

武汉大学学报(信息科学版)

Geomatics and Information Science of Wuhan University

ISSN 1671-8860,CN 42-1676/TN

《武汉大学学报(信息科学版)》网络首发论文

题目: 非线性加性乘性混合误差模型的参数估计方法
作者: 王乐洋, 赵卫凤
DOI: 10.13203/j.whugis20230016
收稿日期: 2023-11-13
网络首发日期: 2023-12-01
引用格式: 王乐洋, 赵卫凤. 非线性加性乘性混合误差模型的参数估计方法[J/OL]. 武汉大学学报(信息科学版). <https://doi.org/10.13203/j.whugis20230016>



网络首发: 在编辑部工作流程中, 稿件从录用到出版要经历录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿等阶段。录用定稿指内容已经确定, 且通过同行评议、主编终审同意刊用的稿件。排版定稿指录用定稿按照期刊特定版式(包括网络呈现版式)排版后的稿件, 可暂不确定出版年、卷、期和页码。整期汇编定稿指出版年、卷、期、页码均已确定的印刷或数字出版的整期汇编稿件。录用定稿网络首发稿件内容必须符合《出版管理条例》和《期刊出版管理规定》的有关规定; 学术研究成果具有创新性、科学性和先进性, 符合编辑部对刊文的录用要求, 不存在学术不端行为及其他侵权行为; 稿件内容应基本符合国家有关书刊编辑、出版的技术标准, 正确使用和统一规范语言文字、符号、数字、外文字母、法定计量单位及地图标注等。为确保录用定稿网络首发的严肃性, 录用定稿一经发布, 不得修改论文题目、作者、机构名称和学术内容, 只可基于编辑规范进行少量文字的修改。

出版确认: 纸质期刊编辑部通过与《中国学术期刊(光盘版)》电子杂志社有限公司签约, 在《中国学术期刊(网络版)》出版传播平台上创办与纸质期刊内容一致的网络版, 以单篇或整期出版形式, 在印刷出版之前刊发论文的录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿。因为《中国学术期刊(网络版)》是国家新闻出版广电总局批准的网络连续型出版物(ISSN 2096-4188, CN 11-6037/Z), 所以签约期刊的网络版上网络首发论文视为正式出版。

Doi: 10.13203/j.whugis20230016

引用格式:

王乐洋, 赵卫凤, 等. 非线性加性乘性混合误差模型的参数估计方法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2023, Doi:10.13203/j.whugis20230016. (Wang Leyang, Zhao Weifeng, et al. Parameter estimation methods for nonlinear mixed additive and multiplicative random error model[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2023, Doi:10.13203/j.whugis20230016.)

非线性加性乘性混合误差模型的参数估计方法

王乐洋^{1,2,3}, 赵卫凤^{1,2}

1 东华理工大学测绘与空间信息工程学院, 江西 南昌, 330013

2 自然资源部环鄱阳湖区域矿山环境监测与治理重点实验室, 江西 南昌, 330013

3 江西省测绘地理信息工程技术研究中心, 南昌 330025

摘要: 在大地测量领域中, 测量数据中不仅含有加性误差, 还存在乘性误差。现有的处理加性和乘性混合误差模型的方法主要是基于未知参数和观测值是线性形式的, 鲜有对未知参数和观测值是非线性形式的研究。为了扩展加性和乘性混合误差模型的参数估计方法, 本文基于最小二乘原理并应用了泰勒公式展开的思想, 推导了非线性加性乘性混合误差模型的最小二乘法、高斯-牛顿法、加权最小二乘法和偏差改正加权最小二乘法四种参数估计方法。通过算例的计算和对比分析可知, 当模型非线性较高时, 偏差改正加权最小二乘方法能够得到更好的参数估计结果, 证明了该方法的有效性。该方法也更适用于处理这种非线性的加性和乘性混合误差模型的大地测量数据。

关键词: 非线性加性乘性混合误差模型; 最小二乘; 参数估计; 泰勒公式

Parameter estimation methods for nonlinear mixed additive and multiplicative random error model

Wang Leyang^{1,2,3}, Zhao Weifeng^{1,2}

1 School of Surveying, Mapping and Space Information Engineering, East China University of Technology, Nanchang 330013, China

2 Key Laboratory of Mine Environmental Monitoring and Improving around Poyang Lake, Ministry of Natural Resources, Nanchang 330013, China

3 Jiangxi Province Engineering Research Center of Surveying, Mapping and Geographic Information,

收稿日期: 2023-11-13

基金项目: 国家自然科学基金(42174011);东华理工大学研究生创新基金(DHYC-202329)。

第一作者: 王乐洋, 男, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向为大地测量反演及大地测量数据处理。
wleyang@163.com

Nanchang, 330025, China

Abstract: Objectives: In the field of geodesy, with the continuous development of modern observation technology, so that the measurement data not only contain additive errors, there are also multiplicative errors, purely considering the processing of additive errors can no longer meet the requirements. Existing methods for dealing with mixed additive and multiplicative errors models are mainly based on the fact that the unknown parameters and observations are in linear form, and few studies have been conducted on the fact that the unknown parameters and observations are in nonlinear form. **Methods:** In order to extend the parameter estimation method of the mixed additive and multiplicative errors model, this paper determines the reasonable weight matrix of nonlinear mixed additive and multiplicative errors model based on the law of error propagation and the principle of least squares and applies the idea of Taylor's formula expansion, and derives the least squares, Gauss-Newton method, and weighted least squares of the nonlinear mixed additive and multiplicative errors model. Due to the nonlinear nature, it makes the weighted least squares solution biased, so it needs to be analyzed for its bias. The bias-corrected weighted least squares method is derived by deviation analysis and proof. **Results:** It can be seen through the calculation and comparative analysis of the arithmetic examples that a reasonable weighting method is conducive to improving the correctness of the model parameter estimation results, and when the model nonlinearity is high, the bias-corrected weighted least squares method can obtain better parameter estimation results. **Conclusions:** The feasibility and validity of four methods for parameter estimation of the nonlinear mixed additive and multiplicative errors model are demonstrated, and the bias-corrected weighted least squares method is more suitable for processing geodetic data from such nonlinear models with a mixture of mixed additive and multiplicative errors.

Key words: Nonlinear mixed additive and multiplicative random errors model; Least squares; Parameter estimation; Taylor's formula

0 引言

测量平差的本质在于处理一系列带有误差的观测值^[1], 而观测数据可以通过仪器直接测量, 也可以通过其他手段获得, 这使得任何观测数据不可避免的带有误差, 对于有用的信息造成干扰。随着无线电技术和现代测绘科学技术的飞速发展, 获取观测数据的高新测量技术

也越来越新颖。而高新测量技术的蓬勃发展,使得观测数据中的误差不再只有加性误差,还存在着一种与观测值或者物理信号相关的乘性误差,例如,合成孔径雷达、全球导航卫星系统和光电测距等^[2-5]。

目前,在大地测量领域,现有的平差方法大多是针对加性误差,对于乘性误差或加性乘性混合误差模型的理论研究相对而言并不丰富,大多是基于未知参数与观测值是线性形式,这使得加性乘性混合误差模型的研究具有一定的局限性^[6]。但在大地测量的实际问题中,绝大多数的函数模型的观测值和未知参数是非线性的,为了填充非线性加性乘性混合误差模型的处理方法的研究空白,满足现代高新测量数据处理的需要,迫切需要研究相应的平差方法,以适应大地测量数据处理的发展。

对于乘性误差模型的研究,统计学、工程科学领域及大地测量领域都有相应的研究。在统计学中,文献[6-8]介绍了拟似然法是乘性误差模型参数估计理论方法与应用的主流方法,但也存在着目标函数不明确和无法确定合适的拟似然解等问题。考虑到上述存在的问题,文献[8]首次将最小二乘原理应用到乘性误差模型的参数估计理论中,提出了参数估计的偏差改正加权最小二乘法,并证明了该方法在一定程度上等价于最大似然理论。在此基础上,文献[9]推导了其相应的精度评定公式。当乘性误差模型的存在病态问题时,文献[10]结合了Tikhonov正则化方法,推导了相应的加权最小二乘正则化解,并利用SUT法进行了相应的精度评定。文献[11]考虑了乘性误差模型的加权最小二乘参数估值与观测值之间的非线性关系,采用了Sterling插值方法对其进行了精度评定,达到了二阶精度。当乘性误差随机模型的存在粗差时,文献[12]推导了其标准正态检验法、t法和F-T法,其实验结果验证了推导公式在乘性误差随机模型粗差探测的可行性。

