



武汉大学学报(信息科学版)

*Geomatics and Information Science of Wuhan University*

ISSN 1671-8860, CN 42-1676/TN

## 《武汉大学学报(信息科学版)》网络首发论文

题目: 高精度三维跟踪抛物运动的重力垂直梯度测量方法  
作者: 郭金运, 吴渴知, 金鑫, 周茂盛, 刘新  
DOI: 10.13203/j.whugis20220711  
收稿日期: 2023-02-10  
网络首发日期: 2023-03-26  
引用格式: 郭金运, 吴渴知, 金鑫, 周茂盛, 刘新. 高精度三维跟踪抛物运动的重力垂直梯度测量方法[J/OL]. 武汉大学学报(信息科学版).  
<https://doi.org/10.13203/j.whugis20220711>



**网络首发:** 在编辑部工作流程中, 稿件从录用到出版要经历录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿等阶段。录用定稿指内容已经确定, 且通过同行评议、主编终审同意刊用的稿件。排版定稿指录用定稿按照期刊特定版式(包括网络呈现版式)排版后的稿件, 可暂不确定出版年、卷、期和页码。整期汇编定稿指出版年、卷、期、页码均已确定的印刷或数字出版的整期汇编稿件。录用定稿网络首发稿件内容必须符合《出版管理条例》和《期刊出版管理规定》的有关规定; 学术研究成果具有创新性、科学性和先进性, 符合编辑部对刊文的录用要求, 不存在学术不端行为及其他侵权行为; 稿件内容应基本符合国家有关书刊编辑、出版的技术标准, 正确使用和统一规范语言文字、符号、数字、外文字母、法定计量单位及地图标注等。为确保录用定稿网络首发的严肃性, 录用定稿一经发布, 不得修改论文题目、作者、机构名称和学术内容, 只可基于编辑规范进行少量文字的修改。

**出版确认:** 纸质期刊编辑部通过与《中国学术期刊(光盘版)》电子杂志社有限公司签约, 在《中国学术期刊(网络版)》出版传播平台上创办与纸质期刊内容一致的网络版, 以单篇或整期出版形式, 在印刷出版之前刊发论文的录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿。因为《中国学术期刊(网络版)》是国家新闻出版广电总局批准的网络连续型出版物(ISSN 2096-4188, CN 11-6037/Z), 所以签约期刊的网络版上网络首发论文视为正式出版。

DOI:10.13203/j.whugis20220711

引用格式：

郭金运, 吴渴知, 金鑫, 等. 高精度三维跟踪抛物运动的重力垂直梯度测量方法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2023, DOI: 10.13203/j.whugis20220711 (Guo Jinyun, Wu Kezhi, Jin Xin, et al. A Method to Determine Vertical Gravity Gradient by High-precision 3D Tracking Parabolic Motion[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2023, DOI: 10.13203/j.whugis20220711)

## 高精度三维跟踪抛物运动的重力垂直梯度测量方法

郭金运<sup>1</sup>, 吴渴知<sup>1</sup>, 金鑫<sup>1\*</sup>, 周茂盛<sup>2</sup>, 刘新<sup>1</sup>

<sup>1</sup>山东科技大学, 测绘与空间信息学院, 青岛 266590

<sup>2</sup>齐鲁工业大学(山东省科学院)海洋仪器仪表研究所, 青岛 266100

### 摘要

目的：重力垂直梯度是探究地球重力场的关键信息，在大地测量学、地球物理学和地球动力学等领域中的应用越来越广泛，因此，快速、准确地获取高精度的重力垂直梯度信息愈发迫切。方法：本文提出了一种基于三维跟踪测量和抛物运动的重力垂直梯度测量方法，在真空环境中，利用三维跟踪技术动态追踪抛物运动下落的靶球，获得靶球运动的三维坐标时间序列，建立轨迹观测方程，并利用最小二乘法提取出重力垂直梯度信息。结果：对本文提出的测量方法设计了仿真实验并进行精度验证，实验结果表明，当落体测量精度达到微米级时，此测量方法的主要误差源是三维跟踪测量误差和时间测量误差，其中时间测量误差对重力垂直梯度测量精度的影响较小。对抛物运动坐标时间序列同时加入标准差为 $10\mu\text{m}$ 的三维跟踪测量随机误差和标准差为 $10\text{ns}$ 时间测量随机误差后统计重力垂直梯度的测量误差，测量误差的 RMS 约为  $1.31\text{E}$ 。结论：该方法在测量重力垂直梯度时是有效的并且具有较好的稳定性。

**关键词：**重力垂直梯度；抛物运动；三维跟踪技术

## A Method to Determine Vertical Gravity Gradient by High-precision 3D Tracking Parabolic Motion

第一作者：郭金运，博士，教授，博士生导师，主要从事空间大地测量、物理大地测量、海洋大地测量等方面的研究。E-mail: jinyunguo1@126.com

通讯作者：金鑫，博士，研究方向为垂线偏差测量方法及误差改正。E-mail: xinjin1010@outlook.com; jx10101010@126.com

项目资助：国家自然科学基金(42274006)

收稿日期：2023-02-10

Guo Jinyun<sup>1</sup>, Wu Kezhi<sup>1</sup>, Jin Xin<sup>1</sup>, Zhou Maosheng<sup>2</sup>, Liu Xin<sup>1</sup>

<sup>1</sup>College of Geodesy and Geomatics, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590, China

<sup>2</sup>Institute of Oceanographic Instrument, Qilu University of Technology (Shandong Academy of Sciences), Qingdao 266100, China

## Abstract

**Objectives:** The vertical gravity gradient plays an important role in the exploration of the Earth's gravity field. It is more and more widely used in the fields of geodesy, geophysics and geodynamics. Therefore, it is urgent to obtain the vertical gravity gradient with high accuracy quickly and accurately.

