

武汉大学学报(信息科学版)

Geomatics and Information Science of Wuhan University

ISSN 1671-8860, CN 42-1676/TN

《武汉大学学报(信息科学版)》网络首发论文

题目: 基于拟最优正则化因子组的航空重力向下延拓迭代求解方法
作者: 刘猛, 王正涛
DOI: 10.13203/j.whugis20230127
收稿日期: 2023-10-31
网络首发日期: 2024-01-08
引用格式: 刘猛, 王正涛. 基于拟最优正则化因子组的航空重力向下延拓迭代求解方法 [J/OL]. 武汉大学学报(信息科学版). <https://doi.org/10.13203/j.whugis20230127>



网络首发: 在编辑部工作流程中, 稿件从录用到出版要经历录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿等阶段。录用定稿指内容已经确定, 且通过同行评议、主编终审同意刊用的稿件。排版定稿指录用定稿按照期刊特定版式(包括网络呈现版式)排版后的稿件, 可暂不确定出版年、卷、期和页码。整期汇编定稿指出版年、卷、期、页码均已确定的印刷或数字出版的整期汇编稿件。录用定稿网络首发稿件内容必须符合《出版管理条例》和《期刊出版管理规定》的有关规定; 学术研究成果具有创新性、科学性和先进性, 符合编辑部对刊文的录用要求, 不存在学术不端行为及其他侵权行为; 稿件内容应基本符合国家有关书刊编辑、出版的技术标准, 正确使用和统一规范语言文字、符号、数字、外文字母、法定计量单位及地图标注等。为确保录用定稿网络首发的严肃性, 录用定稿一经发布, 不得修改论文题目、作者、机构名称和学术内容, 只可基于编辑规范进行少量文字的修改。

出版确认: 纸质期刊编辑部通过与《中国学术期刊(光盘版)》电子杂志社有限公司签约, 在《中国学术期刊(网络版)》出版传播平台上创办与纸质期刊内容一致的网络版, 以单篇或整期出版形式, 在印刷出版之前刊发论文的录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿。因为《中国学术期刊(网络版)》是国家新闻出版广电总局批准的网络连续型出版物(ISSN 2096-4188, CN 11-6037/Z), 所以签约期刊的网络版上网络首发论文视为正式出版。

Doi: 10.13203/j.whugis20230127

引用格式：

刘猛, 王正涛, 等. 基于拟最优正则化因子组的航空重力向下延拓迭代求解方法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2023, Doi:10.13203/j.whugis20230127. (LIU Meng, WANG Zhengtao, et al. Downward Continuation Iterative Regularization Solution Based On Quasi Optimal Regularization Factor Set[J] *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2023, Doi:10.13203/j.whugis20230127.)

基于拟最优正则化因子组的航空重力向下延拓迭代 求解方法

刘猛¹ 王正涛^{1,2}

1. 武汉大学测绘学院, 湖北 武汉, 430079
2. 武汉大学地球空间环境与大地测量教育部重点实验室, 湖北 武汉, 430079

摘要：迭代 Tikhonov 正则化法和迭代 Landweber 正则化法是有效解决向下延拓不适定问题的两种迭代正则化算法。针对迭代正则化法中迭代次数和正则化参数选取问题, 构建拟最优正则化因子组概念, 对拟最优正则化因子组中迭代次数和正则化参数分布进行了分析, 提出了迭代正则化法中迭代次数和正则化参数最优组合的选取依据, 给出了利用 L 曲线法求取与迭代次数对应最优正则化参数的公式, 采用 EGM08 和 EIGEN-6C4 重力场模型设计了仿真实验, 与传统 Tikhonov 正则化法进行了比较分析, 验证了选取迭代正则化法正则化因子组依据的可靠性。

关键词：向下延拓; Tikhonov 正则化; 迭代正则化算法; L 曲线法

Downward Continuation Iterative Regularization Solution Based on Quasi Optimal Regularization Factor Set

LIU Meng¹ WANG Zhengtao^{1,2}

- 1 School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan 430079, China
2 Key Laboratory of Geospace Environment and Geodesy, Ministry of Education,
Wuhan University, Wuhan 430079, China

收稿日期: 2023-10-31

项目资助: 国家自然科学基金(42274003, 41974007, 41774019)。

第一作者: 刘猛, 硕士, 主要从事固体地球物理学研究。meng.liu@whu.edu.cn

通讯作者: 王正涛, 博士生导师, 教授, 主要从事物理大地测量学、卫星大地测量学、地磁学等方面的研究。ztwang@whu.edu.cn

Abstract: Objectives: Iterative Tikhonov regularization and iterative Landweber regularization are currently the two most commonly used iterative regularization algorithms, which can effectively solve the ill-posed problem during the continuation process. However, their optimal combination of iteration times and regularization parameters has not yet been determined, which limits their practicality. **Methods:** This paper constructs the concept of quasi-optimal regularization factor set and analyzes the distribution of iteration numbers and regularization parameters in the quasi-optimal regularization factor set. Based on this, a selection criterion for the optimal combination of iteration number and regularization parameter in iterative regularization algorithms is proposed, and a formula for using the L-curve method to obtain the optimal regularization parameter corresponding to the number of iterations is provided. **Results:** The study on the relationship between the extension error of iterative regularization algorithms and the variation of regularization factor sets shows that there is a significant correlation between the optimal regularization parameters and the number of iterations in the quasi optimal regularization factor set. When the number of iterations exceeds 10, the extension solutions corresponding to each quasi optimal regularization factor set are basically identical. When the number of iterations is large enough, any quasi optimal regularization factor set can be considered as the optimal regularization factor set. The iterative regularization algorithm based on the selected strategy in this article has a smoother extension solution and smaller error compared to the traditional Tikhonov regularization method. However, in areas with significant data changes, some high-frequency signals are filtered out as noise, and the extension effect is not significantly improved. **Conclusions:** The iterative regularization algorithm based on the selected strategy in this article has a smoother and smaller error extension solution compared to the traditional Tikhonov regularization method, which shows reliability and practicality.

Keywords: Downward Continuation, Tikhonov Regularization, Iterative Regularization, L-curve.

0 引言

随着 GPS、重力测量手段等的发展,航空重力测量技术逐渐成熟,相比于传统陆地、卫星等观测手段,航空重力观测不受区域环境影响,能有效获取大范围高精度的重力观测数据,提高中、短波重力场精度,填补卫星重力测量和陆地重力测量的空白^[1-4]。

航空重力测量通常在航线高度处进行,由于重力数据定量解释一般要求测量数据应分布在统一平面,因此在使用之前,实际观测数据需进行向下延拓,将其归算到地表或大地水准面上。而向下延拓作为一个典型不适定过程,其高频干扰信号随延拓深度明显增强,观测噪声累积放大,延拓解不稳定,呈现明显病态性^[5-7]。

因此,若想获取稳定的延拓值,需要谨慎选择延拓方法。经典的向下延拓方法主要有最小二乘配置法^[8-9]、等效源法^[10]、逆泊松积分法^[11]等。其中以求解第一边值问题的逆泊松积分法应用最广,但随着延拓高度的增大和采样点间隔的减小,延拓误差迅速增大^[12]。基于此,Tikhonov 提出 Tikhonov 正则化法^[13],通过在法方程中加入正则化参数解决不适定问题,在一定程度上起到了对高频噪声的压制作用,被广泛应用于向下延拓过程中^[14-17]; T Schröter 等对 Tikhonov 正则化方法进行了推广,提出了迭代 Tikhonov 正则化方法^[18];曾小牛等推导了迭代 Landweber 和迭代 Tikhonov 正则化算法的频率域算子^[19]; Xiaogang Liu 对不同参数控制的迭代正则化滤波特性进行了分析,比较了两种迭代正则化法在理想观测噪声情况下的表现,证实了迭代正则化法的可靠性^[20]。迭代正则化法的迭代次数和正则化参数对延拓解

起着决定作用,但目前尚未有最优正则化因子组的确定方法,其选取依据的研究对地球位场数据处理具有重要价值。

本文对航空重力观测数据的正则化延拓方法进行深入研究,分析了迭代 Tikhonov 和 Landweber 正则化延拓方法,提出拟最优正则化因子组概念,发现迭代 Tikhonov 正则化法和迭代 Landweber 正则化法中拟最优正则化因子组序列内迭代次数和正则化参数分别呈现显著线性和反线性关系,而且当迭代次数足够大时,各拟最优正则化因子组对应的延拓解误差相似。基于此,本文认为,当迭代次数较大时,任何一组拟最优正则化因子组都可当作最优正则化因子组,因此可首先选取较大迭代次数,再采用 L 曲线法确定与之对应的最优正则化参数,确立最优正则化因子组,从而获取稳定延拓解。最后,通过仿真数据模拟试验,证实了本文选取迭代正则化法正则化因子依据的可靠性。