在乘性误差模型的研究基础上,文献[13]将其拓展为加性乘性混合误差模型,并推导了相应的参数估计方法,模拟算例验证了偏差改正加权最小二乘法是二阶近似无偏的且精度较高。文献[14]将利用A-优化设计方法确定的正则化参数与模型的观测方程以及虚拟观测方程相结合,推导了病态的加性乘性混合误差模型的虚拟观测迭代解。文献[15]构建了一个惩罚函数,其惩罚因子随迭代次数增加而增加,推导了不等式约束下加性乘性混合误差模型的一种简单迭代解法,通过算例对比验证了该方法的有效性。

上述文献所做的研究大多是基于未知参数和观测值是线性形式的情形,为了丰富加性乘性混合误差模型的研究,我们将其未知参数与观测值之间的关系扩展为非线性形式。在大地

测量领域中,对于非线性加性误差模型的研究成果已很丰富。非线性模型参数估计的方法主要有线性化法、迭代解法以及启发式搜索算法等^[16-25]。

线性化方法的主要思想在于是用线性模型的求解理论与方法近似求解非线性模型,其原理简单,但当模型的非线性程度较强时,解的质量将会受到影响。迭代解法主要有牛顿迭代法、高斯牛顿法、信赖域法和拟牛顿法等,此类算法的收敛速率较高,但依赖于迭代初值,当迭代初值较差时,可能会出现迭代不收敛的情况^[18-20]。然而,在实际问题的参数解算时,迭代初值可以通过某种方法求得一个近似真值的值,因此在一定程度上能够避免迭代算法受初值较差影响而导致迭代发散的问题。启发式搜索算法的优点在于无需进行复杂的求导,例如粒子群(PSO, Particle Swarm Optimization)算法、模拟退火(SA, Simulated Annealing)算法、神经网络算法(NNA, Neural Network Algorithm)和遗传算法(GA, Genetic Algorithm)等,但此类方法的弊端在于计算效率低^[21-25]。由此可见,大地测量领域中,对于非线性加性误差模型的理论研究和方法已很丰富。

本文基于上述非线性模型及加性乘性混合误差模型的研究,将处理非线性模型的理论和方法扩展到非线性加性乘性混合误差模型的研究中,当未知参数和观测值的关系是非线性的形式时,基于最小二乘原理,推导了其相应的最小二乘解、高斯-牛顿解、加权最小二乘解及偏差改正加权最小二乘解,通过三个模拟实验验证了公式的可行性和有效性,当模型的非线性强度较高时,偏差改正加权最小二乘法相对而言更加精确。

1 非线性加性乘性混合误差模型

若一组观测值混有加性和乘性随机误差,其相应的加性和乘性混合误差模型的数学表达式为^[6]:

$$\mathbf{y} = f(\boldsymbol{\beta}) \odot (\mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}_m) + \boldsymbol{\varepsilon}_a \quad (1)$$

式中, $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ 为观测值; $f(\boldsymbol{\beta})$ 表示未知参数的函数; $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{R}^{t \times 1}$ 表示未知参数; \odot 表示为向量或者矩阵的 Hadamard 积; $\mathbf{1} \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ 表示元素全为 1 的列向量; $\boldsymbol{\varepsilon}_m \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ 表示零均值乘性随机误差, $\boldsymbol{\varepsilon}_a \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ 表示零均值加性随机误差,且两者均服从正态分布。

则其线性加性乘性混合误差模型可以表达为:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} \odot (\mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}_m) + \boldsymbol{\varepsilon}_a \quad (2)$$

式中, $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n]^T$, 其中 $\mathbf{a}_i \in \mathbf{R}^{1 \times t}$; $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t]^T$ 。

本文研究的 $f(\boldsymbol{\beta})$ 是 $\boldsymbol{\beta}$ 的非线性函数形式,乘性和加性随机误差的方差和协方差矩阵为

$\Sigma_m = \sigma_m^2 Q_m$, $\Sigma_a = \sigma_a^2 Q_a$, 假定 Q_m 和 Q_a 都是正定阵, 可以将其 Cholesky 分解, 转换成单位阵^[6]。通常假设乘性误差 ϵ_m 和加性误差 ϵ_a 彼此独立且各自具有相同的方差, 即 $\Sigma_m = \sigma_m^2 I$, $\Sigma_a = \sigma_a^2 I$, 则根据误差传播定律, 可以获得非线性加性乘性混合误差模型观测值的期望、方差和协方差阵分别为:

$$E(\mathbf{y}) = f(\boldsymbol{\beta}) \quad (3)$$

$$\Sigma_y = \text{diag}(f(\boldsymbol{\beta})^2) \sigma_m^2 + I \sigma_a^2 \quad (4)$$

其中, σ_m^2 和 σ_a^2 分别为 ϵ_m 和 ϵ_a 的单位权方差; $\text{diag}(f(\boldsymbol{\beta})^2)$ 为对角线上元素为 $f(\boldsymbol{\beta})^2$ 的对角阵。可以看出, 在非线性加性乘性混合误差模型中, 观测值的方差和协方差阵与未知参数 $\boldsymbol{\beta}$ 有关, 是未知参数的函数。

1.1 非线性加性乘性混合误差模型的最小二乘估计

当模型的非线性强度较低时, 其参数求解方法一般采用线性化最小二乘法^[20], 其主要思想在于用非线性函数模型的一阶泰勒函数近似逼近该函数模型。利用泰勒级数将式 (1) 中的非线性函数 $f(\boldsymbol{\beta})$ 在参数初值 $\boldsymbol{\beta}_0$ 处展开至一次项, 得到线性化后的函数为:

$$f(\boldsymbol{\beta}) \approx f(\boldsymbol{\beta}_0) + J_{\boldsymbol{\beta}_0} \Delta \boldsymbol{\beta} \quad (5)$$

式中, $\Delta \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0$, $J_{\boldsymbol{\beta}_0}$ 为 $\frac{\partial f(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}^T}$ 在 $\boldsymbol{\beta}_0$ 处取值的 Jacobian 矩阵

由式 (1) 和式 (5) 联立可得线性误差方程

$$\mathbf{V} = J_{\boldsymbol{\beta}_0} \Delta \boldsymbol{\beta} - \mathbf{L} \quad (6)$$

式中, $\mathbf{L} = \mathbf{y} - f(\boldsymbol{\beta}_0)$ 。

应用最小二乘原理求解其线性化最小二乘解为

$$\Delta \boldsymbol{\beta} = (J_{\boldsymbol{\beta}_0}^T J_{\boldsymbol{\beta}_0})^{-1} J_{\boldsymbol{\beta}_0}^T \mathbf{L} \quad (7)$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} = \boldsymbol{\beta}_0 + \Delta \boldsymbol{\beta} \quad (8)$$

1.2 非线性加性乘性混合误差模型的高斯-牛顿法

应用普通最小二乘准则于式 (1), 得目标函数:

$$\min: F_1 = (\mathbf{y} - f(\boldsymbol{\beta}))^T (\mathbf{y} - f(\boldsymbol{\beta})) \quad (9)$$

由于 $f(\boldsymbol{\beta})$ 是 $\boldsymbol{\beta}$ 的非线性形式, 当模型非线性强度较低时, 可采用上述解法将其线性化近

似。对于精度较低的初始值，则需要进行迭代计算，而常用的迭代解法为高斯-牛顿法等^[18-20]，其主要思想在于用线性化最小二乘估计去逼近非线性最小二乘估计。

其求解步骤：

- (1) 假定在选定初始值 β_0 后，迭代已求得 $\hat{\beta}_k$ ，现在考虑 $\hat{\beta}_{k+1}$ 的求法。
- (2) 将 $f(\beta)$ 在 $\hat{\beta}_k$ 处按泰勒公式线性化得

$$f(\beta) = f(\hat{\beta}_k) + B_k \delta\beta_k \quad (10)$$

式中， $B_k = \left. \frac{\partial f(\beta)}{\partial \beta} \right|_{\beta=\hat{\beta}_k}$ ， $\delta\beta_k = \hat{\beta}_{k+1} - \hat{\beta}_k$