**Method:** A new method to determine vertical gravity gradients by 3D tracking parabolic motion is proposed. In a vacuum environment, firstly, the 3D tracking technology is used to dynamically track the parabolic falling target to obtain the 3D coordinate time series of the target movement, establish the trajectory observation equation, and extract the gravity vertical gradient using the least square method.

**Result:** When the measurement accuracy of falling target reaches micron level, the main error sources of this measurement method are 3D tracking measurement error and time measurement error, of which the time measurement error has a small impact on the measurement accuracy of vertical gravity gradient. After adding the 3D tracking measurement random error with the STD is 10 $\mu$ m and the time measurement random error with the STD is 10ns to the parabolic motion coordinate time series, the RMS of the measurement error of vertical gravity gradient is about 1.31E.

**Conclusion:** The proposed method of vertical gravity gradient measurement is effective and has good stability.

**Keyword:** vertical gravity gradient; parabolic motion; 3D tracking technology

重力垂直梯度是指重力沿其铅垂方向的导数,它表示的是地球重力场强度在垂直方向上的变化率,比重力具有更高的空间分辨率,是重力测量学和地球物理学中的重要地球物理量<sup>[1]</sup>。重力垂直梯度对近地表的密度变化以及地球内部的质量运动有较为敏锐的探测能力<sup>[2]</sup>,与重力相比,重力垂直梯度在探测埋藏较浅的密度异常体时反应更为敏锐,表现的更丰富全面<sup>[3]</sup>。因此研究重力垂直梯度及其时变特征,可以获取地球表层及其内部物质的空间分布、运动和变化<sup>[4]</sup>。在地球物理探测领域,为满足油气勘探的需要,重力垂直梯度测量开始得到重视和应用<sup>[5]</sup>,随着重力垂直梯度测量精度的提高,重力垂直梯度测量技术已成为资源探测和地质勘探的关键技术之一<sup>[6,7]</sup>。在物理大地测量学中,利用重力垂直梯度可以进行精化似大地水准面的研究<sup>[8,9]</sup>。在地球动力学中,重力垂直梯度数据已应用于断层活动、冰后回弹和震源研究<sup>[10]</sup>,使人们对这些动力学事件以及灾害预测有了进一步认识<sup>[11]</sup>。综上所述,重力垂直梯度测量数据可以为大地测量学、

地球物理学和地球动力学等研究领域提供丰富的信息,对地球科学和空间科学的发展有着重要的意义<sup>[5]</sup>。

地面上的传统重力垂直梯度测量方法主要有三种:利用高精度相对重力仪测定重力垂直梯度,利用绝对重力仪的重力观测数据确定重力垂直梯度以及利用重力梯度仪直接测得重力垂直梯度。

利用相对重力仪测量重力垂直梯度时,通常将两台高精度相对重力测量仪器置于位置高低不同处同时观测,然后交换两台仪器反复观测,获取两点间的重力差值以求得重力垂直梯度值。这种测量方法成本较高,操作复杂,测量效率较低,测量仪器不易便携,测量环境复杂时仪器稳定性较差,因此不利于广泛应用于重力垂直梯度测量领域。

与相对重力仪获取重力垂直梯度不同,绝对重力仪首先采集自由落体运动或上抛运动下落的距离-时间序列<sup>[12]</sup>,然后在时间序列中获取重力垂直梯度信息<sup>[13,14]</sup>。绝对重力仪观测时存在的误差源较为复杂<sup>[15,16,17]</sup>,观测数据中存在的有色噪声难以消除,测量方法适用性不强<sup>[12]</sup>。

除此之外,重力梯度仪也是测量重力垂直梯度的重要工具之一,经过一个多世纪的发展,重力梯度仪经历了扭力测量、旋转加速度计测量、超导测量、量子技术测量等。其中扭秤式重力梯度仪操作繁琐,需要测得不同方向上的独立偏转角后才能确定重力梯度分量,测量周期较长;旋转加速度计式重力梯度仪是通过测量两点间的加速度差获取重力梯度分量信息,作为目前实际生产应用较为广泛的重力梯度仪,其测量精度优于  $10E^{[18,19]}$ ,但其对加速度计的测量精度要求较高,而加速度计复杂的降噪过程限制了其发展;超导重力梯度仪作为一种相对测量仪器,通过磁力弹簧振子和位移检测两部分实现重力信号的测量<sup>[20]</sup>,设备结构复杂,体积大,不易搬运;量子重力梯度仪利用原子云落下时引力场拉力的细微变化探测微重力的变化,造价较高且易受磁场和热场的干扰<sup>[21]</sup>。因此,克服现有重力垂直梯度测量方法的缺点,高效获取高精度的重力垂直梯度信息仍然是当前面临的挑战<sup>[22]</sup>。

三维跟踪测量系统结合了激光干涉测距技术、光电探测技术、计算机及控制技术、现代数值计算理论等,能对空间运动目标进行跟踪并实时测量目标的空间三维坐标<sup>[23]</sup>。它采用极坐标测量原理,具有高精度、高效率、实时跟踪等特点,测量时可达亚微米级精度,数据输出速率高达  $2000Hz^{[24]}$ ,测量时不易受周围环境的影响且操作简单。三维跟踪测量技术目前已较广泛的应用于精密工程测量、机器人研发等领域<sup>[25,26,27]</sup>。