1 向下延拓理论方法

1.1 位场延拓

建立如图 1 所示的空间直角坐标系 $o-xyz$, 其中 z 轴垂直向上。

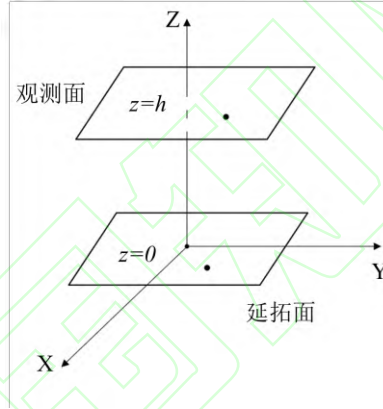


图 1 延拓示意图

Fig. 1 Schematic diagram of downward continuation

图中, $u_h(x, y)$ 表示观测面位场数据, $u_0(\xi, \eta)$ 表示延拓面位场数据, 则根据 Dirichlet 方程^[21], 可得到位场数据向上延拓公式^[22]:

$$u_h(x, y) = \frac{h}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_0(\xi, \eta)}{\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + h^2 \right]^{3/2}} d\xi d\eta \quad (1)$$

式中, h 为延拓高度, 点 (x, y) 为观测数据点, 点 (ξ, η) 为代求点。式(1)经傅里叶变换后整理得向下延拓表达式^[23]:

$$U_0(u, v) = U_h(u, v) \cdot R^{-1}(u, v) = U_h(u, v) \cdot e^{2\pi h \sqrt{u^2 + v^2}} \quad (2)$$

其中, u, v 对应 x, y 的频域变量, U_h 和 U_0 为 u_h 和 u_0 的对应频域数据, R^{-1} 为向下延拓算子。当 u, v 较大时, $e^{2\pi h \sqrt{u^2 + v^2}}$ 呈指数型增大, 高频噪声急剧增强, 因此直接进行向下延拓会使得延拓解不稳定。

1.2 Tikhonov 正则化

正则化方法可以有效解决向下延拓过程中出现的不适定问题，其中最著名的便是 Tikhonov 正则化法，该方法通过引入正则化参数 α 修正病态矩阵，削弱延拓过程对高频噪声的放大作用^[24-28]。

将式(1)表示为算子形式：

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{g} \quad (3)$$

其中， \mathbf{f} 为观测值向量， \mathbf{A} 为设计矩阵， \mathbf{g} 为未知值向量。则 Tikhonov 正则化延拓解为：

$$\mathbf{g}_\alpha = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{f} \quad (4)$$

其中， \mathbf{I} 为单位阵， $\alpha > 0$ 是正则化参数。利用傅里叶变换将其转换到频域^[29]：

$$\begin{cases} U_0(u, v) = R_{\text{Tik}}^{-1}(u, v) \cdot U_h(u, v) \\ R_{\text{Tik}}^{-1}(u, v) = \frac{R(u, v)}{R^2(u, v) + \alpha} \end{cases} \quad (5)$$

其中， R_{Tik}^{-1} 为 Tikhonov 正则化法的向下延拓算子。正则化参数 α 控制延拓解的精度，可通过 L 曲线法 (L-curve) 确定。L 曲线法构建拟合误差 $\mathbf{A}\mathbf{g}_\alpha - \mathbf{f}$ 和正则解 \mathbf{g}_α 的范数，绘制两者随参数变化的对比曲线，该曲线一般呈现为大写字母 “L” 形状，存在最大曲率位置作为其拐点，该拐点对应的数值即为 L 曲线法确定的最优正则化参数^[30]。令：

$$\begin{cases} \rho = \|\mathbf{A}\mathbf{g}_\alpha - \mathbf{f}\|_2 \\ \theta = \|\mathbf{g}_\alpha\|_2 \end{cases} \quad (6)$$

则 L 曲线曲率为：

$$c(\alpha) = \frac{\rho' \theta'' - \rho'' \theta'}{[(\rho')^2 + (\theta')^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (7)$$

利用 Parseval 等式，将式(6)转换到频率域：

$$\begin{cases} \rho = \|R(u, v) \cdot R_{\text{Tik}}^{-1}(u, v) \cdot U_h(u, v) - U_h(u, v)\|_2 \\ \theta = \|R_{\text{Tik}}^{-1}(u, v) \cdot U_h(u, v)\|_2 \end{cases} \quad (8)$$

利用一阶差分和二阶差分可得到 L 曲线曲率 $c(\alpha)$ 随 α 的变化情况，曲率最大值所对应的 α 值即为最优正则化参数。

1.3 迭代 Tikhonov 正则化法

传统 Tikhonov 正则化方法存在饱和效应，即不能在提高解的光滑性的同时提高解的精度。基于此，T Schröter 对 Tikhonov 正则化方法进行了推广，提出了迭代 Tikhonov 正则化方法，其迭代形式为：

$$\begin{cases} \mathbf{g}_\alpha^0 = 0 \\ (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{I}) \mathbf{g}_\alpha^n = \alpha \mathbf{g}_\alpha^{n-1} + \mathbf{A}^T \mathbf{f} \end{cases} \quad (9)$$

经傅里叶变换和数学归纳法可得频域向下延拓的迭代 Tikhonov 正则化算法公式：

$$\begin{cases} U_0^n(u, v) = R_{\text{Tikn}}^{-1}(u, v) \bullet U_h(u, v) \\ R_{\text{Tikn}}^{-1}(u, v) = R^{-1}(u, v) \bullet \left[1 - \left(\frac{\alpha}{R^2(u, v) + \alpha} \right)^n \right] \end{cases} \quad (10)$$

式中, R_{Tikn}^{-1} 为迭代 Tikhonov 正则化算法向下延拓算子, 包含迭代次数 n 和正则化参数 α 两个正则化因子, 对正则化效果起着重要的控制作用, 因此如何以最优方式选择正确的正则化因子组合是整个迭代 Tikhonov 正则化法的关键。

1.4 迭代 Landweber 正则化法

迭代 Landweber 正则化法通过构造迭代向量序列收矩阵-向量乘法求解法方程^[31], 本质上是一种最速下降法, 迭代形式如下^[32]:

$$\begin{cases} \mathbf{g}_\alpha^0 = 0 \\ \mathbf{g}_\alpha^n = \mathbf{g}_\alpha^{n-1} + \alpha A^T [f - A\mathbf{g}_\alpha^{n-1}] \end{cases} \quad (11)$$

经傅里叶变换和数学归纳法可得频域向下延拓的迭代 Landweber 正则化算法公式:

$$\begin{cases} U_0^n(u, v) = R_{\text{Lwn}}^{-1}(u, v) \bullet U_h(u, v) \\ R_{\text{Lwn}}^{-1}(u, v) = R^{-1}(u, v) \bullet \left[1 - (1 - \alpha R^2(u, v))^n \right] \end{cases} \quad (12)$$

式中, R_{Lwn}^{-1} 为迭代 Landweber 正则化算法向下延拓算子。

2 数值计算与结果分析

2.1 仿真航空重力观测数据

利用 2190 阶 EGM2008 重力场模型计算 $[85^\circ\text{W}-80^\circ\text{W}, 37^\circ\text{N}-42^\circ\text{N}]$ 区域航空重力扰动和地面重力扰动仿真数据作为航空和地面理论真值, 格网点间距设置为 $5' \times 5'$, 飞行高度设置为 6 km。在航空理论真值中加入误差为 2mgal 的观测白噪声作为航空模拟观测值 (见表 1 和图 2), 利用第 2 节所述不同方法进行向下延拓, 通过比对不同正则化方法和不同参数获取的延拓解与真值差异评价其稳定性和有效性。延拓过程采用 220 阶 EIGEN-6C4 重力场模型进行移去恢复。

表 1 模拟观测值统计表/mgal
Tab. 1 Statistics of simulated observations/mgal

| 类别 | 最大值 | 最小值 | 平均值 | 均方差 |
|---------|--------|---------|---------|--------|
| 地面理论真值 | 61.724 | -67.724 | -17.975 | 25.774 |
| 航空理论真值 | 36.010 | -55.787 | -17.842 | 23.234 |
| 白噪声 | 7.190 | -7.742 | 0.000 | 1.994 |
| 航空模拟观测值 | 38.547 | -58.506 | -17.842 | 23.315 |