- (3) 将(10)式代入目标函数对未知参数 β 求导并令其等于0的方程中，即

$$B_k^T B_k \delta\beta_k = B_k^T l_k \quad (11)$$

式中， $l_k = y - f(\hat{\beta}_k)$ 。

目标函数(9)的最优解就是 β 的最小二乘估计，即：

$$\delta\beta_k = (B_k^T B_k)^{-1} B_k^T l_k \quad (12)$$

$$\hat{\beta}_{k+1} = \hat{\beta}_k + \delta\beta_k \quad (13)$$

(4) 采用公式(12)和(13)进行迭代求解。若满足 $\|\delta\beta_k\| < \varepsilon_0$ 这一迭代终止条件，则输出该结果；否则，需要进行继续迭代，一直到满足收敛条件。

1.3 非线性加乘性混合误差模型的加权最小二乘估计

对非线性加性乘性混合误差模型应用加权最小二乘准则，其目标函数为：

$$\min: F = (y - f(\beta))^T \Sigma_y^{-1} (y - f(\beta)) \quad (14)$$

对式(14)求未知参数 β 的偏导数，并令其等于0有：

$$2X^T \hat{\Sigma}_y^{-1} (f(\hat{\beta}_{WLS}) - y) + \begin{bmatrix} (y - f(\hat{\beta}_{WLS}))^T \frac{\partial \hat{\Sigma}_y^{-1}}{\partial \beta_1} (y - f(\hat{\beta}_{WLS})) \\ \vdots \\ (y - f(\hat{\beta}_{WLS}))^T \frac{\partial \hat{\Sigma}_y^{-1}}{\partial \beta_t} (y - f(\hat{\beta}_{WLS})) \end{bmatrix} = 0 \quad (15)$$

其中， $X = \left. \frac{\partial f(\beta)}{\partial \beta^T} \right|_{\beta=\hat{\beta}_{WLS}}$ ， $\hat{\beta}_{WLS}$ 是 β 的加权最小二乘估计值； $\hat{\Sigma}_y^{-1}$ 是 Σ_y^{-1} 的估值。根据矩阵微分

原理，并记 $\hat{D}_1 = \text{diag}(f(\beta))$ ， $x_i = [x_{1i} \ x_{2i} \ \cdots \ x_{ni}]^T$ ，有

$$\frac{\partial \hat{\Sigma}_y^{-1}}{\partial \beta_i} = \frac{-2\sigma_m^2 \text{diag}(x_i) \hat{D}_1}{[\text{diag}(f(\hat{\beta}_{WLS})^2 \sigma_m^2) + I \sigma_a^2]^2} \quad (16)$$

将式(16)代入式(15)得，并将 $f(\hat{\beta}_{WLS})$ 在初始值 β_0 处泰勒公式展开：

$$\mathbf{X}^T \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-1} \mathbf{X} \Delta \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{WLS}} - \mathbf{X}^T \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-1} \mathbf{l} - \mathbf{V}_\varepsilon = 0 \quad (17)$$

式中, $\Delta \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{WLS}} = \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{WLS}} - \boldsymbol{\beta}_0$, $\mathbf{l} = \mathbf{y} - f(\boldsymbol{\beta}_0)$:

$$\mathbf{V}_\varepsilon = \begin{bmatrix} (\mathbf{y} - f(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{WLS}}))^T \sigma_m^2 \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-2} \text{diag}(x_1) \widehat{\mathbf{D}}_1 (\mathbf{y} - f(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{WLS}})) \\ \vdots \\ (\mathbf{y} - f(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{WLS}}))^T \sigma_m^2 \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-2} \text{diag}(x_t) \widehat{\mathbf{D}}_1 (\mathbf{y} - f(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{WLS}})) \end{bmatrix} \quad (18)$$

求解方程 (17), 得非线性加性乘性混合误差模型的形式解为:

$$\Delta \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{WLS}} = (\mathbf{X}^T \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-1} \mathbf{l} + (\mathbf{X}^T \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{V}_\varepsilon \quad (19)$$

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{WLS}} = \boldsymbol{\beta}_0 + \Delta \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{WLS}} \quad (20)$$

由非线性回归分析可知, 函数的非线性特性会使参数估计产生偏差, 而信号 $f(\boldsymbol{\beta})$ 、 $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-1}$ 和 \mathbf{V}_ε 都是 $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{WLS}}$ 的非线性函数, 则非线性加性乘性混合误差模型的加权最小二乘估计必会产生偏差, 也不再具有无偏性。

2 非线性加乘性混合误差模型的加权最小二乘估计偏差分析

由于式 (1) 的加权最小二乘估计是有偏的, 所以有必要对参数估计的偏差进行分析, 首先, 需要将观测值的方差和协方差阵的逆矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}$ 在未知参数的真值 $\boldsymbol{\beta}$ 处进行泰勒公式的一阶近似展开。

\mathbf{r} 为观测值的残差值, 即:

$$\mathbf{r} = \mathbf{y} - f(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{WLS}}) \quad (21)$$

记加权最小二乘估计与其真值之差为 \mathbf{b} , 则有:

$$\mathbf{b} = \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{WLS}} - \boldsymbol{\beta} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{b}_\beta \quad (22)$$

式中, \mathbf{A} 是确定性矩阵, $\boldsymbol{\varepsilon} = [\boldsymbol{\varepsilon}_m^T, \boldsymbol{\varepsilon}_a^T]^T$, \mathbf{b}_β 是 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的二次型。

逆矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}$ 在未知参数的真值 $\boldsymbol{\beta}$ 处泰勒公式一阶近似展开值为:

$$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-1} = \boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} - \Delta \boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} \quad (23)$$

$$\Delta \boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} = \boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} (\mathbf{D}_{ab} \sigma_m^2 \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_1 \sigma_m^2 \mathbf{D}_{ab}) \boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} \quad (24)$$

式中, \mathbf{D}_{ab} 为对角矩阵, 其第 i 个对角元素为 $\mathbf{x}_i^T \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}$ 。

将 $f(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{WLS}})$ 在真值 $\boldsymbol{\beta}$ 处泰勒公式展开, 并将式 (22) 代入式 (21) 得:

$$\mathbf{r} = \mathbf{y} - f(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{WLS}}) = f(\boldsymbol{\beta}) \odot \boldsymbol{\varepsilon}_m + \boldsymbol{\varepsilon}_a - \mathbf{X} \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{X} \mathbf{b}_\beta \quad (25)$$

令

$$\boldsymbol{\varepsilon}_y = f(\boldsymbol{\beta}) \odot \boldsymbol{\varepsilon}_m + \boldsymbol{\varepsilon}_a \quad (26)$$

将式 (23) 到式 (26) 代入式 (15) 中, 并将式 (15) 限制为 $\boldsymbol{\varepsilon} = [\boldsymbol{\varepsilon}_m^T, \boldsymbol{\varepsilon}_a^T]^T$ 的二阶近似, 重新排列后, 将式 (15) 改写为

$$\mathbf{X}^T(\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} - \Delta\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1})(-\boldsymbol{\varepsilon}_y + \mathbf{X}\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{X}\mathbf{b}_\beta) - \mathbf{G}\boldsymbol{\varepsilon}_y = 0 \quad (27)$$

式中,

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} (\mathbf{y} - f(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{WLS}}))^T \boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} \mathbf{D}_{ae_1} \sigma_m^2 \mathbf{D}_1 \boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} \\ (\mathbf{y} - f(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{WLS}}))^T \boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} \mathbf{D}_{ae_2} \sigma_m^2 \mathbf{D}_1 \boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} \\ \vdots \\ (\mathbf{y} - f(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{WLS}}))^T \boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} \mathbf{D}_{ae_t} \sigma_m^2 \mathbf{D}_1 \boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} \end{bmatrix} \quad (28)$$

展开为

$$\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} (-\boldsymbol{\varepsilon}_y + \mathbf{X}\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{X}\mathbf{b}_\beta) + \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} (\mathbf{D}_{ab} \sigma_m^2 \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_1 \sigma_m^2 \mathbf{D}_{ab}) \boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_y - \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} (\mathbf{D}_{ab} \sigma_m^2 \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_1 \sigma_m^2 \mathbf{D}_{ab}) \boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} \mathbf{X}\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{G}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_y = 0 \quad (29)$$