基于此,为方便测量不同地区重力垂直梯度信息,简化重力垂直梯度测量的复杂性,本文提出了一种三维跟踪抛物运动的重力垂直梯度测量方法。

## 1. 重力垂直梯度的测量原理与方法

本文中重力垂直梯度的测量原理示意图如图 1 所示,在真空环境中,利用三维跟踪技术与时间采集器来同步追踪抛物运动的靶球,获取靶球运动的三维坐标时间序列。

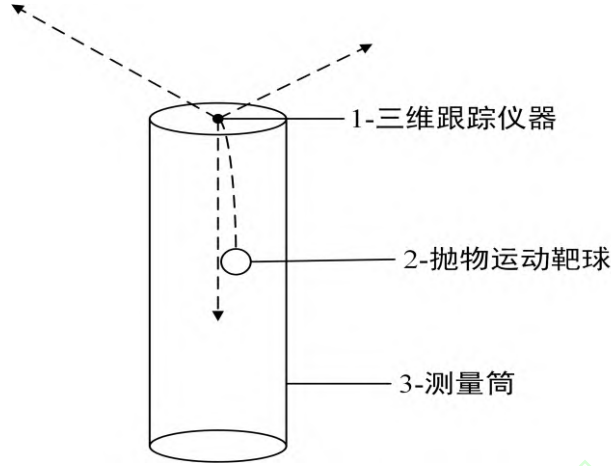


图 1 测量原理示意图

Figure 1 Sketch of Vertical Gravity Gradient Measurement.

基于上述测量系统，在真空环境中，获取抛物运动靶球的三维坐标时间序列后，采用 3 倍中误差法对测量序列进行粗差别除，利用附有限制条件的间接平差法从三维坐标时间序列中提取重力垂直梯度信息。

设起始时刻  $t_0$  处抛物运动的靶球坐标为  $X_0$ 、 $Y_0$ 、 $Z_0$ ，第  $i$  时刻  $t_i$  处抛物运动靶球的坐标为  $x_i$ 、 $y_i$ 、 $z_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ )；在  $X$  轴、 $Y$  轴、 $Z$  轴三个方向上，抛物运动靶球的初速度分别为  $v_x$ 、 $v_y$ 、 $v_z$ ；测点处重力加速度值大小为  $g$ ，重力垂直梯度值大小为  $K$ ；重力加速度  $g$  与  $X$  轴、 $Y$  轴、 $Z$  轴的夹角分别为  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ ，在真空环境中，落体仅受重力作用，可认为重力加速度的方向不发生改变， $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  为固定量； $t_0$  时刻至  $t_i$  时刻抛物运动靶球下落的距离为  $s$ ；则根据抛物运动的原理， $t_i$  时刻的观测方程为：

$$\begin{cases} x_i = x_0 + v_x(t_i - t_0) + 0.5(g + 0.5sK)(t_i - t_0)^2 \cos \alpha \\ y_i = y_0 + v_y(t_i - t_0) + 0.5(g + 0.5sK)(t_i - t_0)^2 \cos \beta \\ z_i = z_0 + v_z(t_i - t_0) + 0.5(g + 0.5sK)(t_i - t_0)^2 \cos \gamma \end{cases} \quad (1)$$

约束方程为：

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (2)$$

公式(1)中的  $x_i$ 、 $y_i$ 、 $z_i$  和  $t_i$  均为观测值，其余值均作为未知参数求解，误差方程可以用矩阵表达为：

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l} \quad (3)$$

限制条件方程用矩阵表达为：

$$\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{W}_x = 0 \quad (4)$$

式中， $\mathbf{V}$  表示改正数， $\mathbf{A}$  表示误差方程的系数， $\hat{\mathbf{x}}$  表示未知参数、 $\mathbf{l}$  表示误差方程的自由项、 $\mathbf{C}$  表示限制条件方程的系数、 $\mathbf{W}_x$  表示限制条件方程的自由项，对式(3)及式(4)中各项参数单独求导：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & (t_i - t_0) & 0 & 0 & -[v_x + (g + \frac{1}{2}sK)(t_i - t_0)\cos\alpha] & -\frac{1}{2}[(t_i - t_0)^2 \sin\alpha(g + \frac{1}{2}sK)] & 0 & 0 & \frac{1}{2}(t_i - t_0)^2 \cos\alpha & \frac{1}{4}(t_i - t_0)^2 \cos\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 & (t_i - t_0) & 0 & -[v_y + (g + \frac{1}{2}sK)(t_i - t_0)\cos\beta] & 0 & -\frac{1}{2}[(t_i - t_0)^2 \sin\beta(g + \frac{1}{2}sK)] & 0 & \frac{1}{2}(t_i - t_0)^2 \cos\beta & \frac{1}{4}(t_i - t_0)^2 \cos\beta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & (t_i - t_0) & -[v_z + (g + \frac{1}{2}sK)(t_i - t_0)\cos\gamma] & 0 & 0 & -\frac{1}{2}[(t_i - t_0)^2 \sin\gamma(g + \frac{1}{2}sK)] & \frac{1}{2}(t_i - t_0)^2 \cos\gamma & \frac{1}{4}(t_i - t_0)^2 \cos\gamma \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = [dx_0 \quad dy_0 \quad dz_0 \quad dv_x \quad dv_y \quad dv_z \quad dt_0 \quad d\alpha \quad d\beta \quad d\gamma \quad dg \quad dK]^T$$