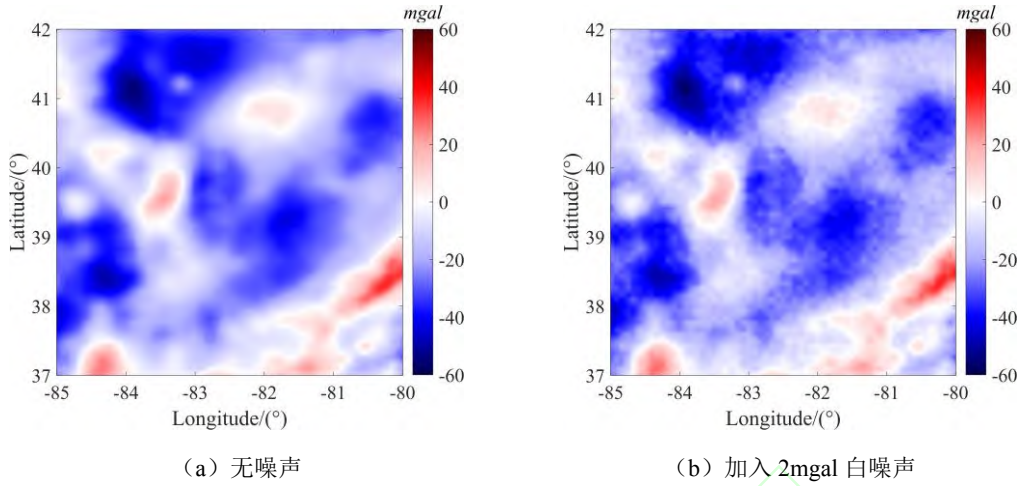


图 2 飞行高度模拟重力扰动
Fig. 2 Simulated airborne gravity disturbance

2.2 Tikhonov 正则化

图3为L曲线图，图4为对应曲率图，峰值处即为确定的正则化参数位置。不同方法对应延拓解与真值的差异分布图和差异统计信息如图5和表2所示。即使是加入理想化噪声的模拟观测值，直接进行向下延拓获取的延拓解同样不稳定，噪声被明显放大，而Tikhonov正则化算法可以很好的削弱延拓过程的病态性，对噪声起到一定的压制作用。

表 2 不同正则化参数延拓值与真值差异统计表/mgal

Tab. 2 Statistics of difference between continued values and true values/mgal

| 方法 | 正则化参数 | 最大值 | 最小值 | 平均值 | 均方差 |
|--------------|-------|--------|---------|-------|-------|
| 直接求逆 | | 39.796 | -39.199 | 0.010 | 12.64 |
| Tikhonov 正则化 | 0.082 | 17.322 | -20.304 | 0.016 | 4.155 |

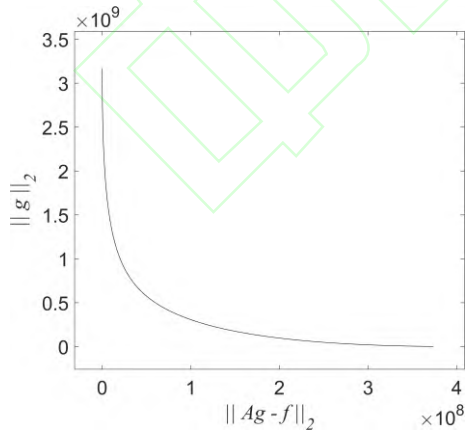


图 3 L 曲线图
Fig. 3 L-curve diagram

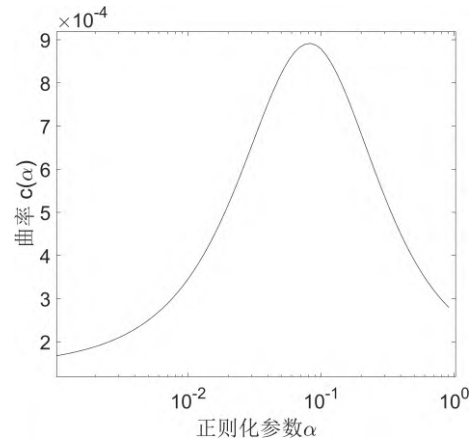


图 4 L 曲线曲率图
Fig. 4 Curvature diagram of L-curve

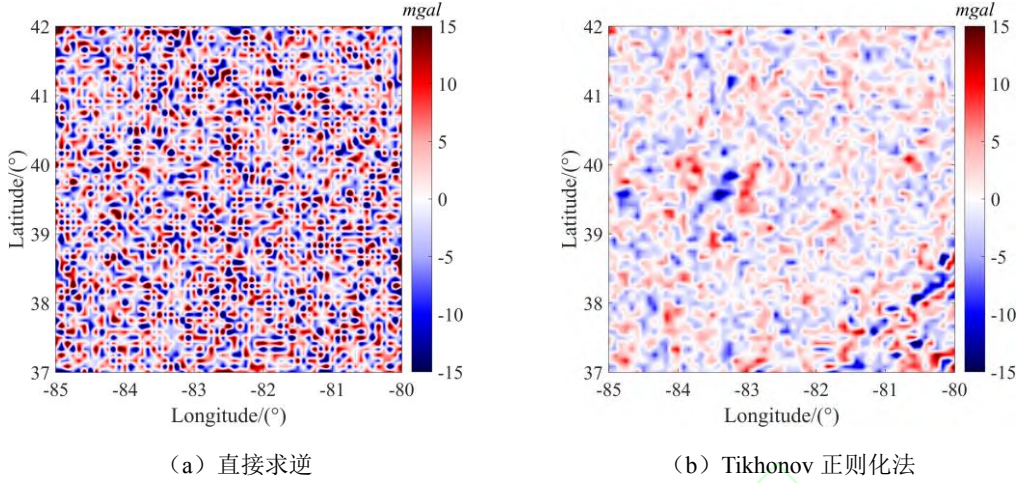


图 5 延拓值与真实值差异图

Fig. 5 Difference between continued values and true values

2.3 迭代 Tikhonov 正则化法

图 6 (a) 展示了当正则化参数分别为 0.5、1.0、1.5、2.0 时迭代 Tikhonov 正则化法延拓误差随迭代次数的变化关系，当 α 一定时，迭代次数同样起着正则化作用，当迭代次数超过最优值时，延拓解发散，因此迭代 Tikhonov 正则化法在一定延拓阶次时截止才具有正则化效果，这种现象同样也被称为半收敛。

可知当正则化参数 α 确定时，存在唯一对应最优迭代次数 n_α 使得延拓误差最小，将这样一对正则化因子定义为拟最优正则化因子组，则不同正则化参数和与之对应最优迭代次数构成一个拟最优正则化因子组序列；图 6 (b) 展示当迭代次数分别为 10、20、30、40 时延拓误差随正则化参数的变化关系，可知当迭代次数 n 确定时，亦存在唯一对应最优正则化参数 α_n 使得延拓解误差最小，不同迭代次数和对应最优正则化参数构成另一个拟最优正则化因子组序列。两个拟最优正则化因子组序列中迭代次数和正则化参数分布情况图 7 所示，呈现明显的线性关系。图 7 中颜色代表延拓解的误差水平，同时对部分拟最优正则化因子组对应的误差值进行了标注，可知同一序列内，当迭代次数或正则化参数取较大值时，不同拟最优正则化因子组对应的延拓解误差相近，此时，所有拟最优因子组都可以当作最优正则化因子组。又由于迭代次数在实数域的非连续性，因此可通过以下步骤获取观测噪声水平未知时迭代正则化法最优延拓解：

- (1) 选取一个较大迭代次数 n ；
- (2) 采用后验方法确定与之对应的最优正则化参数 α_n ；
- (3) 将 n 和 α_n 代入式(10)即可获取最优延拓解。

当观测数据噪声水平未知，可采用 2.2 节所述 L 曲线法确定与迭代次数 n 对应的最优正则化参数 α_n ，此时式(8)变形为：

$$\begin{cases} \rho = \left\| R(u, v) \cdot R_{\text{Tik}n}^{-1}(u, v) \cdot U_h(u, v) - U_h(u, v) \right\|_2 \\ \theta = \left\| R_{\text{Tik}n}^{-1}(u, v) \cdot U_h(u, v) \right\|_2 \end{cases} \quad (13)$$