式中

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_y^T \boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} \mathbf{D}_{ae_1} \sigma_m^2 \mathbf{D}_1 \boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y^T \boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} \mathbf{D}_{ae_2} \sigma_m^2 \mathbf{D}_1 \boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y^T \boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} \mathbf{D}_{ae_t} \sigma_m^2 \mathbf{D}_1 \boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} \end{bmatrix} \quad (30)$$

因为 $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_a$ 是任意的, 为了使式 (29) 成立, 式 (29) 中的一阶项和二阶项的系数都要为零, 对于一阶项, 有

$$\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} (-\boldsymbol{\varepsilon}_y + \mathbf{X}\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}) = 0 \quad (31)$$

则

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_y \quad (32)$$

式中,

$$\mathbf{N} = \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} \mathbf{X} \quad (33)$$

在二阶项的情况下, 将式 (32) 代入到 (29) 中, 得

$$\mathbf{N}\mathbf{b}_\beta + \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} (\mathbf{D}_{ab} \sigma_m^2 \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_1 \sigma_m^2 \mathbf{D}_{ab}) \boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_y - \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} (\mathbf{D}_{ab} \sigma_m^2 \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_1 \sigma_m^2 \mathbf{D}_{ab}) \boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} \mathbf{X}\mathbf{N}^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_y - \mathbf{G}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_y = 0 \quad (34)$$

将文献[4]的引理扩展到非线性加性乘性混合误差模型的加权最小二乘估计的偏差分析时, 总结偏差的一般结果, 得

对于具有混合加性和乘性随机误差 $\boldsymbol{\varepsilon}_a$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ 的一般形式的加性和乘性混合模型, 假设 $\boldsymbol{\varepsilon}_a$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ 彼此独立且均值为零、方差和协方差阵分别为 $\boldsymbol{\Sigma}_a$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}_m$, WLS 估计的偏差是由于 $\boldsymbol{\Sigma}_y$ 对

参数 β 的依赖，由

$$\mathbf{b}(\hat{\beta}_{\text{WLS}}) = E(\mathbf{b}_\beta) = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{G}_2 \quad (35)$$

其中 $\mathbf{b}(\hat{\beta}_{\text{WLS}})$ 表示 WLS 估计值 β 的偏差， \mathbf{G}_2 由下式给出：

$$\mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} \text{tr}\{\mathbf{D}_{ae_1}\sigma_m^2\mathbf{D}_1\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\} \\ \text{tr}\{\mathbf{D}_{ae_2}\sigma_m^2\mathbf{D}_1\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\} \\ \vdots \\ \text{tr}\{\mathbf{D}_{ae_t}\sigma_m^2\mathbf{D}_1\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\} \end{bmatrix} \quad (36)$$

该证明类似于文献[4]中引理证明。从该引理可知： β 的 WLS 估计偏差确实归因于 $\boldsymbol{\Sigma}_y$ 对 β 的依赖性，因为式(36)中的向量 \mathbf{G}_2 来自于 $\boldsymbol{\Sigma}_y$ 对 β 的非零偏导数。

3 非线性加乘性混合误差模型的偏差改正加权最小二乘估计

通过对式(1)未知参数的加权最小二乘估计的偏差分析得，偏差项对应了目标函数对未知参数求导后的第三项，因此，去掉方程式(17)中左边的第三项，就能够得到模型偏差改正后的加权最小二乘参数估值，称为偏差改正加权最小二乘估计，记为 $\hat{\beta}_{\text{bcWLS}}$ ：

则式(17)化为

$$\mathbf{X}^T\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}(\mathbf{y} - f(\hat{\beta}_{\text{bcWLS}})) = \mathbf{X}^T\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}(\mathbf{y} - f(\beta) - \mathbf{X}\Delta\hat{\beta}_{\text{bcWLS}}) = 0 \quad (37)$$

$$\Delta\hat{\beta}_{\text{bcWLS}} = (\mathbf{X}^T\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\mathbf{l} \quad (38)$$

$$\hat{\beta}_{\text{bcWLS}} = \beta_0 + \Delta\hat{\beta}_{\text{bcWLS}} \quad (39)$$

因为 $\hat{\beta}_{\text{bcWLS}}$ 是一个与 β 相关的非线性函数，需要对其进行迭代求解。选定合适的初始值，利用式(38)和式(39)迭代求解，直到满足迭代终止条件，输出结果。

4 算例及分析

为了验证本文基于非线性加乘性混合误差模型和泰勒级数展开的思想所推导的最小二乘法(LS)、高斯-牛顿法、加权最小二乘法(WLS)及偏差改正加权最小二乘法(BCWLS)的求解公式在参数估计中的性能，我们通过模拟了三个非线性强度逐渐增加的模拟算例，并对其参数估计结果进行了对比分析。分别将上述四种参数估计方法命名为方案一、方案二、方案三和方案四。

4.1 算例 1

首先，为了初步验证本文所推导的 LS、高斯-牛顿法、WLS、BCWLS 在非线性的加乘

性混合误差模型中的可行性，算例 1 模拟了一个简单的非线性强度较弱的非线性加性乘性混合误差模型。非线性模型的函数形式如下：

$$f(\boldsymbol{\beta}) = e^{\beta_1 x^2 + \beta_2 x + \beta_3} \quad (40)$$

受到乘性随机误差和加性随机误差干扰的拟合模型为：

$$\mathbf{y} = e^{\beta_1 x^2 + \beta_2 x + \beta_3} \odot (\mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}_m) + \boldsymbol{\varepsilon}_a \quad (41)$$

式中， \mathbf{x} 是 n 维自变量向量， \mathbf{y} 为对应的因变量， $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_a$ 分别为独立同分布的乘性随机误差和加性随机误差。

本算例中，自变量 x 在 $[0,1]$ 内以 0.01 的间隔均匀取值，设定 β_1 、 β_2 和 β_3 的真值分别为 1、2 和 1，乘性随机误差和加性随机误差的标准差分别为 0.05 和 0.15，单位权方差为 0.09。

为了说明该拟合模型受乘性和加性混合误差的影响程度，本文将该模型受乘性和加性混合误差干扰前后的数据绘于图 1 中。从中可以看出，由于误差的干扰，使得模型上的各点严重偏离原有的位置。为了减小乘性和加性混合误差对该拟合模型的影响，利用前面定义的四中方案分别对该误差模型的未知参数和单位权方差进行求解，共 100 组独立模拟实验参数估计结果，其均值、单位权方差和二范数分别列于表 1。由于乘性和加性误差随机性的影响，使得参数估值的 100 组独立模拟实验结果之间波动较大，因此将其数据绘于图 2 中。