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} x_i - [x_0^0 + v_x^0(t_i - t_0^0) + \frac{1}{2}(g^0 + \frac{1}{2}sK^0)(t_i - t_0^0)^2 \cos\alpha^0] \\ y_i - [y_0^0 + v_y^0(t_i - t_0^0) + \frac{1}{2}(g^0 + \frac{1}{2}sK^0)(t_i - t_0^0)^2 \cos\beta^0] \\ z_i - [z_0^0 + v_z^0(t_i - t_0^0) + \frac{1}{2}(g^0 + \frac{1}{2}sK^0)(t_i - t_0^0)^2 \cos\gamma^0] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -2\sin\alpha\cos\alpha \quad -2\sin\beta\cos\beta \quad -2\sin\gamma\cos\gamma \quad 0 \quad 0]$$

$$\mathbf{W}_x = 1 - \cos^2\alpha^0 - \cos^2\beta^0 - \cos^2\gamma^0$$

则法方程可以表示为：

$$\begin{cases} \mathbf{N}_{bb}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{C}^T\mathbf{K}_s - \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{l} = 0 \\ \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{W}_x = 0 \end{cases} \quad (5)$$

其中， $\mathbf{N}_{bb} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}$ ， $\mathbf{K}_s$ 、 $\mathbf{P}$  分别表示对应于限制条件方程的联系数向量和权阵，

$$\mathbf{K}_s = (\mathbf{C}\mathbf{N}_{bb}^{-1}\mathbf{C}^T)^{-1}(\mathbf{C}\mathbf{N}_{bb}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{l} - \mathbf{W}_x)$$
，此处  $\mathbf{P}$  设为单位阵。

对公式(5)加入阻尼因子  $\mu$ ：

$$\begin{cases} (\mathbf{N}_{bb} + \mu\mathbf{I})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{C}^T\mathbf{K}_s - \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{l} - \mu\hat{\mathbf{x}} = 0 \\ \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{W}_x = 0 \end{cases} \quad (6)$$

其中， $\mu$  为常数， $\mathbf{I}$  表示单位阵。加入阻尼因子后可以避免方程在解算过程中出现病态性的问题并能提高迭代算法中数值的稳定性，在保证成功率的前提下加速收敛过程。若不加入阻尼因子可能会出现病态方程，导致方程无解或使得迭代过

程发散。

考虑到方程中含有较多的未知参数并且未知参数的值不能直接获取，需先对未知参数设置初值，而在初值设置时可能存在误差，因此采用迭代的方法求解未知参数。将公式(6)整理为迭代方程：

$$\mathbf{x}^{k+1} = (\mathbf{N}_{bb} + \mu \mathbf{I})^{-1} \left( -\mathbf{C}^T \mathbf{N}_{cc}^{-1} (\mathbf{C} (\mathbf{N}_{bb} + \mu \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{W} + \mu \mathbf{I} \mathbf{x}^k) - \mathbf{W}_x) + \mathbf{W} + \mu \mathbf{x}^k \right) \quad (7)$$

其中， $\mathbf{W} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}$ ， $\mathbf{N}_{cc} = \mathbf{C} (\mathbf{N}_{bb} + \mu \mathbf{I})^{-1} \mathbf{C}^T$ 。

对公式(7)进行迭代求解， $\mathbf{x}^k$  为第  $k$  次的求解结果：

$$\hat{\mathbf{x}} = [\hat{x}_0 \quad \hat{y}_0 \quad \hat{z}_0 \quad \hat{v}_x \quad \hat{v}_y \quad \hat{v}_z \quad \hat{t}_0 \quad \hat{\alpha} \quad \hat{\beta} \quad \hat{\gamma} \quad \hat{g} \quad \hat{K}]^T \quad (8)$$

解出  $\hat{\mathbf{x}}$  后，代入公式(3)可求得  $\mathbf{V}$ ，最后即可求出：

$$\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{L} + \mathbf{V} \quad (9)$$

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{X}^0 + \hat{\mathbf{x}} \quad (10)$$

综上所述，获取重力垂直梯度信息的具体过程如下：

- (1) 利用激光跟踪仪获取抛物运动的三维坐标时间序列；
- (2) 对获取的三维坐标时间序列进行粗差别除；
- (3) 输入粗差别除后的三维坐标时间序列： $t_i$ 、 $x_i$ 、 $y_i$ 、 $z_i$ ；
- (4) 设定公式(1)中各参数的初值；
- (5) 建立误差方程和限制条件方程表达式，根据各参数初值及抛物运动的三维坐标时间序列确定公式(3)和公式(4)中的系数矩阵： $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{l}$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{W}_x$ ；
- (6) 建立法方程，确定公式(5)中的法方程系数  $\mathbf{N}_{bb}$ 、联系数向量  $\mathbf{K}_s$ 、权阵  $\mathbf{P}$  以及公式(6)中的阻尼系数  $\mu$ ；
- (7) 迭代求解，由公式(7)得到迭代方程后设置迭代过程的收敛条件： $|\hat{K}^k - \hat{K}^{k-1}| < \varepsilon$ ，当重力垂直梯度值第  $k$  次的迭代结果满足收敛条件时，输出解算结果，得到重力垂直梯度信息，不满足条件时重复过程(4)~(7)。

