasi-Optimal Regularization Parameter Sets in Iterative Landweber Regularization

表 4 4 组 Landweber 正则化法拟最优正则化因子组的延拓结果与理论真值差异统计表

Table 4 Statistics of Difference Between Downward-Continued Results and Theoretical True Values for Four Quasi-Optimal Regularization Parameter Sets in Landweber Regularization

向下延拓方法	迭代次数	正则化参数	最大值/mGal	最小值/mGal	平均值/mGal	RMSE/mGal
迭代 Landweber 正则化法	10	0.36	19.10	-25.85	0.012	3.967
	20	0.19	18.89	-25.53	0.012	3.949
	30	0.13	18.83	-25.46	0.012	3.947
	40	0.10	18.77	-25.37	0.012	3.940

1) 本文研究表明, 迭代 Tikhonov 和 Landweber 正则化算法中, 拟最优正则化因子组序列内迭代次数和正则化参数分别呈线性和反线性关系, 存在显著相关性。

2) 迭代次数在 10 以上时, 各拟最优正则化因子组所得结果与真实值间的误差并无显著差异, 此时任一组拟最优正则化因子组均可视为最优组合。因此在处理实际数据时, 可适当确定较大迭代次数, 利用 L 曲线法得到对应正则化参数, 构建最优正则化因子组。

3) 相比于传统正则化算法, 迭代正则化算法所得延拓解更为平滑, 与真实值更为接近, 但在变化比较强烈区域, 对高频信号的处理仍显粗糙, 延拓解并无明显优化。

参 考 文 献

[1] CARPENTER C. Machine-Learning Method Determines Salt Structures from Gravity Data [J]. *Journal of Petroleum Technology*, 2021, 73 (2): 70-71.

[2] YE Z H, ZHANG Z H, WÜNNEMANN B, et al. High-Precision Downward Continuation of the Potential Field Based on the D-Unet Network [J]. *Frontiers in Earth Science*, 2022, 10: 897055.

[3] 邓凯亮, 黄漠涛, 吴太旗, 等. 利用高阶径向导数带限模型进行重力向下延拓计算[J]. *武汉大学学报(信息科学版)*, 2024, 49(3): 442-452.

DENG Kailiang, HUANG Motao, WU Taiqi, et al. Downward Continuation of Gravity Using the Band-Limited Models for High-Order Radial Deriva-