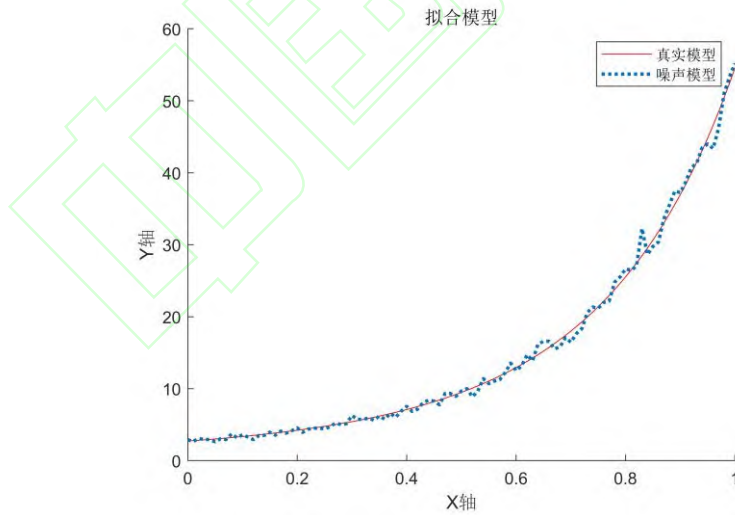


图 1 算例 1 中真实模型与噪声模型

Fig.1 Real model and noise model in example 1

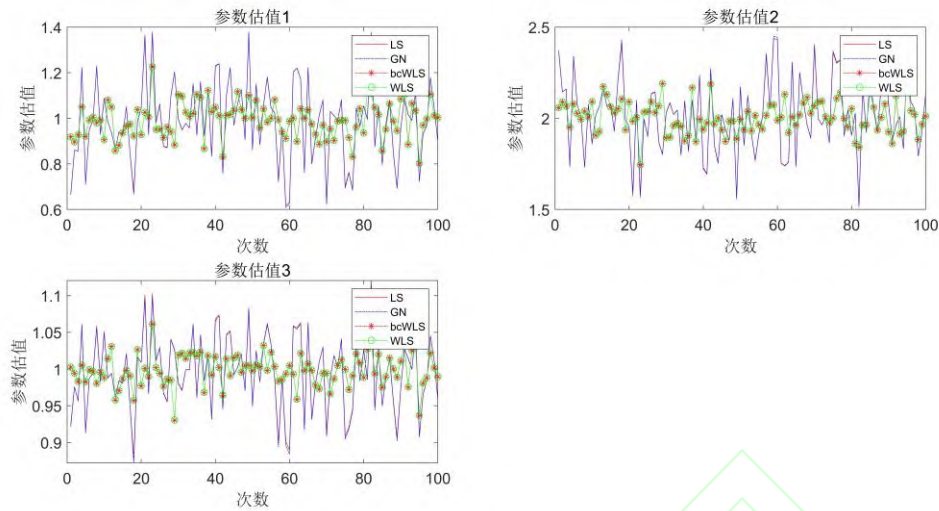


图 2 100 组各个参数估值结果

Fig.2 Estimation results of each parameter in 100 groups

表 1 模型 1 拟合的参数估值与二范数

Tab.1 Parameter estimation and 2-norm of Model 1 fitting

参数	β_1	β_2	β_3	$\ \Delta\beta\ $	σ_0^2
真值	1	2	1	-	0.09
方案一	0.987008	2.014165	0.996062	0.019620	1.029960
方案二	0.985249	2.017070	0.994818	0.023148	1.029940
方案三	0.990915	2.007752	0.998577	0.012027	0.092289
方案四	0.990943	2.007731	0.998354	0.012021	0.092324

由图 1 可知，由于乘性和加性混合随机误差对于该非线性拟合模型的影响很严重，使得其值偏离了真值。从表 1 中参数估值与其真值的 2 范数可得，方案一和方案二求得的 2 范数结果都较大；由于方案三考虑了观测值的权，其结果更接近于真值，其 2 范数为 0.012027，从中可知，加性和乘性随机误差对于非线性拟合模型的影响很大，而合理的定权方案有利于参数的正确估计；方案四是对方案三的参数估值进行了偏差改正，由于该模型的非线性强度较弱且函数形式较为简单，其 2 范数与方案三的 2 范数相差不大，为 0.012021。由表 1 中的单位权方差可知，由于方案一和方案二均未考虑模型观测值的权，导致求得的单位权方差与真值之间相差较大，而方案三和方案四都考虑了其影响，使得单位权方差的估值更接近于真值，上述结论也在一定程度上表明了合理的定权方法对于参数估值的积极影响，方案三和方案四相对于方案一和方案二更有优势。

4.2 算例 2

为了进一步验证本文所推导的 LS、高斯-牛顿法、WLS、BCWLS 在非线性和乘性混合误差模型中的可行性，模拟算例 2 模拟了一个简单的非线性强度较强的非线性加性乘性混合误差模型。非线性模型的函数形式如下：

$$f(\boldsymbol{\beta}) = \beta_1 e^{\beta_2 x} \quad (42)$$

受到乘性误差和加性误差干扰的拟合模型为：

$$\mathbf{y} = \beta_1 e^{\beta_2 x} \odot (\mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}_m) + \boldsymbol{\varepsilon}_a \quad (43)$$

式中， \mathbf{x} 是 n 维自变量向量， \mathbf{y} 为对应的因变量， $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_a$ 分别为独立同分布的乘性随机误差和加性随机误差， β_1 和 β_2 为模型的未知参数。

本算例中，自变量 \mathbf{x} 在 $[0,1]$ 内以 0.01 的间隔均匀取值，设定 β_1 和 β_2 的真值分别为 5 和 10，乘性随机误差和加性随机误差的标准差分别为 0.05 和 0.15，单位权方差为 0.09。

为了说明该拟合模型受乘性和加性混合误差的影响程度，本文将该模型受乘性和加性混合误差干扰前后的数据绘于图 3 中。从中可以看出，由于误差的干扰，使得模型上的各点严重偏离原有的位置。为了减小乘性和加性混合误差对该拟合模型的影响，利用前面定义的四中方案分别对该误差模型的未知参数和单位权方差进行求解，共 100 组独立模拟实验参数估计结果，其均值、单位权方差和二范数分别列于表 2。由于乘性和加性误差随机性的影响，使得参数估值的 100 组独立模拟实验结果之间波动较大，因此将其数据绘于图 4 中。

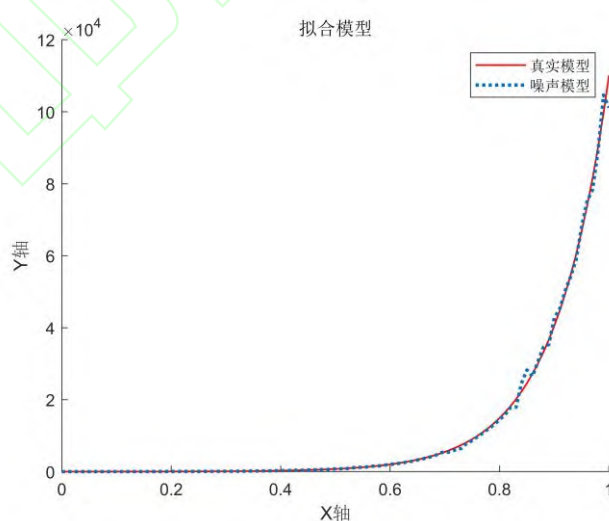


图 3 算例 2 中真实模型与噪声模型

Fig.3 Real model and noise model in example 2

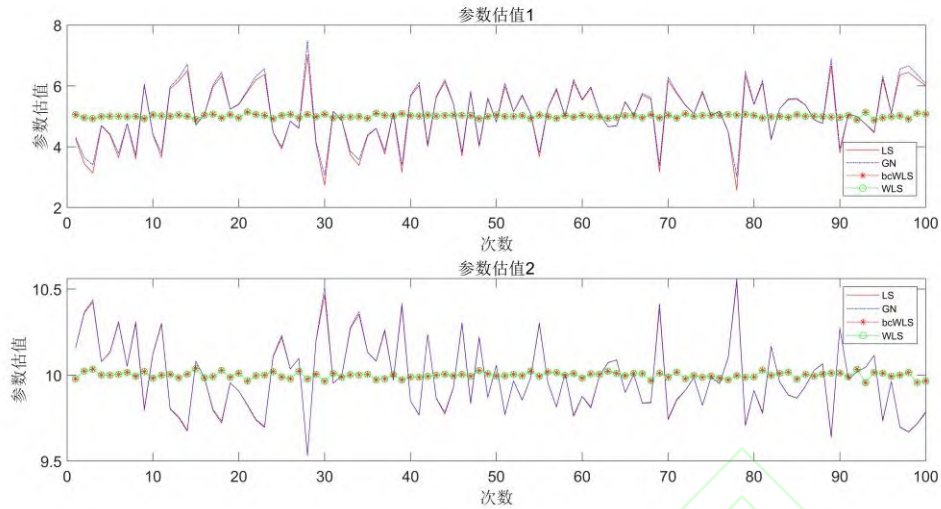


图 4 100 组各个参数估值结果

Fig.4 Estimation results of each parameter in 100 groups

表 2 模型 2 拟合的参数估值与二范数

Tab.2 Parameter estimation and 2-norm of Model 2 fitting

参数	β_1	β_2	$\ \Delta\beta\ $	σ_0^2
真值	5	10	-	0.09
方案一	5.057011	9.987402	0.058386	2207085.07874815
方案二	5.129931	9.991278	0.130223	1436409.49053327
方案三	5.006830	9.998851	0.006926	0.089219
方案四	5.005717	9.998858	0.005830	0.089257

由图 3 可知，由于拟合模型受到乘性和加性混合误差的扰动很大。将表 2 中参数估值与真值的 2 范数进行对比分析可知，方案二的 2 范数结果最大，原因在于对于未考虑观测值的权，而且在每次迭代过程中会受到初始值和加性乘性混合随机误差的影响。方案一比方案二的 2 范数结果较好一些，主要是由于未迭代，受到随机误差的影响较小；而方案三考虑了观测值的权，其结果优于前两种方案，其 2 范数为 0.006926，从中可知，加性和乘性误差对于非线性拟合模型的影响很大，而合理的定权方案有利于参数的正确估计；方案四是对方案三的参数估值进行了偏差改正，其 2 范数比方案三的 2 范数小，为 0.005830，说明了方案四在对非线性较强的加性乘性混合误差模型求解参数估值的优势。