## 2. 仿真实验

### 2.1 理论精度分析

本文提出的重力垂直梯度测量方法中，主要误差源是三维跟踪测量误差和时间测量误差。三维跟踪技术和时间采集器动态追踪抛物运动的靶球时，三维跟踪测量误差和时间测量误差会在三维坐标时间序列中引入随机误差，影响重力垂直

梯度的测量精度。

为了验证本文中重力垂直梯度测量方法的有效性,在保证落体测量精度为微米级的前提下,根据实验原理进行仿真实验。在三维坐标时间序列中分别加入三维跟踪测量随机误差和时间测量随机误差,设三维跟踪测量的实时操作系统跟踪测量频率为 2000Hz,下落距离为 1m。

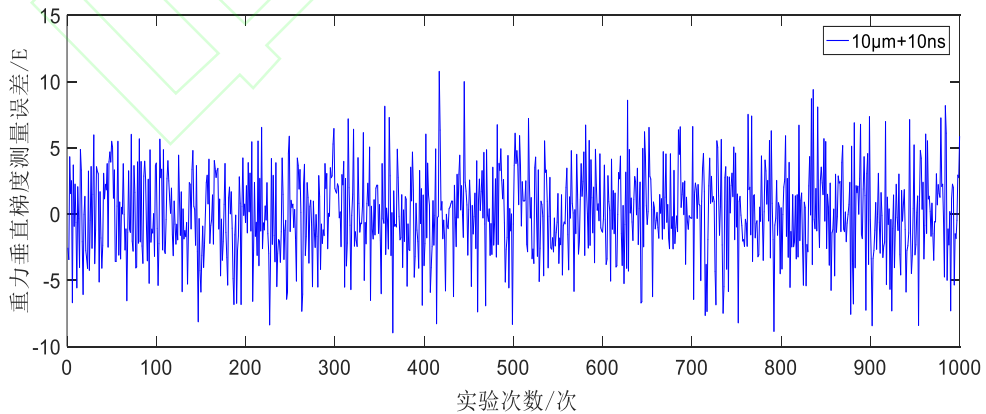
首先设定式(1)中各未知参数的初值,其中  $x_0 = 1\text{m}$ ,  $y_0 = 1\text{m}$ ,  $z_0 = 1\text{m}$ ,  $v_x = 0.012\text{m/s}$ ,  $v_y = 0.01\text{m/s}$ ,  $v_z = 0.01\text{m/s}$ ,  $t_0 = 0$ ,  $\alpha = 89.4^\circ$ ,  $\beta = 89.2^\circ$ ,  $\gamma = 1^\circ$ ,  $g = 9.79876\text{m/s}^2$ ,  $K = 3086\text{E}$ ; 根据式(1)和式(2)仿真出不含测量随机误差的抛物运动三维坐标时间序列;然后在不含有任何测量随机误差的三维坐标时间序列中引入三维跟踪测量随机误差和时间测量随机误差,生成含有测量随机误差的三维坐标时间序列;最终对序列进行迭代求解后得到重力垂直梯度信息,其中迭代过程的收敛条件中  $\varepsilon = 1 \times 10^{-4} \text{E}$ 。

根据上述仿真实验流程,考虑到三维跟踪测量系统的测量精度<sup>[28]</sup>,当落体测量精度达到微米级时,对抛物运动坐标时间序列同时加入均值为  $0\mu\text{m}$ ,标准差为  $10\mu\text{m}$  的三维跟踪测量随机误差和均值为  $0\text{ns}$ ,标准差为  $10\text{ns}$  的时间测量随机误差,30次测量结果取其平均值作为一次观测值,并重复实验 1000次,统计重力垂直梯度的解算结果与实验时重力垂直梯度初值  $3086\text{E}$  之间的差值,统计结果如表 1 所示,抛物运动测量重力垂直梯度的理论精度如图 2 所示。

**表 1 抛物运动测量重力垂直梯度误差统计(E)**

Table 1 Error Statistics of Vertical Gravity Gradient Measured by Parabolic Motion(E).

测量随机误差	MAX	MIN	MEAN	STD	RMS
$10\mu\text{m}+10\text{ns}$	10.77	-8.97	0.06	1.31	1.31



**图 2 抛物运动测量重力垂直梯度的理论精度**



Figure 2 Theoretical Accuracy of Measuring Vertical Gravity Gradient by Parabolic Motion.

如表 1 和图 2 所示，落体测量精度达到微米级时，基于三维跟踪抛物运动的重力垂直梯度测量方法稳定性较好，同时加入激光跟踪测量误差和时间测量误差后，重力垂直梯度的测量误差整体在-8.97~10.77E 之间，MEAN 为 0.06E，RMS 为 1.31E，整体在较小范围内波动。

## 2.2 三维跟踪测量误差分析

为了分析三维跟踪测量误差对重力垂直梯度测量的影响，假设时间测量误差为 0 且落体测量精度达到微米级，对无误差的三维坐标时间序列分别加入均值为  $0\mu\text{m}$ ，标准差为  $1\mu\text{m}$ 、 $5\mu\text{m}$ 、 $10\mu\text{m}$  的三维跟踪测量随机误差，将这些测量随机误差平均分配于三维坐标序列的  $x$ 、 $y$ 、 $z$  三个方向上，30 次测量结果取其平均值作为一次观测值，并重复实验 1000 次，生成含有三维跟踪测量随机误差的三维坐标时间序列后进行迭代求解，统计解算结果与实验时重力垂直梯度初值（3086E）之间的差值，统计结果如表 2 所示，三维跟踪测量误差对重力垂直梯度测量的影响如图 3 所示。

表 2 三维跟踪测量误差对抛物运动测量重力垂直梯度的影响统计(E)

Table2 Statistics of the Influence of 3D Tracking Measurement Error on Vertical Gravity Gradient by Parabolic Motion(E).