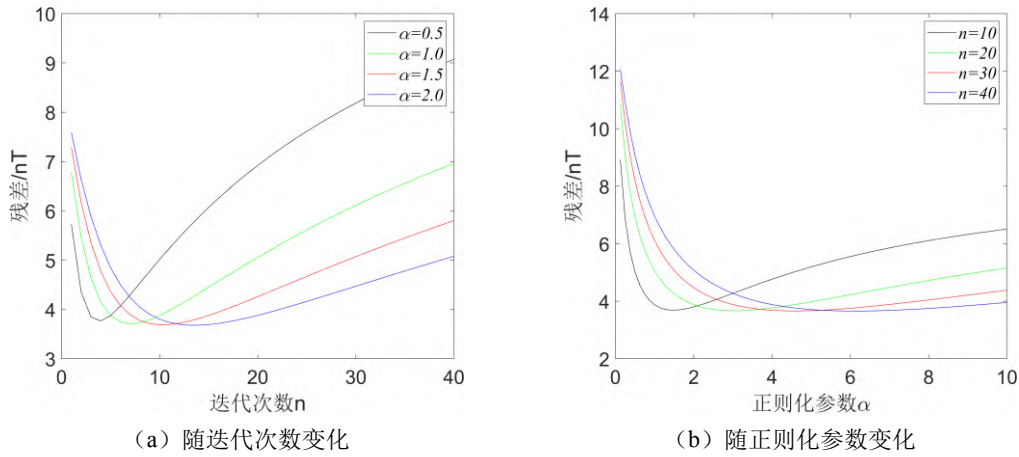


图 6 迭代 Tikhonov 正则化法延拓误差随正则化因子变化

Fig 6. Variation curve of continued errors with regularization factors of iterative Tikhonov regularization method

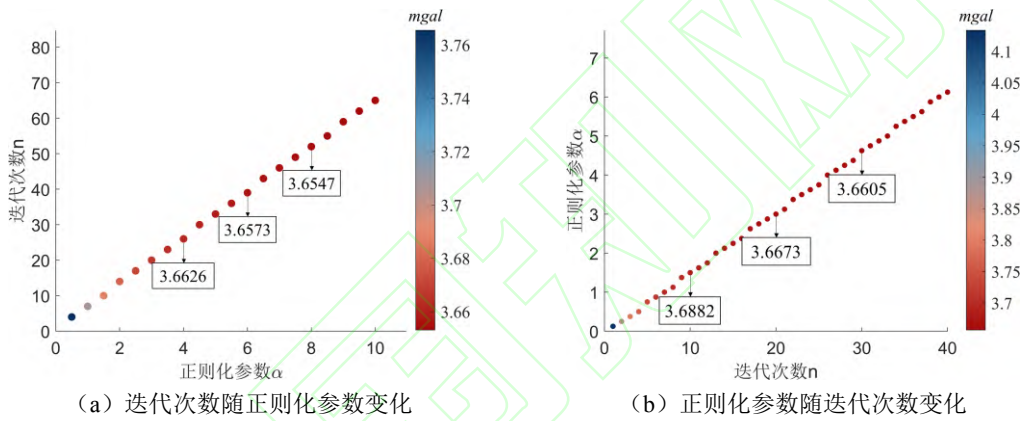


图 7 迭代 Tikhonov 正则化法拟最优正则化因子组中正则化因子分布 (颜色表示延拓误差)

Fig. 7 Distribution of regularization factors in the quasi optimal regularization factor set of iterative Tikhonov regularization method (Color indicating continued errors)

利用式(13)计算得到 $n=10、20、30、40$ 时 L 曲线图, 如图 8 所示, 不同迭代次数对应的曲线图呈现高度的相似性, 斜率变化较传统 Tikhonov 正则化法更为平缓, 难以直接通过 L 曲线确定拐点. 利用一阶差分和二阶差分求出 L 曲线曲率随正则化参数变化曲线如图 9 所示, 与 L 曲线图相同, 不同迭代次数对应的 L 曲线曲率图型相似, 仅随 α 轴进行了左右平移. 通过图 9 选取曲率最大值, 确定四组拟最优正则化因子组, 其对应延拓解和真实值的差异分布和统计信息如图 10 和表 3 所示. 不同拟正则化因子组对应延拓解高度相似, 误差均在 3.92mgal 左右, 延拓效果良好.

图 10 中, 延拓误差大多集中在右下部和左中部区域, 对比图 2 中航空重力扰动真值图像可知, 这两处区域重力扰动值变化较为剧烈, 高频信号含量丰富, 部分高频信号被当作噪声去除, 引起估值偏差. 对比图 5, 可以看出迭代 Tikhonov 正则化解平滑度更高, 误差更小, 相比于传统 Tikhonov 正则化法提升了 5%, 但在信号高频含量较高区域, 延拓效果并无明显提升.

此外, 由 L 曲线法确定的不同拟最优正则化因子组中迭代次数和正则化参数同样存在显著的线性关系, 与图 7 结论相符.

表 3 不同正则化因子组延拓值与真值差异统计表/mgal

Tab. 3 Statistics of difference between continued values and true values

| 方法 | 迭代次数 | 正则化参数 | 最大值 | 最小值 | 平均值 | 均方差 |
|-----------------|------|-------|--------|---------|-------|-------|
| 迭代 Tikhonov 正则化 | 10 | 2.277 | 18.277 | -24.695 | 0.013 | 3.915 |
| | 20 | 4.823 | 18.539 | -25.083 | 0.013 | 3.935 |
| | 30 | 7.375 | 18.626 | -25.215 | 0.013 | 3.943 |
| | 40 | 9.833 | 18.613 | -25.170 | 0.012 | 3.936 |

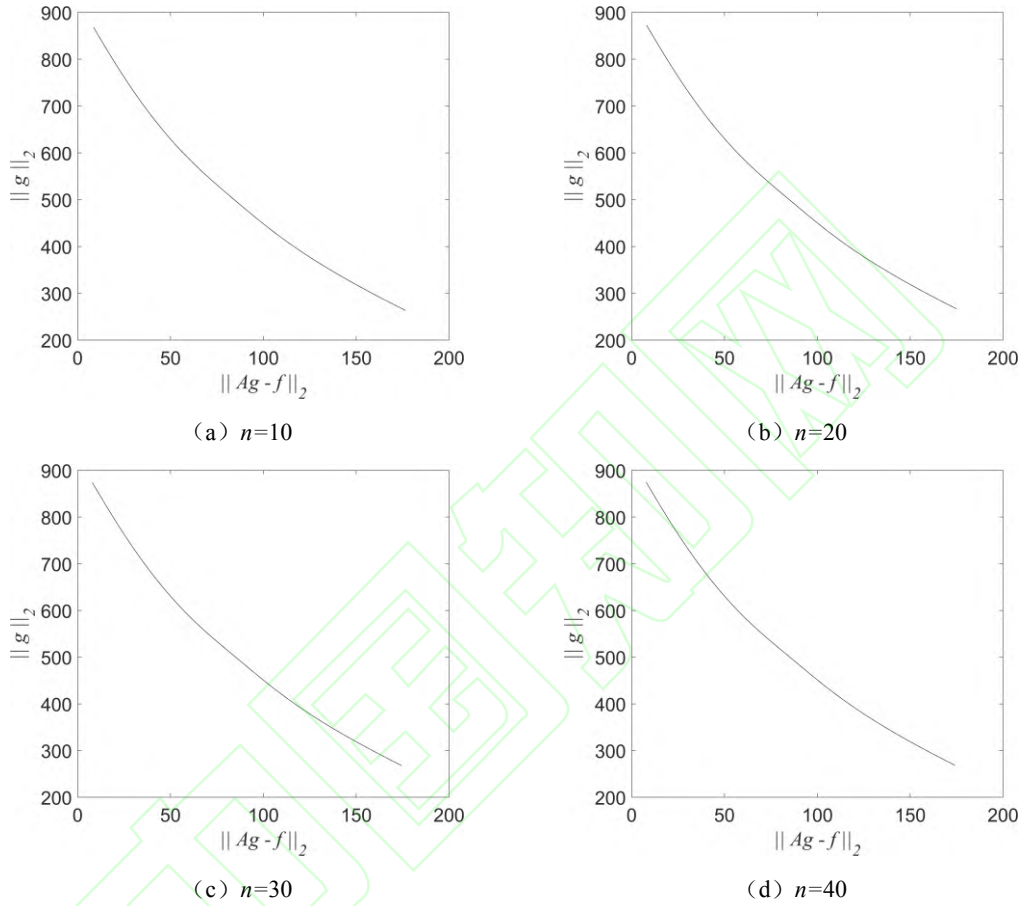
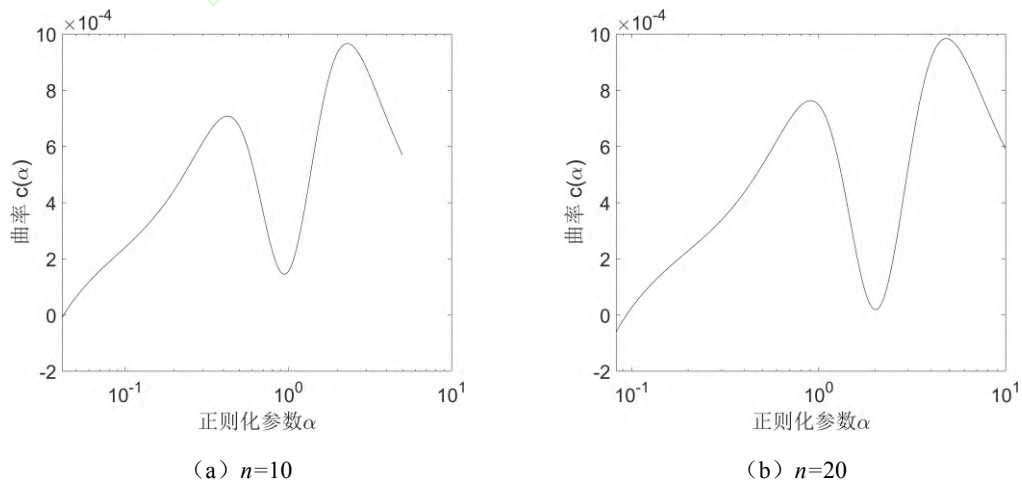