将表 2 中的单位权方差进行对比分析，从中可知方案一和方案二求得的单位权方差与其真值之间相差过大，而方案三和方案四求解的单位权方差与真值很相近，其原因在于方案一和方案二均未考虑模型观测值的权，而方案三和方案四都考虑了其影响，使得单位权方差的估值更加接近于真值。从上述结论可知，对于非线性加性和乘性混合误差模型的参数估计，

验证了该定权方法的合理性与正确性，对于参数估值有着积极的影响，方案四相对于前三种方案更有优势。

4.3 算例 3

为了说明 LS、高斯-牛顿法、WLS 和 BCWLS 在处理非线性加性乘性混合误差模型的实际数据的可行性和应用价值，算例 3 采用了 Mogi(1958)首次提出的 Mogi 模型^[26]。该模型可以利用火山区域的地表形变观测数据来反演火山岩浆压力源参数，火山岩浆压力源参数对于火山的危险性评价有着非常重大的实际意义。地表位移包括了垂直位移和水平位移，本文采用了 Mogi 提出的垂直位移单一反演的火山形变 Mogi 模型。地表垂直位移的非线性函数形式如下^[26]：

$$f(\boldsymbol{\beta}) = \frac{3D\Delta V}{4\pi(D^2+(x-x_0)^2+(y-y_0)^2)^{3/2}} \quad (44)$$

受到乘性随机误差和加性随机误差干扰的地表垂直位移模型为：

$$\Delta h = \left(\frac{3D\Delta V}{4\pi(D^2+(x-x_0)^2+(y-y_0)^2)^{3/2}} \right) \odot (\mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}_m) + \boldsymbol{\varepsilon}_a \quad (45)$$

式中， Δh 表示地表垂直位移， ΔV 表示为体积增量， D 表示为源的中心深度， (x_0, y_0) 表示为岩浆压力源的中心在平面上的投影坐标， $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_a$ 分别为 Δh 的独立同分布的乘性随机误差和加性随机误差， $\boldsymbol{\beta} = [\Delta V, D, x_0, y_0]$ 向量中的元素分别为 β_1 、 β_2 、 β_3 和 β_4 四个未知参数。

算例仿真了某一火山区域的垂直位移观测数据：观测点的横纵坐标的取值范围为 $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \in [-5,5]\text{km} \times [-5,5]\text{km}$ ，相邻垂直形变监测点的间隔为 0.5km，压力源参数真值分别设置为：6000×103km、4km、0km、0km；将以上数据代入到 Mogi 模型中通过正演可以得到地表垂直位移；最后将乘性随机误差和加性随机误差施加到垂直位移模拟位移值中，乘性随机误差和加性随机误差均值均为零，标准差分别为 0.05 和 15mm，得到受混合误差干扰后的垂直位移如图 5 所示，其中图 5 中的图例部分展示了由 Mogi 模型正演得到的含加性乘性混合误差的垂直形变长度，颜色随长度变化。

为了减小乘性和加性混合误差对地表垂直位移模型的影响，利用前面定义的四中方案分别对该误差模型的未知参数和单位权方差进行求解，共 100 组独立模拟实验参数估计结果，其均值、单位权方差和二范数分别列于表 3。由于乘性和加性误差随机性的影响，使得参数估值的 100 组独立模拟实验结果之间波动较大，因此将其数据绘于图 6 中。

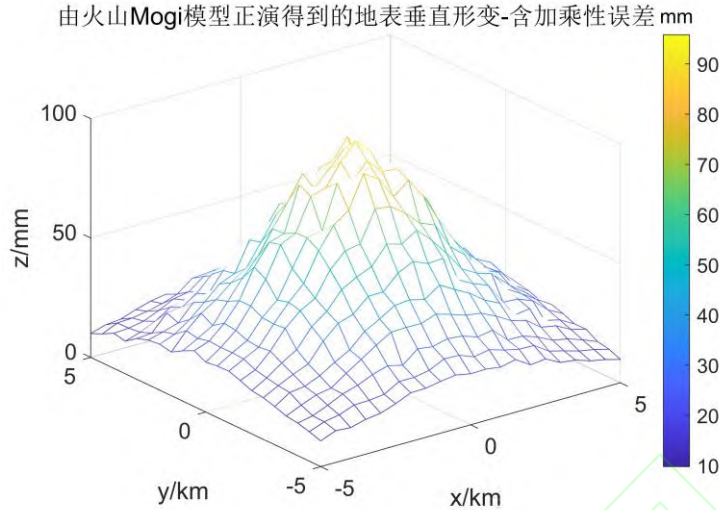


图 5 由火山 Mogi 模型正演得到的地表垂直形变-含加乘性误差

Fig.5 The vertical displacement of forward the volcano Mogi model - with additive and multiplicative errors

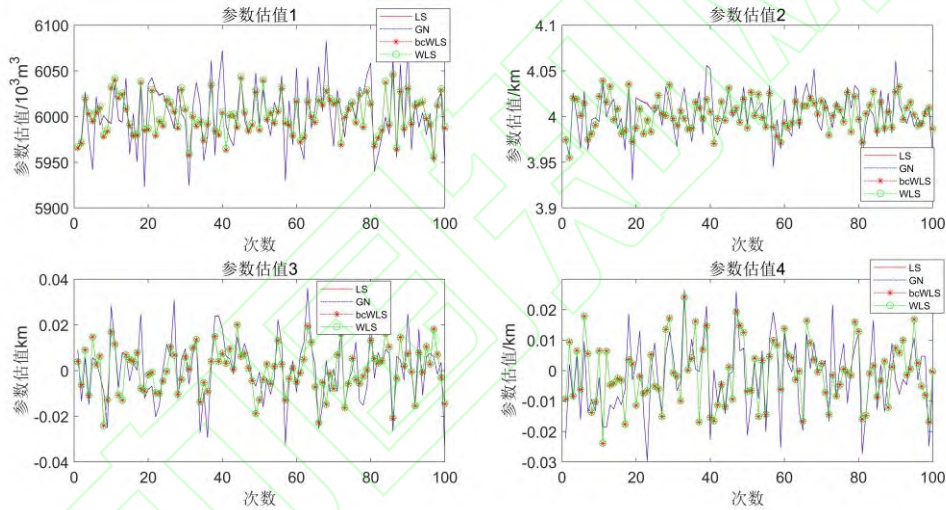


图 6 100 组各个参数估值结果

Fig.6 Estimation results of each parameter in 100 groups

表 3 模型 3 的参数估值与二范数

Tab.3 Parameter estimation and 2-norm of Model 3

参数	$\beta_1/10^3\text{m}^3$	β_2/km	β_2/km	β_1/km	$\ A\beta\ $	σ_0^2
真值	6000	4	0	0	-	0.09
方案一	6002.655037	4.003377	0.5391×10^{-6}	-1.8900×10^{-6}	2.655040	4.078486
方案二	6002.520833	4.003256	0.5496×10^{-6}	-1.8750×10^{-6}	2.520835	4.078481
方案三	6002.589992	4.002479	0.3907×10^{-6}	-0.8160×10^{-6}	2.589991	0.090849
方案四	6001.231704	4.002470	0.7008×10^{-6}	-0.8207×10^{-6}	1.231706	0.090889

尽管本算例中施加的乘性随机误差的标准差仅为 0.05，但是对于垂直位移模型的干扰也是很严重的，由此可见，对于受到加性和乘性随机误差干扰的地表垂直位移模型的研究是

有必要的。

从表 3 中参数估计结果与其真值的 2 范数的对比分析可得, 与方案四相比, 方案一、方案二和方案三的求得的 2 范数结果都较大, 其二范数结果分别为 2.655040、2.520835 和 2.589991; 当模型的非线性强度较高时, 线性化的方法的参数估计结果是最差的。因此, 当模型过于复杂, 传统的线性化方法已经不适用时, 就需要进行迭代求解。通过非线性函数的回归分析可以得出, 非线性函数的非线性特点将会使得参数估值产生偏差, 所以方案三的结果会产生一定的偏差, 其 2 范数的结果相对而言会较差一些, 而方案四是对方案三的参数估值进行了偏差改正, 由于该模型的非线性强度较高且函数形式更为复杂, 其 2 范数比方案三的 2 范数更小, 为 1.231706。上述结论验证了对于非线性较强且函数形式较为复杂的加性乘性混合误差模型的参数估计而言, 方案四更具有优势, 其参数估值结果也更加准确。