三维跟踪测量 随机误差	MAX	MIN	MEAN	STD	RMS
$1\mu\text{m}$	1.12	-0.95	0.01	0.33	0.35
$5\mu\text{m}$	7.09	-5.02	0.05	0.65	0.65
$10\mu\text{m}$	10.06	-12.30	-0.02	1.30	1.31

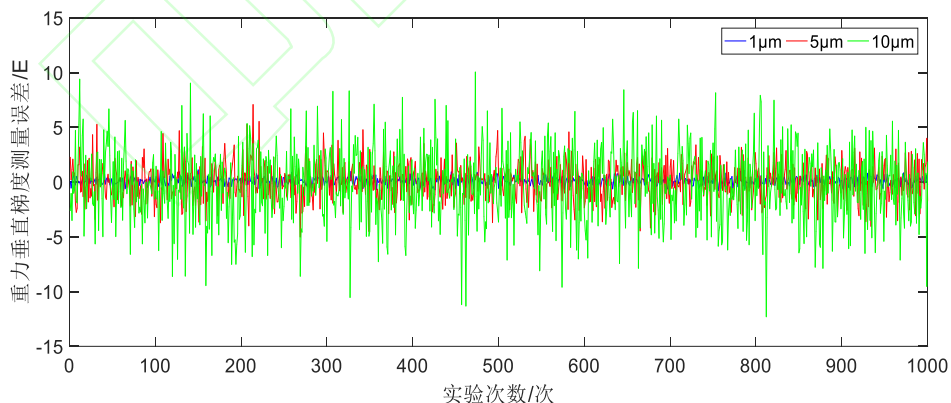


图 3 三维跟踪测量误差对抛物运动测量重力垂直梯度的影响

Figure 3 The Influence of 3D Tracking Measurement Error on Vertical Gravity Gradient by Parabolic Motion.

从表 2 和图 3 中可以看出，落体测量精度为微米级时，对三维坐标时间序列

中引入的三维跟踪测量误差越大，重力垂直梯度的测量精度越低，MEAN 均接近于 0，且三维跟踪随机测量误差增大时重力垂直梯度测量误差的 STD 逐渐增大，分别为 0.33E、0.65E、1.30E，测量方法的稳定性随之降低。加入  $1\mu\text{m}$  的激光跟踪测量误差时，重力垂直梯度的测量误差在  $-0.95\sim 1.12\text{E}$  之间；加入  $5\mu\text{m}$  的激光跟踪测量误差时，重力垂直梯度测量误差在  $-5.02\sim 7.09\text{E}$  之间；加入  $10\mu\text{m}$  的激光跟踪测量误差时，激光跟踪测量误差对测量重力垂直梯度的影响达到最大，测量误差在  $-12.30\sim 10.06\text{E}$  之间。

### 2.3 时间测量误差分析

分析时间测量误差对重力垂直梯度测量的影响时，假设其余各项误差均不影响重力垂直梯度的测量和解算且三维跟踪测量落体精度达到微米级，分别将均值为 0ns，标准差为 1ns、5ns、10ns 的时间测量随机误差加入无误差的三维坐标时间序列，30 次测量结果取其平均值作为一次观测值，并重复实验 1000 次，生成含有时间测量随机误差的三维坐标时间坐标序列后进行迭代求解，统计解算结果与实验时重力垂直梯度初值（3086E）的差值，统计结果如表 3 所示，时间测量随机误差对重力垂直梯度测量的影响如图 6 所示。

表 3 时间测量误差对抛物运动测量重力垂直梯度的影响统计(E)

Table 3 Statistics of the Influence of Time Measurement Error on Vertical Gravity Gradient by Parabolic Motion (E).

时间测量 随机误差	MAX	MIN	MEAN	STD	RMS
1ns	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
5ns	0.03	-0.03	0.00	0.01	0.01
10ns	0.06	-0.06	0.00	0.02	0.02

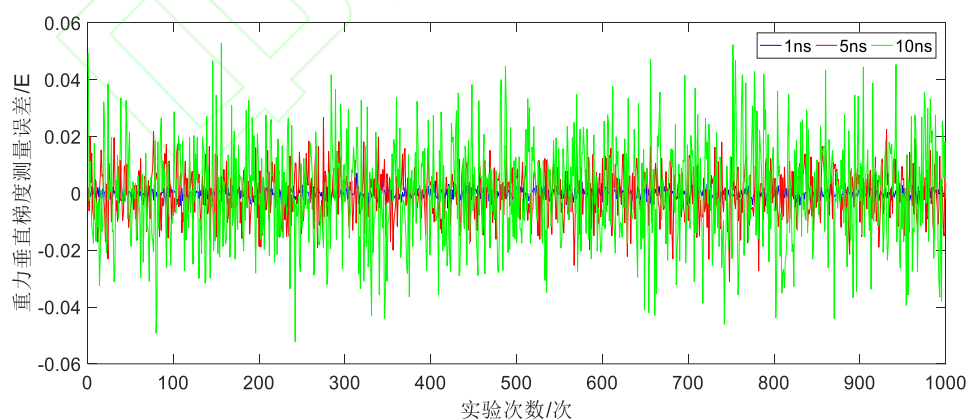


图 4 时间测量误差对抛物运动测量重力垂直梯度的影响

Figure 4 Influence of Time Measurement Error on Vertical Gravity Gradient by Parabolic Motion.