图 8 迭代 Tikhonov 正则化法不同迭代次数 L 曲线图

Fig. 8 L-curve diagram of different iteration times of iterative Tikhonov regularization method



(a) $n=10$

(b) $n=20$

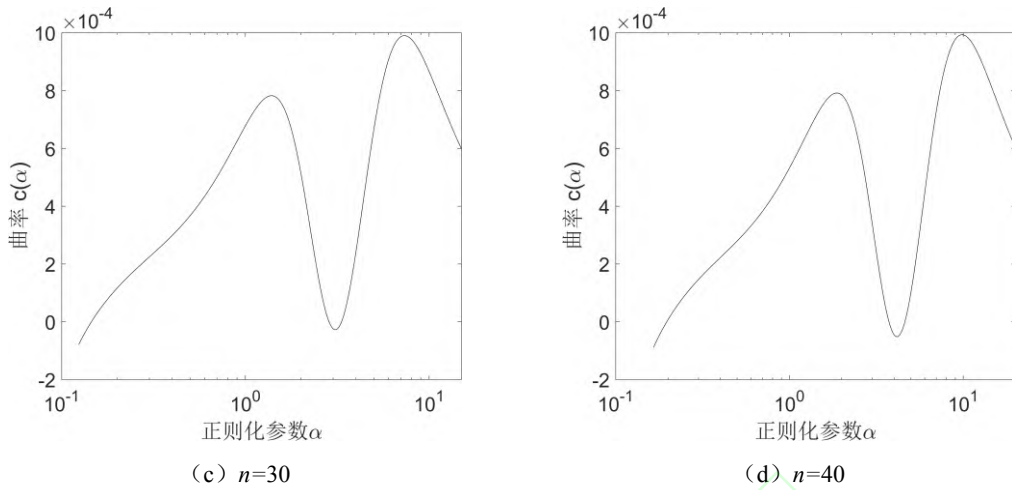


图 9 迭代 Tikhonov 正则化法不同迭代次数 L 曲线曲率图

Fig. 9 Curvature diagram of different iteration times of iterative Tikhonov regularization method

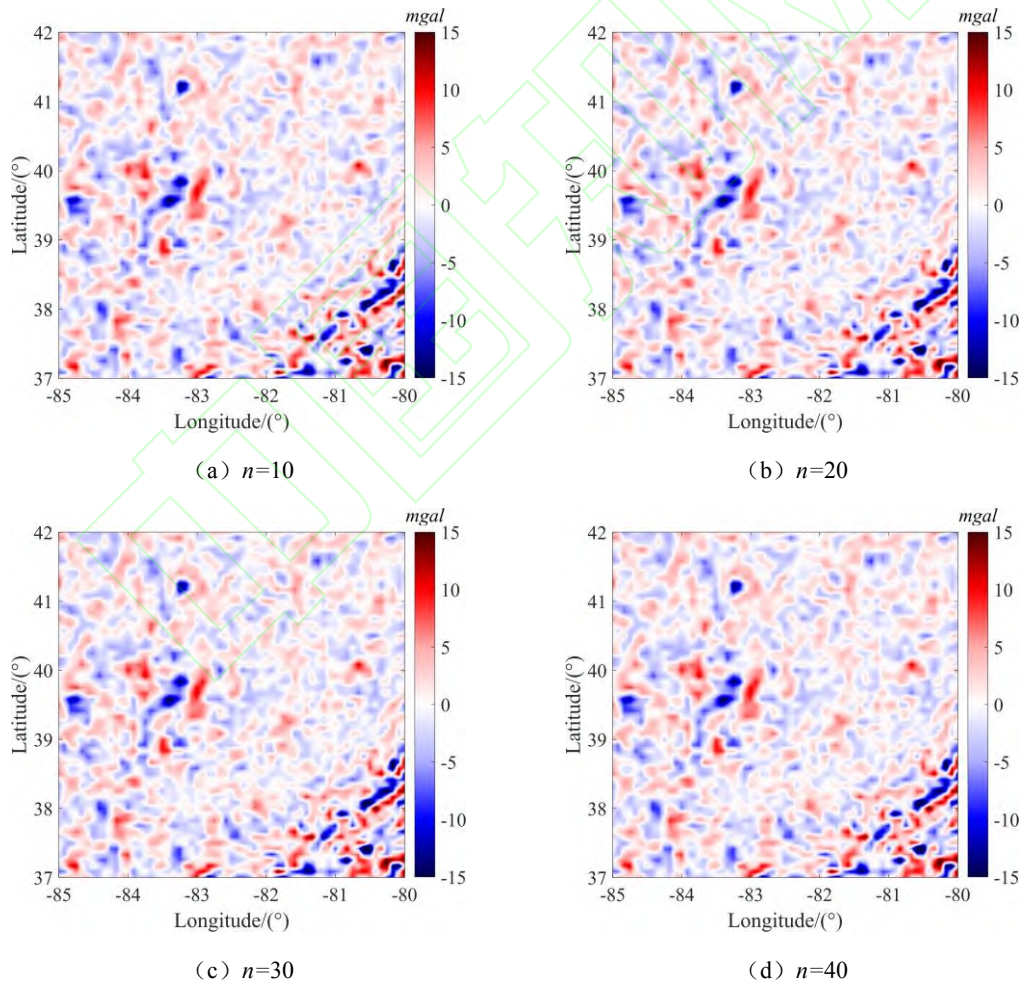


图 10 迭代 Tikhonov 正则化法不同拟最优正则化因子组延拓值与真实值差异图

Fig. 10. Difference between continued values and true values of iterative Tikhonov regularization method

2.4 迭代 Landweber 正则化法

图 11 (a) 展示了当正则化参数分别为 0.5、1.0、1.5、2.0 时迭代 Landweber 正则化法延拓误差随迭代次数的变化关系，与迭代 Tikhonov 正则化算法相同，当正则化参数 α 确定时，存在唯一对应最优迭代次数 n_α 使得延拓误差最小，将这样一对正则化因子定义为拟最优正则化因子组，则不同正则化参数和与之对应最优迭代次数构成一个拟最优正则化因子组序列；图 11 (b) 展示当迭代次数分别为 10、20、30、40 时延拓误差随正则化参数的变化关系，当正则化参数大于 2 时，延拓误差直线上升，因此实际确定最优正则化参数时应首先确定大致范围，一般取 $[0, 1]$ 区间。通过图 11 (b) 可知当迭代次数 n 确定时，亦存在唯一对应最优正则化参数 α_n 使得延拓解误差最小，不同迭代次数和对应最优正则化参数构成另一个拟最优正则化因子组序列，其拟最优因子组序列中迭代次数和正则化参数呈反线性关系（见图 12）。与 2.3 节相似，同一序列内，当迭代次数或正则化参数取较大值时，拟最优正则化因子组确定的延拓解误差相近，此时任意一组拟最优正则化因子组均可视为最优正则化因子组，因此在实际应用时可采用与迭代 Tikhonov 正则化法相同的步骤确定正则化因子组获取观测噪声水平未知时迭代 Landweber 正则化算法最优延拓解：