- tives of Gravity Anomaly[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2024, 49(3): 442-452.
- [4] 郭金运, 张鸿飞, 李真, 等. 多源船载重力异常数据的联合再处理: 以墨西哥湾为例[J]. *武汉大学学报(信息科学版)*, 2025, 50(7): 1277-1290.
GUO Jinyun, ZHANG Hongfei, LI Zhen, et al. Joint Reprocessing of Multi-Sources Shipborne Gravity Anomalies: A Case Study of Gulf of Mexico [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2025, 50(7): 1277-1290.
- [5] CLARKE G K C. Optimum Second-Derivative and Downward-Continuation Filters [J]. *Geophysics*, 1969, 34(3): 424-437.
- [6] FEDI M, FLORIO G. A Stable Downward Continuation by Using the ISVD Method[J]. *Geophysical Journal International*, 2002, 151(1): 146-156.
- [7] KERN M, SCHWARZ K P. A Comparison of Direct and Indirect Numerical Methods for the Downward Continuation of Airborne Gravity Data [C]// *Vistas for Geodesy in the New Millennium*, Berlin, Heidelberg, Germany, 2002.
- [8] FORSBERG R. A New Covariance Model for Inertial Gravimetry and Gradiometry[J]. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 1987, 92(B2): 1305-1310.
- [9] 陈欣, 翟国君, 暴景阳, 等. 航空重力向下延拓的最小二乘配置Tikhonov正则化法[J]. *武汉大学学报(信息科学版)*, 2018, 43(4): 578-585.
CHEN Xin, ZHAI Guojun, BAO Jingyang, et al. Least Squares Collocation-Tikhonov Regularization Method for the Downward Continuation of Airborne Gravity Data [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2018, 43(4): 578-585.
- [10] DAMPNEY C N G. The Equivalent Source Technique[J]. *Geophysics*, 1969, 34(1): 39-53.
- [11] KERN M. An Analysis of the Combination and Downward Continuation of Satellite, Airborne and Terrestrial Gravity Data[D]. Calgary: University of Calgary, 2003.
- [12] A Comparison of Different Downward Continuation Methods for Airborne Gravity Data [J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2004, 47(6): 1143-1149.
- [13] TIKHONOV A I. Solution of Incorrectly Formulated Problems and the Regularization Method[J]. *Soviet Math Dokl.* 1963, 5(1): 115-128.
- [14] LI Y G, DEVRIESE S G R, KRAHENBUHL R A, et al. Enhancement of Magnetic Data by Stable Downward Continuation for UXO Application [J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2013, 51(6): 3605-3614.
- [15] ABEDI M, GHOLAMI A, NOROUZI G H. A Stable Downward Continuation of Airborne Magnetic Data: A Case Study for Mineral Prospectivity Mapping in Central Iran [J]. *Computers & Geosciences*, 2013, 52: 269-280.
- [16] XU P L. Determination of Surface Gravity Anomalies Using Gradiometric Observables [J]. *Geophysical Journal International*, 1992, 110(2): 321-332.
- [17] 徐新强, 赵俊. 航空重力向下延拓的多参数正则化方法[J]. *武汉大学学报(信息科学版)*, 2020, 45(7): 956-963.
XU Xinqiang, ZHAO Jun. A Multi-parameter Regularization Method in Downward Continuation for Airborne Gravity Data [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2020, 45(7): 956-963.
- [18] SCHROTER T, TAUTENHAHN U. On the Optimality Regularization Methods for Solving Linear Ill-Posed Problems [J]. *Journal of Analysis and Its Applications*, 1994, 13(4): 297-710.
- [19] 曾小牛, 李夕海, 韩绍卿, 等. 位场向下延拓三种迭代方法之比较[J]. *地球物理学进展*, 2011, 26(3): 908-915.
ZENG Xiaoniu, LI Xihai, HAN Shaoqing, et al. A Comparison of Three Iteration Methods for Downward Continuation of Potential Fields [J]. *Progress in Geophysics*, 2011, 26(3): 908-915.
- [20] LIU X G, LI Y C, XIAO Y, et al. Downward Continuation of Airborne Geomagnetic Data Based on Two Iterative Regularization Methods in the Frequency Domain [J]. *Geodesy and Geodynamics*, 2015, 6(1): 34-40.
- [21] BLAKELY R J. *Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications* [M]. New York: Cambridge University Press, 1995.
- [22] MARTINEC Z. Stability Investigations of a Discrete Downward Continuation Problem for Geoid Determination in the Canadian Rocky Mountains [J]. *Journal of Geodesy*, 1996, 70(11): 805-828.
- [23] SCHWARZ K P, SIDERIS M G, FORSBERG R. The Use of FFT Techniques in Physical Geodesy [J]. *Geophysical Journal International*, 1990, 100(3): 485-514.
- [24] GOLUB G H, HEATH M, WAHBA G. Generalized Cross-Validation as a Method for Choosing a Good Ridge Parameter [J]. *Technometrics*, 1979, 21(2): 215-223.
- [25] HOERL A E, KENNARD R W. Ridge Regres-

- sion; Biased Estimation for Nonorthogonal Problems [J]. *Technometrics*, 2000, 42(1): 80-86.
- [26] 黄谟涛, 邓凯亮, 欧阳永忠, 等. 海空重力测量及应用技术研究若干进展[J]. *武汉大学学报(信息科学版)*, 2022, 47(10): 1635-1650.
- HUANG Motao, DENG Kailiang, OUYANG Yongzhong, et al. Development and Study in Marine and Airborne Gravimetry and Its Application [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2022, 47(10): 1635-1650.
- [27] MA T, WU M P, HU X P, et al. A Regularization Method for Downward Continuation of Potential Fields [J]. *Applied Mechanics and Materials*, 2011, 135/136: 132-139.
- [28] 钟炆, 刘辉. 基于 BP 神经网络的磁异常向下延拓方法[J]. *舰船科学技术*, 2023, 45(18): 133-138.
- ZHONG Yang, LIU Hui. Downward Extension Method of Magnetic Anomaly Based on BP Neural Network [J]. *Ship Science and Technology*, 2023, 45(18): 133-138.
- [29] 徐世浙. 迭代法与 FFT 法位场向下延拓效果的比较[J]. *地球物理学报*, 2007, 50(1): 285-289.
- XU Shizhe. A Comparison of Effects Between the Iteration Method and FFT for Downward Continuation of Potential Fields [J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2007, 50(1): 285-289.
- [30] HANSEN P C, O' LEARY D P. The Use of the L-Curve in the Regularization of Discrete Ill-Posed Problems [J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1993, 14(6): 1487-1503.
- [31] LANDWEBER L. An Iteration Formula for Fredholm Integral Equations of the First Kind [J]. *American Journal of Mathematics*, 1951, 73(3): 615-624.
- [32] SCHERZER O. A Modified Landweber Iteration for Solving Parameter Estimation Problems [J]. *Applied Mathematics and Optimization*, 1998, 38(1): 45-68.