从表 3 和图 4 中可以看出,落体测量精度达到微米级时,加入的时间测量随机误差越大,对重力垂直梯度测量的影响越大,时间测量随机误差为 10ns 时,重力垂直梯度测量误差达到最大,在 $\pm 0.06E$ 之间,STD 和 RMS 均为 0.2E。总体来说,时间测量随机误差对重力垂直梯度测量的影响较小,加入时间测量随机误差后,重力垂直梯度测量误差整体控制在较小范围内,测量方法仍具有较好的稳定性。

### 3. 结论

本文提出了一种高精度三维跟踪抛物运动的重力垂直梯度测量方法,并通过仿真实验验证了该方法的有效性。这种新型测量方法使用三维激光测量技术动态追踪抛物运动,结合时间采集器获取抛物运动目标的三维坐标时间序列,然后通过最小二乘法迭代法解算出重力垂直梯度信息。

基于三维跟踪测量技术的重力垂直梯度测量方法主要有两个误差来源:三维跟踪测量误差和时间测量误差。采用控制变量的方法分别讨论了每个误差源对抛物运动测量重力垂直梯度的影响。实验结果表明,落体测量精度达到微米级时,三维跟踪测量误差是影响本文重力垂直梯度测量方法的主要误差,时间测量误差对重力垂直梯度测量的影响较小,且引入时间测量随机误差后测量该方法仍具有较好的稳定性,重力垂直梯度测量误差的 RMS 约为 1.31E。

### 参考文献

- [1] Bian S F, Zhang C J. Computation of Topographic Effects on Vertical Gravity Gradient[J]. *Computing Techniques for Geophysical and Geochemical Exploration*, 1992, 21(2):38-45.(边少锋, 张赤军. 地形起伏对重力垂直梯度影响的计算[J]. 物探化探计算技术, 1999, 21(2): 38-45.)
- [2] Zahorec P, Mikuška J, Papčo J, et al. Towards the Measurement of Zero Vertical Gradient of Gravity on the Earth's Surface[J]. *Studia Geophysica Geodaetica*, 2015, 59: 524-537.
- [3] Bornemisza S. Vertical Gradient of Gravity[J]. *Geophysics*, 2002, 23(2): 359-360.
- [4] Zhang Chijun, Bian shaofeng, Zhou Xuhua, Zhao L C, Luo Z C, Liu H, et al. Simultaneous Observation Method of Gravity Gradient[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2012, 37(4): 428-431.(赵珞成, 罗志才, 刘浩, 等. 重力梯度同步观测方法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2012, 37(4): 428-431.)
- [5] Zhang C J, Bian S F, Zhou X H, et al. Determination of gravity vertical gradient and its application potential[J]. *Progress in Geophysics*, 2007, 22(6): 1686-1691.(张赤军, 边少锋, 周旭华, 等. 重力垂直梯度的测定及其应用与潜力[J]. 地球物理学进展, 2007, 22(6): 1686-1691.)
- [6] Heiland C. A Rapid Method for Measuring the Profile Components of Horizontal and Vertical Gravity Gradients[J]. *Geophysics*, 1943, 8(2): 119-133.
- [7] Difrancesco D. Advances and Challenges in the Development and Deployment of Gravity Gradiometer Systems[C]. *EGM 2007 international workshop*, Capri,

2007.

- [8] [8] Dang Y M, Zhang C Y, Chao D B, et al. Precise Determination of National Height Datum Discrepancy from Combination of GNSS/Leveling and Gravity Data in Coastal Areas of China[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2017, 42(11): 1644-1648.(党亚民, 章传银, 晁定波, 等. 综合利用海岸带 GNSS 水准和重力数据精密确定中国高程基准偏差[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2017, 42(11): 1644-1648.)
- [9] Chen C J, Sun F H, Li D R. Refining Engineering Quasi-Geoid of Mutuo, Tibet[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2004(7): 638-641.(陈楚江, 孙凤华, 李德仁. 西藏墨脱地区工程精化似大地水准面的研究[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2004(7): 638-641.)
- [10] 王谦身. 微重力测量: 理论、方法与应用[M]. 科学出版社, 1995.
- [11] Fernández J, Tiampo K, Rundle J, et al. On the Interpretation of Vertical Gravity Gradients Produced by Magmatic Intrusions[J]. *Journal of Geodynamics*, 2005, 39(5): 475-492.
- [12] Wan J K, Luo Z C, Zhao L C. Determining vertical gradients of gravity by observations of the FG5 absolute gravimeter[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2018, 61(1): 119-126.(宛家宽, 罗志才, 赵珞成. 利用 FG5 绝对重力仪观测数据确定重力垂直梯度[J]. 地球物理学报, 2018, 61(1): 119-126.)
- [13] Hipkin R. Absolute Determination of the Vertical Gradient of Gravity[J]. *Metrologia*, 1999, 36(1): 47-52.
- [14] Pálinkáš V, Křen P, Vařko M, et al. On the Determination of Vertical Gravity Gradients by Corner-cube Absolute Gravimeters[J]. *Metrologia*, 2019, 56(5): 055006.
- [15] Tian G E, Chen X D, Wu S Q, et al. Correction of Measured Gravity Tides with FG5 Absolute Gravimeter Observations[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2020, 45(6): 870-878.(田桂娥, 陈晓东, 吴书清, 等. FG5 绝对重力仪观测数据的实测重力潮汐改正[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2020, 45(6): 870-878.)
- [16] [16] Zhang W M, Wang Y, Zhan J G, et al. Absolute Gravity Determination in the Crustal Movement Observation Network of China[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2004, 29(3): 227-230(张为民, 王勇, 詹金刚, 等. 中国地壳运动观测网络中的绝对重力测定[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2004, 29(3): 227-230.)
- [17] [17] Guo J Y, Jin X, Bian S F, et al. Corrections of solid earth tide and ocean tide for measurement of deflection of the vertical[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2022, 51(7): 1215-1224.(郭金运, 金鑫, 边少锋, 等. 垂线偏差测量的固体潮和海潮改正[J]. 测绘学报, 2022, 51(7): 1215-1224.)
- [18] Li H Y, Cao C, Li F T, et al. Development of Airborne and Marine Gravity Gradient Strategic Exploration for the Ocean and Unknown Land[J]. *Progress in Geophysics*, 2019, 34(1): 316-325.(李红雨, 曹诚, 李凤婷, 等. 航空、航海重力和重力梯度在海洋、未知陆地战略勘探的发展[J]. 地球物理学进展, 2019, 34(1): 316-325.)