- (1) 选取一较大迭代次数 n ；
- (2) 采用 L 曲线法确定与之对应的最优正则化参数 α_n ；
- (3) 将 n 和 α_n 代入式(12)即可获取最优延拓解。

此时式(8)变形为：

$$\begin{cases} \rho = \|R(u, v) \cdot R_{L_{wn}}^{-1}(u, v) \cdot U_h(u, v) - U_h(u, v)\|_2 \\ \theta = \|R_{L_{wn}}^{-1}(u, v) \cdot U_h(u, v)\|_2 \end{cases} \quad (14)$$

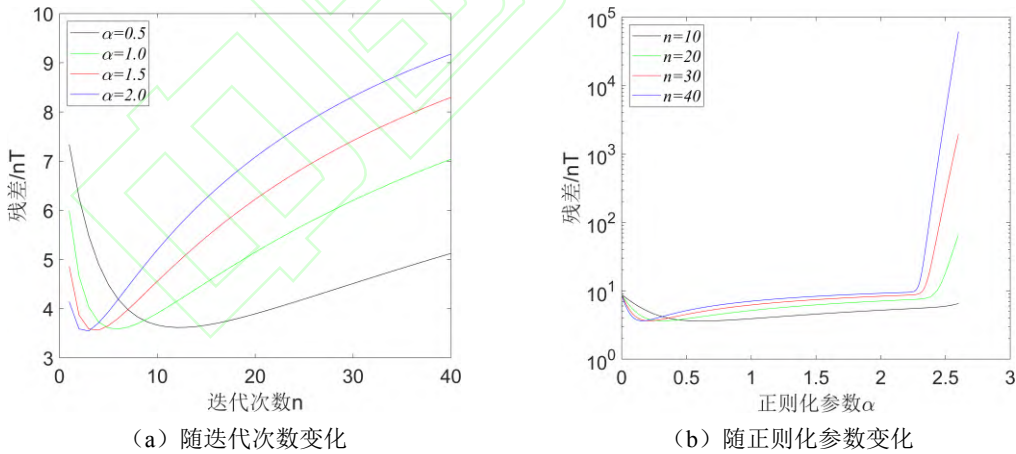


图 11 迭代 Landweber 正则化法延拓误差随正则化因子变化

Fig. 11 Variation curve of continued errors with regularization factors of iterative Landweber regularization method

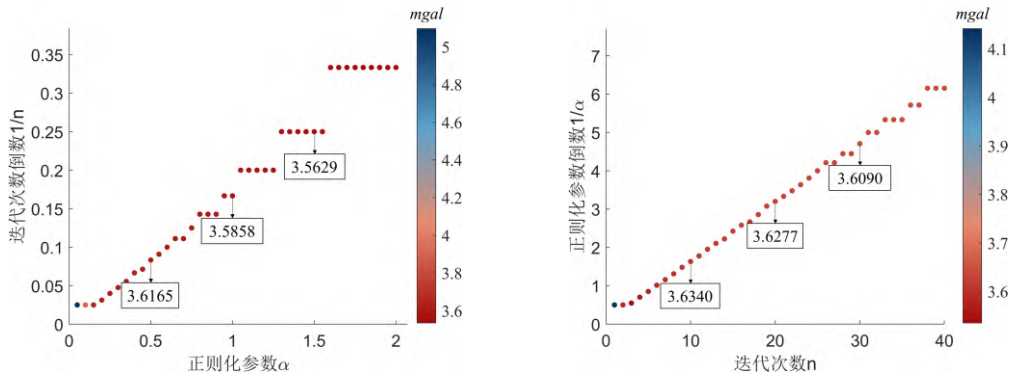


图 12 迭代 Landweber 正则化法拟最优正则化因子组中正则化因子分布 (颜色表示延拓误差)

Fig. 12 Distribution of regularization factors in the quasi optimal regularization factor set of iterative Landweber regularization method(Color indicating continued errors)

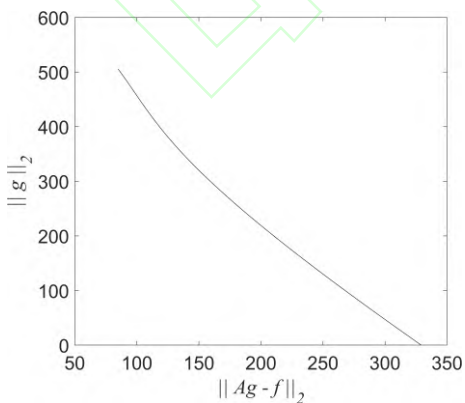
利用式(14)和差分法计算得到 $n=10、20、30、40$ 时 L 曲线和 L 曲线曲率图如图 13 和图 14 所示, 与迭代 Tikhonov 正则化法相同, 不同迭代次数对应的 L 曲线图和曲率图型之间呈现明显相似性。通过图 14 选取曲率最大值, 确定四对拟最优正则化因子组, 其对应延拓解和真实值的差异分布和统计信息如图 15 和表 4 所示。不同正则化因子组对应延拓解高度相似, 误差均在 3.94mgal 左右, 除右下部和左中部区域误差较大外, 大部分区域延拓效果良好, 说明了 L 曲线法在确定迭代 Landweber 算法最优正则化因子组时的有效性。

表 4 中, 由 L 曲线法确定的不同最优正则化因子组中迭代次数和正则化参数同样存在明显的反线性关系, 与图 11 结论相符。

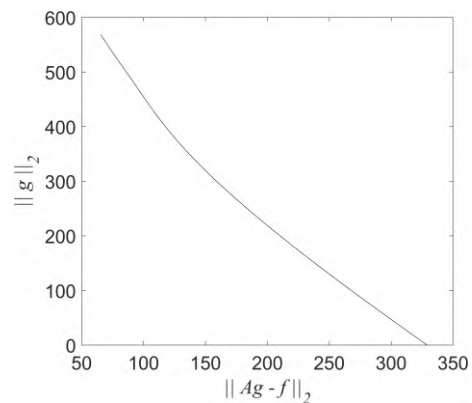
表 4 不同正则化参数延拓值与真值差异统计表/mgal

Tab. 4 Statistics of difference between continued value and true values

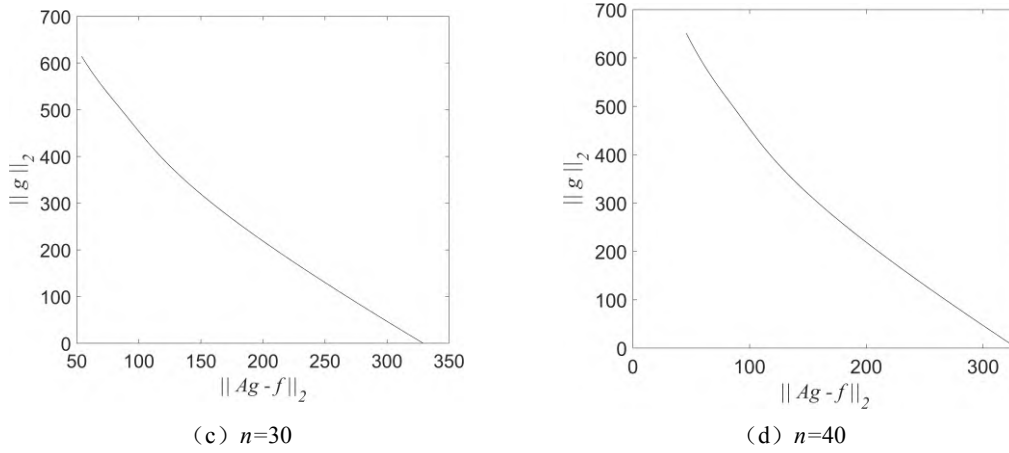
| 方法 | 迭代次数 | 正则化参数 | 最大值 | 最小值 | 平均值 | 均方差 |
|------------------|------|-------|--------|---------|-------|--------|
| 迭代 Landweber 正则化 | 10 | 0.363 | 19.098 | -25.847 | 0.012 | 3.9671 |
| | 20 | 0.190 | 18.886 | -25.534 | 0.012 | 3.9493 |
| | 30 | 0.129 | 18.828 | -25.457 | 0.012 | 3.9466 |
| | 40 | 0.098 | 18.773 | -25.367 | 0.012 | 3.940 |