通过对表 3 中的单位权方差的分析可知, 方案一和方案二的单位权方差的估值偏离真值较远, 原因在于这两种方案都未考虑非线性加性乘性混合误差模型中观测值的权; 而方案三和方案四都考虑了模型观测值的方差和协方差阵的影响, 单位权方差的估值会更加接近于真值, 在一定程度上表明了合理的定权方法对于非线性加性乘性混合误差模型参数估值的积极影响, 与方案一和方案二相比较, 方案三和方案四更有优势。

4.4 算例 4

为了进一步验证 LS、高斯-牛顿法、WLS 和 BCWLS 解法在处理非线性加性乘性混合误差模型的实际数据的可行性和潜在应用价值, 算例 4 将文献[27]中的例 7-5 进行改化, 根据已知点 A、B 和 C 点, 求得待定点 D 的坐标值 β_1 和 β_2 , 独立观测如图 7 所示的测边网。测边网的非线性平差模型的函数形式如下:

$$f(\boldsymbol{\beta}) = \sqrt{(\beta_1 - X)^2 + (\beta_2 - Y)^2} \quad (46)$$

受到乘性误差和加性误差干扰的观测方程如下:

$$\mathbf{y} = \left(\sqrt{(\beta_1 - X)^2 + (\beta_2 - Y)^2} \right) \odot (\mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}_m) + \boldsymbol{\varepsilon}_a \quad (47)$$

式中, \mathbf{y} 为观测值, \mathbf{X} 和 \mathbf{Y} 分别是已知点 A、B 和 C 的 x 和 y 坐标, $\mathbf{X} \in [2692.201, 2092.765, 2210.593]$, $\mathbf{Y} \in [5203.153, 5132.304, 5665.422]$, 单位为 m, $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_a$ 分别为独立同分布的乘性随机误差和加性随机误差。本算例, 设定 β_1 和 β_2 的真值分别为 2326.259m 和 5330.184m, 乘性随机误差和加性随机误差的标准差分别为 0.05 和 15mm, 单位权方差为 0.09。

乘性和加性混合误差对测边网平差模型的干扰很严重。为了减小乘性和加性混合随机误差对该平差模型的影响,利用前面定义的四种方案分别对该误差模型的未知参数和单位权方差进行求解,其均值、单位权方差和二范数分别列于表 4。由于乘性和加性误差随机性的影响,使得参数估值的 100 组独立模拟实验结果之间波动较大,因此将其数据绘于图 8 中。

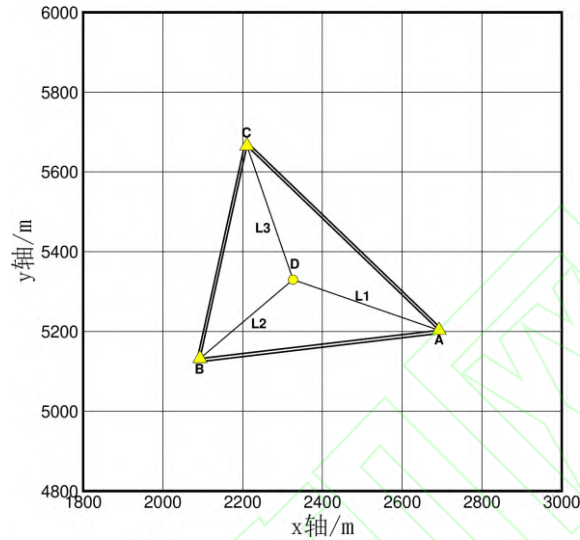


图 7 测边网

Fig.7 Border measurement network

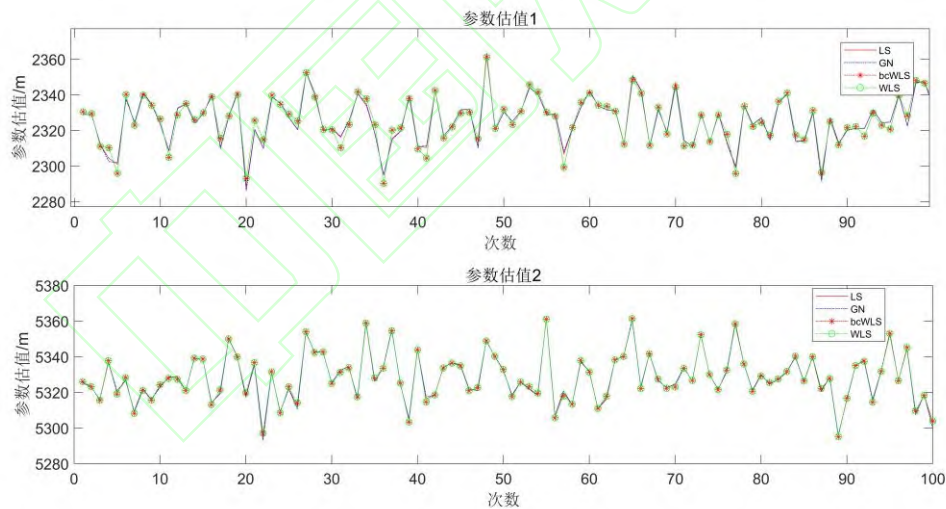


图 8 100 组各个参数估值结果

Fig.8 Estimation results of each parameter in 100 groups

表 4 模型 4 的参数估值与二范数

Tab.4 Parameter estimation and 2-norm of Model 4

参数	β_1/m	β_2/m	$\ \Delta\beta\ $	σ_0^2
真值	2326.259	5330.184	-	0.09
方案一	2325.813010	5328.492122	1.749673	326.449962
方案二	2325.700997	5328.410668	1.859052	325.667101

方案三	2325.895473	5328.526026	1.697360	0.093187
方案四	2325.901051	5328.526686	1.695528	0.093188

通过将表 4 中四种方案的参数估值以及参数估值与真值之间的 2 范数对比可以得出，对于同时包含加性和乘性随机误差的测边网平差模型而言，方案二的二范数是最大的，方案一由于线性化的方法，在初始较好的情况下，其 2 范数相对于方案一会好一些，方案三和方案四的参数估值与真值之差与前两种方案相比的准确性会有所提高，其 2 范数进一步说明了该结果，该结果表明了合理的定权方案能够得到较为合理的参数估值。通过将方案四与前三种方案对比分析可知，方案四优于前三种方案，参数估值会更加接近于真值，其 2 范数也很小，为 1.695528，其参数估值的正确性是最高的。

同时，从表 4 中单位权方差的估值结果可以看出，由于方案一和方案二未考虑到观测值的权值，使得两个方案的单位权方差估值严重偏离于真值，且不符合实际情况。后两种方案都考虑了观测值权值的影响，使得其单位权方差的估值与真值也较为接近。上述实验结果说明了方案四在处理混合加性和乘性混合随机误差的测边网平差模型的可行性和优势性。

5 结论

本文在文献[10]对于线性加性乘性混合误差模型的理论研究基础上，将其扩展到非线性加性乘性混合误差模型的参数估计方法的研究，针对于未知参数和观测值是非线性的关系，通过误差传播定律确定了其合理的权阵，应用最小二乘原理、泰勒级数展开的思想和高斯-牛顿法，推导了其相应的最小二乘解、高斯-牛顿解和加权最小二乘解的求解公式，并对非线性情况下的加权最小二乘解进行了偏差分析，推导了其二阶情况下的求解公式。通过对模拟实验结果的分析，可得合理的定权方法对于非线性加性乘性混合误差模型的参数估值有着积极的影响，验证了该定权方法的正确性，在这四种参数估计方法中，偏差改正加权最小二乘估计方法更具有优势。

致谢：感谢匿名审稿专家对本文提出的宝贵意见。

参考文献

- [1] Cui Xizhang, Yu Zongchou, Tao Benzao, et al. Generalized surveying adjustment (new