- [19]Sun Z M, Zhai Z H, Li Y C. Status and Development of Airborne Gravimeter[J]. *Progress in Geophysics*, 2013, 28(1): 1-8. (孙中苗, 翟振和, 李迎春. 航空重力仪发展现状和趋势[J].地球物理学进展, 2013, 28(1): 1-8.)
- [20]Xu H Z, Sun He P. GGP Project and Observations Using Wuhan Superconducting Gravimeter[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2003, 28(S1): 18-22.(许厚泽, 孙和平. 国际 GGP 计划和武汉超导重力仪观测[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2003, 28(S1): 18-22.)
- [21]Boddice D, Metje N, Tuckwell G. Quantifying the Effects of Near Surface Density Variation on Quantum Technology Gravity and Gravity Gradient Instruments – ScienceDirect[J]. *Journal of Applied Geophysics*, 2019, 164:160-178.
- Boddice D, Metje N, Tuckwell G. Quantifying the Effects of Near Surface Density Variation on Quantum Technology Gravity and Gravity Gradient Instruments – ScienceDirect[J]. *Journal of Applied Geophysics*, 2019, 164:160-178.[22] Wang Q, Zhou R, Sun W. Precision Analysis of Gravity Vertical Gradient Measurement Based on CG-5 Relative Gravimeter[J]. *Advanced Materials Research*, 2011(301-303) :1036-1041.
- [23]Jin X, Liu X, Guo J Y, et al. A Novel All-weather Method to Determine Deflection of the Vertical by Combining 3D Laser Tracking Free-fall and Multi-GNSS Baselines[J]. *Remote Sensing*, 2022, 14(17): 4156.
- [24]Liu S, Liu G B, Liu S G, et al. Measurement Error Analysis and Accuracy Simulation of Laser Tracker[J]. *Engineering of Surveying and Mapping*, 2021, 30(6): 21-26.(刘硕, 刘光博, 刘尚国, 等. 激光跟踪仪的测量误差解析与精度仿真[J]. 测绘工程, 2021, 30(6): 21-26.)
- [25]Hu C, Luo S, Li W, et al. Application of Laser Tracker in the Industrial Measurement Field[J]. *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, 1820(1): 012119.
- [26]Sawyer D, Fronczek C. Laser Tracker Compensation Using Displacement Interferometry[J]. *American Society for Precision Engineering*, 2003, 30: 351-358.
- [27]Cvitanić T, Melkote S, Balakirsky S. Improved State Estimation of a Robot End-effector Using Laser Tracker and Inertial Sensor Fusion[J]. *CIRP Journal of Manufacturing Science and Technology*, 2022, 38: 51-61.
- [28]Xu Y M, Zheng Q, Guan X. Precision Analysis of Leica AT960 Absolute Laser Tracker[J]. *Journal of Geomatics*, 2020, 45(1): 8-12.(徐亚明, 郑琪, 管啸. Leica AT960 激光跟踪仪测量精度分析[J].测绘地理信息, 2020, 45(1):8-12.)

**网络首发:**

**标题:** 高精度三维跟踪抛物运动的重力垂直梯度测量方法

**作者:** 郭金运, 吴渴知, 金鑫, 周茂盛, 刘新

**DOI:** 10.13203/j.whugis20220711

**收稿日期:** 2023-02-10

**引用格式:**

郭金运, 吴渴知, 金鑫, 等. 高精度三维跟踪抛物运动的重力垂直梯度测量方法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2023, DOI: 10.13203/j.whugis20220711 (Guo Jinyun, Wu Kezhi, Jin Xin, et al. A Method to Determine Vertical Gravity Gradient by High-precision 3D Tracking Parabolic Motion[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2023, DOI: 10.13203/j.whugis20220711)

**网络首发文章内容和格式与正式出版会有细微差别, 请以正式出版文件为准!**

---

您感兴趣的其他相关论文:

激光跟踪仪的高精度预准直方法和精度分析

汪昭义, 何晓业, 王巍, 张海艇, 陈义华, 陈佳鑫

武汉大学学报·信息科学版, 2021, 46(4): 555-560

<http://ch.whu.edu.cn/cn/article/doi/10.13203/j.whugis20190143>