(a) $n=10$



(b) $n=20$

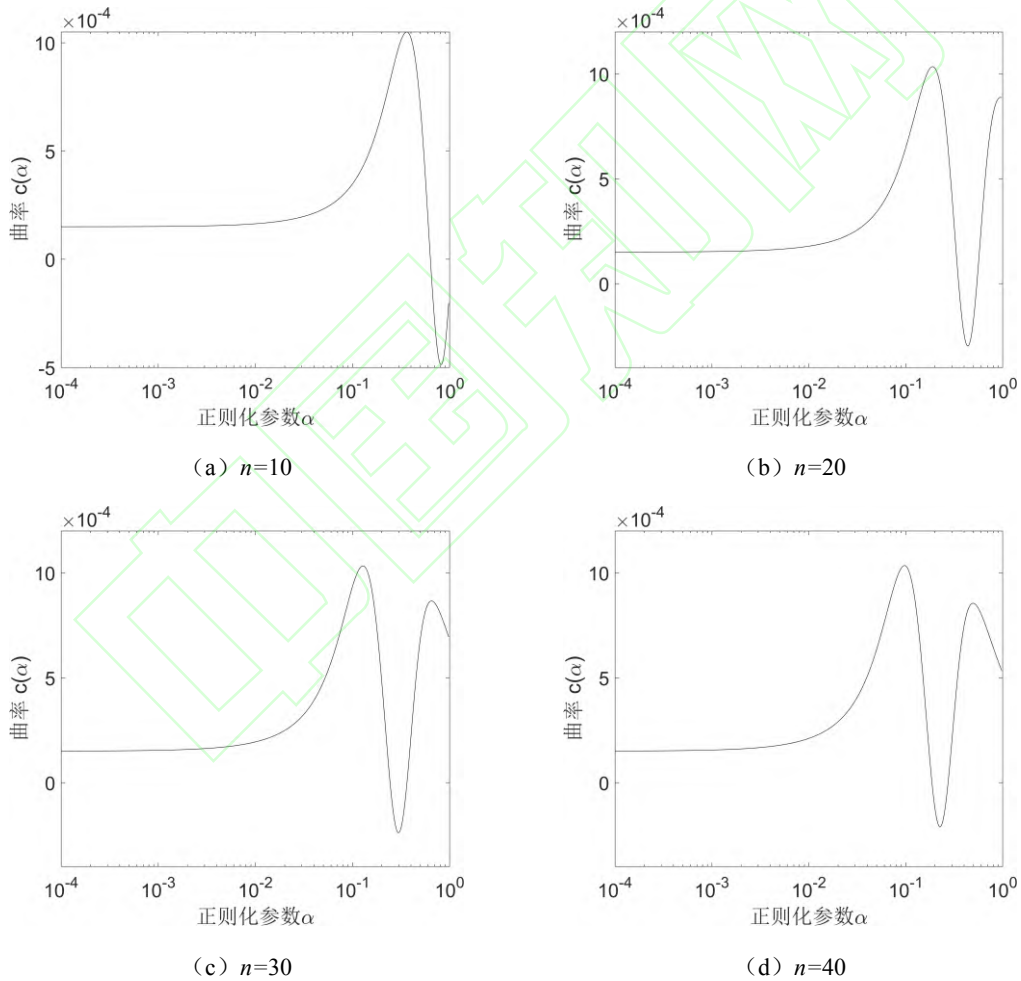


(c) $n=30$

(d) $n=40$

图 13 迭代 Landweber 正则化法不同迭代次数 L 曲线图

Fig. 13 L-curve diagram of different iteration times - iterative Landweber regularization method



(a) $n=10$

(b) $n=20$

(c) $n=30$

(d) $n=40$

图 14 迭代 Landweber 正则化法不同迭代次数 L 曲线曲率图

Fig. 14 Curvature diagram of different iteration times - iterative Landweber regularization method

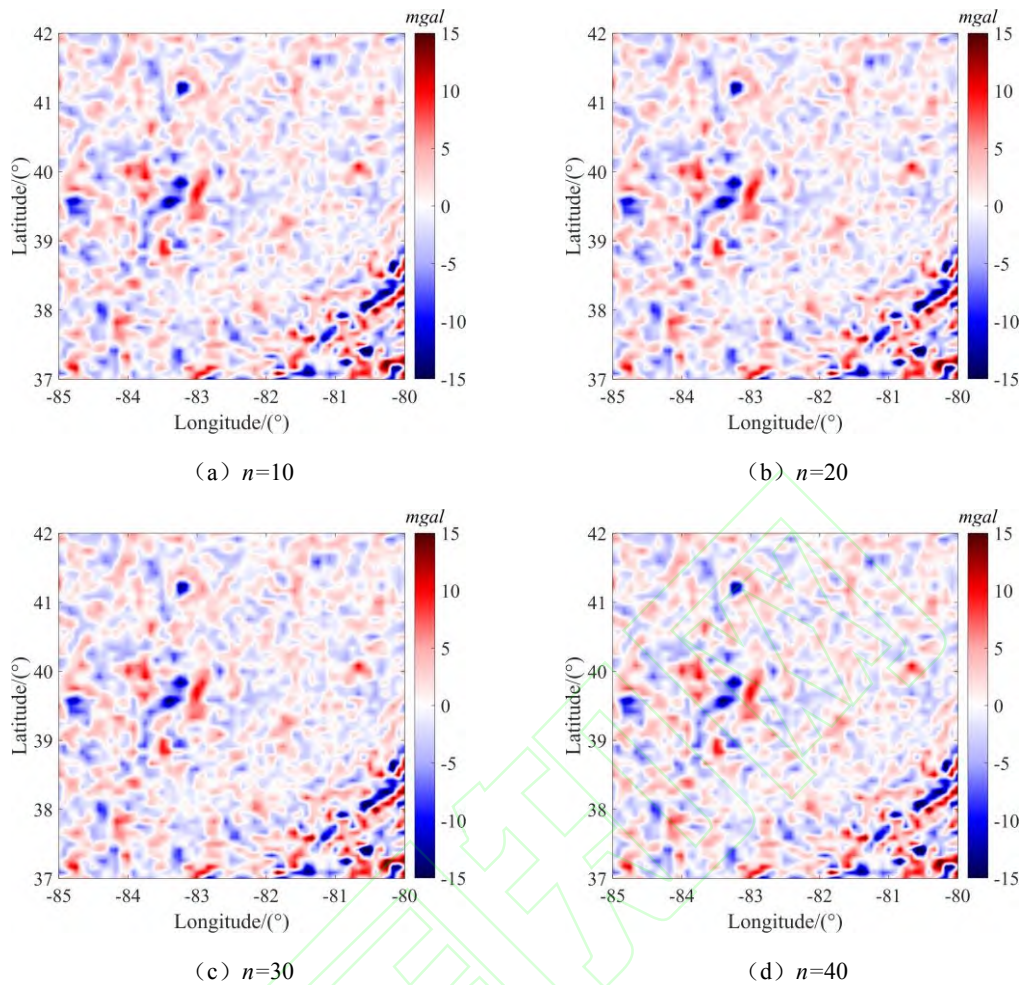


图 15 迭代 Landweber 正则化法不同拟最优正则化因子组延拓值与真实值差异图
 Fig. 15 The difference between continued values and true values - iterative Landweber regularization method

3 结语

本文对迭代 Tikhonov 和 Landweber 正则化延拓方法进行了深入分析，构建拟最优正则化因子组，基于此提出了迭代正则化法中最优迭代次数和正则化参数最优组合的选取依据，利用重力场模型构建了仿真试验，与传统 Tikhonov 进行了对比分析，总结如下：

(1) 对迭代正则化算法延拓误差随正则化因子组的变化关系研究表明，迭代 Tikhonov 正则化法中，拟最优正则化因子组序列内迭代次数和正则化参数呈线性关系；迭代 Landweber 正则化法中，拟最优正则化因子组序列内迭代次数和正则化参数呈反线性关系；最优正则化参数和迭代次数存在显著相关性。

(2) 当迭代次数超过 10 后，各拟最优正则化因子组对应的延拓解与真实值误差相近，当迭代次数足够大时，任意拟最优正则化因子组均可视为最优正则化因子组。因此当观测噪声未知时，可优先选取较大迭代次数，利用 L 曲线法确定对应最优正则化参数，获取最优延拓解。

(3) 基于本文选取策略的迭代正则化算法延拓解相比于传统 Tikhonov 正则化法更为平滑，误差更小，但在数据变化较为明显区域，部分高频信号被当作噪声滤除，延拓效果并无显著提升。