- edition)[M]. *Wuhan: Wuhan University Publishing House*, 2005.(崔希璋, 於宗俦, 陶本藻. 广义测量平差(新版)[M].武汉: 武汉大学出版社, 2005.)
- [2] Rodriguez E, Martin J M. Theory and design of interferometric synthetic aperture radars[C]//IEE Proceedings F (Radar and Signal Processing). *IET Digital Library*, 1992, 139(2): 147-159.
- [3] Xu P L. Despeckling SAR-type multiplicative noise[J]. *International Journal of Remote Sensing*, 1999, 20(13): 2577-2596.
- [4] Xu P L, Shi Y, Peng J, et al. Adjustment of geodetic measurements with mixed multiplicative and additive random errors[J]. *Journal of Geodesy*, 2013, 87(7): 629-643.
- [5] Macdoran P F. Satellite emission radio interferometric Earth surveying series—GPS geodetic system[J]. *Bulletin Geodesique*, 1979, 53(2): 117-138.
- [6] Shi Y, Xu P L. Adjustment of measurements with multiplicative random errors and trends[J]. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 2020, 99: 1-5.
- [7] Wedderburn R W M. Quasi-likelihood functions, generalized linear models, and the Gauss—Newton method[J]. *Biometrika*, 1974, 61(3): 439-447.
- [8] Xu P L, Shimada S. Least squares parameter estimation in multiplicative noise models[J]. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 2000, 29(1): 83-96.
- [9] Shi Y. Least squares adjustment and accuracy estimation in multiplicative error models[J]. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 2014, 49(5): 799-803.
- [10] Wang Leyang, Chen Tao, Zou Chuanyi. Weighted least squares regularization iteration solution and precision estimation for ill-posed multiplicative error model[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2021, 50(5): 589.
- [11] Wang Leyang, Zou Chuanyi. Sterling interpolation method for parameter estimation and precision estimation in multiplicative error model[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2022, 47(02): 219-225.(王乐洋, 邹传义. 乘性误差模型参数估计及精度评定的 Sterling 插值方法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2022, 47(02): 219-225.)
- [12] Chen Yang. Gross error detection of stochastic model with multiplicative error[D]. *XiAn: Xi'An University of Science and Technology*, 2017.(陈杨. 乘性误差随机模型的粗差探测[D]. 西

安: 西安科技大学,2017.)

- [13] Shi Y. Parameter estimation method of additive and multiplicative mixed error model and its application[J]. *Geomatics and Information and Science of Wuhan University*, 2014, 39(09): 1033-1037.(师芸. 加乘性混合误差模型参数估计方法及其应用[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2014, 39(09): 1033-1037.)
- [14] Wang Leyang, Chen Tao. Virtual observation iteration solution and a-optimal design method for ill-posed mixed additive and multiplicative random error model in geodetic measurement[J]. *Journal of Surveying Engineering*, 2021, 147(4): 04021016.
- [15] Wang Leyang, Han Shuhao. A simple iterative solution for mixed additive and multiplicative random error model with inequality constraints[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*: 1-15 [2022-10-25]. DOI: 10.13203/j. hugin20210659. (王乐洋, 韩澍豪. 不等式约束下加乘性混合误差模型的简单迭代解法[J]. 武汉大学学报(信息科学版): 1-15[2022-10-25]. DOI: 10.13203/j.whugis20210659.)
- [16] Wang Xinzhou. Theories and applications of nonlinear model parameter estimation[M]. *Wuhan: Wuhan University Press*, 2002.(王新洲. 非线性模型参数估计理论与应用[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2002.)
- [17] Wright S, Nocedal J. Numerical optimization[J]. Springer Science, 1999, 35(67-68): 7.
- [18] Zhang Yandong, Xu Caijun, Wang Jianjun. An iterative least squares method based on the solution of F-J linear-nonlinear model[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2019, 44(12): 1816-1822.(张彦栋, 许才军, 汪建军. 一种基于 F-J 线性-非线性模型解的迭代最小二乘方法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2019, 44(12): 1816-1822.)
- [19] Zeng Xiaoniu, Liu Daizhi, Niu Chao, Qi Wei. A modified Gauss-Newton method for downward continuation of potential field[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2014, 43(01): 37-44.(曾小牛, 刘代志, 牛超, 齐玮.改进高斯-牛顿法的位场向下延拓[J]. 测绘学报, 2014, 43(01): 37-44.)
- [20] Qu Guoqing, Sun Zhen, Su Xiaoqing, et al. Adaptive relaxation regularization algorithm for nonlinear parameter estimation[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2019, 44(10): 1491-1497.(曲国庆, 孙振, 苏晓庆等. 非线性参数估计的自适应松弛正则

化算法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2019, 44(10): 1491-1497.)

- [21] Wan Yongge, Liu Ruifeng, Li Hongji. Inversion of 3D crustal structure and source location in the Jing-Jin-Tang- Zhang area by genetic algorithm[J]. *Acta Seismologica Sinica*, 1997(06): 66-76.(万永革, 刘瑞丰, 李鸿吉. 用遗传算法反演京津唐张地区的三维地壳结构和震源位置[J]. 地震学报, 1997(06): 66-76.)
- [22] Feng Wanpeng, Li Zhenhong. A novel hybrid PSO/simplex algorithm for determining earthquake source parameters InSAR data[J]. *Progress in Geophysics*, 2010, 25(04): 1189-1196.(冯万鹏, 李振洪. InSAR 资料约束下震源参数的 PSO 混合算法反演策略[J]. 地球物理学进展, 2010, 25(04): 1189-1196.)
- [23] Jin Xibo, Wang Leyang. A particle swarm optimization algorithm for magma source parameter inversion[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2020, 45(08): 64-69+95.(靳锡波, 王乐洋. 一种火山岩浆源参数反演的粒子群算法[J]. 测绘科学, 2020, 45(08): 64-69+95.)
- [24] Wang Leyang, Xu Ranran, Jin Xibo, Ding Rui. Comprehensive evaluation and comparison of nonlinear inversion algorithms[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2022, 47(03): 341-351.(王乐洋, 许冉冉, 靳锡波, 丁锐. 非线性反演算法的综合评价对比[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2022, 47(03): 341-351.)
- [25] Wang Leyang, Jin Xibo, Xu Guangyu. Particle swarm optimization of dynamic inertia factor for fault parameter inversion[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2021, 46(04): 510-519.(王乐洋, 靳锡波, 许光煜. 断层参数反演的动态惯性因子的粒子群算法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2021, 46(04): 510-519.)
- [26] Li Zhiqiang. Research on resampling method of nonlinear adjustment accuracy evaluation[D]. *Nanchang: East China University of Technology*, 2021.(李志强. 非线性平差精度评定的 Bootstrap 重采样方法研究[D]. 南昌: 东华理工大学, 2021.)
- [27] Surveying Adjustment Group of School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University. Error theory and foundation of surveying adjustment[M]. 3rd ed. *Wuhan: Wuhan University Press*, 2014. (武汉大学测绘学院测量平差学科组. 误差理论与测量平差基础[M]. 3 版. 武汉: 武汉大学出版社, 2014.)

网络首发:

标题: 非线性加性乘性混合误差模型的参数估计方法

作者: 王乐洋, 赵卫凤

Doi: 10.13203/j.whugis20230016.

收稿日期: 2023-11-13

引用格式:

王乐洋, 赵卫凤, 等. 非线性加性乘性混合误差模型的参数估计方法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2023, Doi:10.13203/j.whugis20230016. (Wang Leyang, Zhao Weifeng. Parameter estimation methods for nonlinear mixed additive and multiplicative random error model[J] *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2023, Doi:10.13203/j.whugis20230016.)

网络首发文章内容和格式与正式出版会有细微差别, 请以正式出版文件为准!

您感兴趣的其他相关论文:

乘性误差模型参数估计及精度评定的 Sterling 插值方法

王乐洋, 邹传义

武汉大学学报(信息科学版), 2022, 47(2): 219-225.

<http://ch.whu.edu.cn/cn/article/doi/10.13203/j.whugis20200052>

总体最小二乘回归预测模型的方差分量估计

王乐洋, 孙坚强

武汉大学学报(信息科学版), 2021, 46(2): 280-288.

<http://ch.whu.edu.cn/cn/article/doi/10.13203/j.whugis20180450>

PEIV 模型参数估计理论及其应用研究进展

王乐洋, 邹传义

武汉大学学报(信息科学版), 2021, 46(9): 1273-1283, 1297.

<http://ch.whu.edu.cn/cn/article/doi/10.13203/j.whugis20200312>