参考文献

- [1] Carpenter C . Machine-Learning Method Determines Salt Structures From Gravity Data[J]. *Journal of Petroleum Technology*, 2021, 73(2):70-71.
- [2] Ye Z, Zhang Z, Wünnemann B, Liu W, Li H, Shi Z and Li J (2022), High-precision Downward Continuation of the Potential Field Based on the D-Unet Network.*Front. Earth Sci.* 10:897055. doi: 10.3389/feart.2022.897055.
- [3] HUANG Motao, DENG Kailiang, OUYANG Yongzhong, et al. Development and Study in Marine and Airborne Gravimetry and Its Application[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2022, 47(10): 1635-1650.(黄谟涛, 邓凯亮, 欧阳永忠, 等. 海空重力测量及应用技术研究若干进展[J]. *武汉大学学报(信息科学版)*, 2022, 47(10): 1635-1650.)
- [4] XU Xinyu, LI Jiancheng, WANG Zhengtao, et al. The Simulation Research on the Tikhonov Regularization Applied in Gravity Field[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2010, 39(5):466-470.(徐新禹, 李建成, 王正涛, 等. Tikhonov 正则化方法在 GOCE 重力场求解中的模拟研究[J]. *测绘学报*, 2010, 39(5):465-470.)
- [5] Clarke, Garry K C . Optimum Second-Derivative and Downward-Continuation Filters[J]. *Geophysics*, 1969, 34(3):424.
- [6] Fedi M, Florio G. A stable downward continuation by using the ISVD method[J]. *Geophysical Journal International*, 2002(1):151.
- [7] Kern M , Schwarz K P . A Comparison of Direct and Indirect Numerical Methods for the Downward Continuation of Airborne Gravity Data[J]. Springer Berlin Heidelberg, 2002.
- [8] René, Forsberg. A new covariance model for inertial gravimetry and gradiometry[J]. *JOURNAL OF GEOPHYSICAL RESEARCH*, 1987.
- [9] CHEN Xin, ZHAI Guojun, BAO Jingyang, et al. Least Squares Collocation-Tikhonov Regularization Method for the Downward Continuation of Airborne Gravity Data[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2018, 43(4): 578-585.(陈欣, 翟国君, 暴景阳, 等. 航空重力向下延拓的最小二乘配置 Tikhonov 正则化法[J]. *武汉大学学报(信息科学版)*, 2018, 43(4): 578-585.)
- [10] Dampney C . The Equivalent Source Technique[J]. *Geophysics*, 1969, 34(1):39.
- [11] Kern M . An Analysis of the Combination and Downward Continuation of Satellite, Airborne and Terrestrial Gravity data.[D]. University of Calgary (Canada), 2003.
- [12] Wang X T . A Comparison of Different Downward Continuation Methods for Airborne Gravity Data[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2004.
- [13] Tikhonov A N . Solution of Incorrectly Formulated Problem and the Regularization Method. (trans.). 1963.
- [14] Li Y, Devriese S G R, Krahenbuhl R A , et al. Enhancement of Magnetic Data by Stable Downward Continuation for UXO Application[J]. *IEEE Transactions on Geoscience & Remote Sensing*, 2013, 51(6 Part2):3605-3614.
- [15] Abedi M , Gholami A , Norouzi G H . A stable downward continuation of airborne magnetic data: A case study for mineral prospectivity mapping in Central Iran[J]. *Computers & Geosciences*, 2013, 52:269-280.
- [16] Xu P . Determination of Surface Gravity Anomalies Using Gradiometric Observables[J]. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 2010, 110(2):321-332.
- [17] XU Xinqiang, ZHAO Jun. A Multi-Parameter Regularization Method in Downward

- Continuation for Airborne Gravity Data[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2020, 45(7): 956-963, 973.(徐新强, 赵俊. 航空重力向下延拓的多参数正则化方法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2020, 45(7): 956-963, 973.)
- [18] T Schröter , Tautenhahn U . On the Optimality Regularization Methods for Solving Linear Ill-posed Problems[J]. Journal of analysis and its applications, 1994, 13(4):297-710.
- [19] ZENG Xiaoniu,LI Xihai,HAN Shaoqing,et al.A Comparison of Three Iteration Methods for Downward Continuation of Potential Fields[J].Progress in Geophysics,2011,26(3):908-915. (曾小牛,李夕海,韩绍卿,等.位场向下延拓三种迭代方法之比较[J].地球物理学进展,2011, 26(3):908-915.)
- [20] Xiaogang L, Yingchun L, Yun X , et al. Downward Continuation of Airborne Geomagnetic data Based on two Iterative Regularization Methods in the Frequency Domain[J]. Geodesy and Geodynamics, 2015, 6(1):7.
- [21] Blakely R J . Potential Theory in Gravity & Magnetic Applications[M]. Cambridge University Press, Cambridge (UK), 1995.
- [22] Martinec Z. Stability Investigations of a Discrete Downward Continuation Problem for Geoid Determination in the Canadian Rocky Mountains[J]. Journal of Geodesy, 1996, 70(11):805-828.
- [23] Schwarz K P , Sideris M G , Forsberg R . The use of FFT Techniques in Physical Geodesy[J]. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 2010, 100(3):485-514.
- [24] Golub G H , Wahba H G . Generalized Cross-Validation as a Method for Choosing a Good Ridge Parameter[J]. Technometrics, 1979, 21(2):215-223.
- [25] Hoerl A E . Ridge Regression: Biased Estimation for Nonorthogonal Problems: Technometrics: Vol 12, No 1[J]. Technometrics, 1970.
- [26] Wang X , Shi P , Zhu F . Regularization Methods and Spectral Decomposition for the Downward Continuation of Airborne Gravity Data[J]. Acta Geodaetica Et Cartographica Sinica, 2004, 33(1):33-38.
- [27] Ma T , Wu M , Hu X , et al. A Regularization Method for Downward Continuation of Potential Fields[C]// WASE Global Conference on Science Engineering. 2012.
- [28] JIANG Tao , LI Jiancheng , WAN Zhengtao , et al. Solution of Ill-posed Problem in Downward Continuation of Airborne Gravity[J].Acta Geodaetica et Cartographica Sinica,2011,40(6):112-122.(蒋涛,李建成,王正涛,等.航空重力向下延拓病态问题的求解[J].测绘学报,2011, 40(6):112-122.)
- [29] Shi-Zhe X U . A Comparison of Effects Between the Iteration Method and FFT for Downward Continuation of Potential Fields[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2007.
- [30] DP O'Leary, Hansen P C . The Use of the L-Curve in the Regularization of Discrete Ill-Posed Problems[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 1993, 14(6):1487-1503.
- [31] Landweber, L. An Iteration Formula for Fredholm Integral Equations of the First Kind. American Journal of Mathematics. 1951, 73.
- [32] Scherzer O . A Modified Landweber Iteration for Solving Parameter Estimation Problems[J]. Applied Mathematics & Optimization, 1998, 38(1):45-68.

网络首发:

标题: 基于拟最优正则化因子组的航空重力向下延拓迭代求解方法

作者: 刘猛, 王正涛

Doi: 10.13203/j.whugis20230127

收稿日期: 2023-10-31

引用格式:

刘猛, 王正涛. 基于拟最优正则化因子组的航空重力向下延拓迭代求解方法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2023, Doi:10.13203/j.whugis20230127. (LIU Meng, WANG Zhengtao, et al. Downward Continuation Iterative Regularization Solution Based On Quasi Optimal Regularization Factor Set[J] *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2023, Doi:10.13203/j.whugis20230127.)

网络首发文章内容和格式与正式出版会有细微差别, 请以正式出版文件为准!

您感兴趣的其他相关论文:

综合半参数核估计与正则化方法的航空重力向下延拓模型分析

伍丰丰, 黄海军, 任青阳, 樊文有, 陈洁, 潘雄

武汉大学学报(信息科学版), 2020, 45(10): 1563-1569.

<http://ch.whu.edu.cn/cn/article/doi/10.13203/j.whugis20180491>

航空重力向下延拓的多参数正则化方法

徐新强, 赵俊

武汉大学学报(信息科学版), 2020, 45(7): 956-963, 973.

<http://ch.whu.edu.cn/cn/article/doi/10.13203/j.whugis20180335>

航空重力向下延拓的最小二乘配置 Tikhonov 正则化法

陈欣, 翟国君, 暴景阳, 欧阳永忠, 陆秀平, 邓凯亮

武汉大学学报(信息科学版), 2018, 43(4): 578-585.

<http://ch.whu.edu.cn/cn/article/doi/10.13203/j.whugis20150728>