



武汉大学学报(信息科学版)

*Geomatics and Information Science of Wuhan University*

ISSN 1671-8860,CN 42-1676/TN

## 《武汉大学学报(信息科学版)》网络首发论文

题目: 菱形三十面体格网系统构建的等积投影方法研究  
作者: 王蕊, 贲进, 梁晓宇, 梁启爽, 涂祖瑞  
DOI: 10.13203/j.whugis20220231  
收稿日期: 2023-03-10  
网络首发日期: 2023-04-14  
引用格式: 王蕊, 贲进, 梁晓宇, 梁启爽, 涂祖瑞. 菱形三十面体格网系统构建的等积投影方法研究[J/OL]. 武汉大学学报(信息科学版),  
<https://doi.org/10.13203/j.whugis20220231>



**网络首发:** 在编辑部工作流程中,稿件从录用到出版要经历录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿等阶段。录用定稿指内容已经确定,且通过同行评议、主编终审同意刊用的稿件。排版定稿指录用定稿按照期刊特定版式(包括网络呈现版式)排版后的稿件,可暂不确定出版年、卷、期和页码。整期汇编定稿指出版年、卷、期、页码均已确定的印刷或数字出版的整期汇编稿件。录用定稿网络首发稿件内容必须符合《出版管理条例》和《期刊出版管理规定》的有关规定;学术研究成果具有创新性、科学性和先进性,符合编辑部对刊文的录用要求,不存在学术不端行为及其他侵权行为;稿件内容应基本符合国家有关书刊编辑、出版的技术标准,正确使用和统一规范语言文字、符号、数字、外文字母、法定计量单位及地图标注等。为确保录用定稿网络首发的严肃性,录用定稿一经发布,不得修改论文题目、作者、机构名称和学术内容,只可基于编辑规范进行少量文字的修改。

**出版确认:** 纸质期刊编辑部通过与《中国学术期刊(光盘版)》电子杂志社有限公司签约,在《中国学术期刊(网络版)》出版传播平台上创办与纸质期刊内容一致的网络版,以单篇或整期出版形式,在印刷出版之前刊发论文的录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿。因为《中国学术期刊(网络版)》是国家新闻出版广电总局批准的网络连续型出版物(ISSN 2096-4188, CN 11-6037/Z),所以签约期刊的网络版上网络首发论文视为正式出版。

DOI:10.13203/j.whugis20220231

引用格式：

王蕊, 贲进, 梁晓宇, 等. 菱形三十面体格网系统构建的等积投影方法研究[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2023, DOI: 10.13203/j.whugis20220231 (WANG Rui, BEN Jin, LIANG Xiaoyu, et al. Research on the Equal-Area Projection for the Construction of the Rhombic Tricontahedron Grid Systems[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2023, DOI: 10.13203/j. whugis20220231)

## 菱形三十面体格网系统构建的等积投影方法研究

王蕊<sup>1</sup> 贲进<sup>1\*</sup> 梁晓宇<sup>1</sup> 梁启爽<sup>1</sup> 涂祖瑞<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 战略支援部队信息工程大学地理空间信息学院, 河南 郑州, 450001

**摘要：**全球离散格网系统 (discrete global grid systems, DGGS) 是一类新兴的数字地球参考框架, 在大尺度多源地理空间数据集的组织、集成与分析方面具有天然优势。现有全球离散格网系统构建方法中, 基于多面体投影方法生成的格网系统具有更加优异的几何性质, 因而被广泛研究。基础多面体及投影方法是格网系统设计选项中影响格网单元几何性质的主要因素。为构建更加均匀、高效的格网系统, 本文选择菱形三十面体作为基础多面体, 推导菱形三十面体与地球球体等积投影的正反算解析公式, 并将其应用于三种不同单元形状等积全球离散格网的生成。对比实验结果表明, 与二十面体 Snyder 等积投影相比, 本文提出方法的角度变形减小约 51%, 且克服了 Snyder 逆投影迭代求解导致格网生成效率较低的不足, 为全球离散格网系统的相关应用提供了优选解决方案。

**关键词：**菱形三十面体; 格网系统构建; 等积投影方法

## Research on the Equal-Area Projection for the Construction of the Rhombic Tricontahedron Grid Systems

WANG Rui<sup>1</sup> BEN Jin<sup>1\*</sup> LIANG Xiaoyu<sup>1</sup> LIANG Qishuang<sup>1</sup> TU Zurui<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Institute of Geospatial Information, PLA Strategic Support Information Engineering University, Zhengzhou 450001, China

**Abstract: Objectives:** Discrete global grid systems (DGGS) are new reference frameworks for the Digital Earth, and are suitable for organization, integration and analysis of multi-source big geospatial datasets. Among the existing construction methods of DGGS, using polyhedron projection to the sphere can generate DGGS with superior geometric properties and has been widely used at present. Basic polyhedrons and projection methods are main factors of DGGS design choices with respect to grid cell geometrics. Most existing DGGS schemes choose the platonic solids to approximate the Earth, where the icosahedron achieves the smallest distortion due to the most faces but still has difference with spherical surface. To break through the thinking of platonic solids and constructs more uniform and efficient grid systems, this paper chooses a new basic polyhedron, the rhombic tricontahedron, and researches its equal-area projection methods. **Methods:** The "Slice-and-Dice" approach provides the equal-area mapping between the spherical triangles and the planar triangles for the polyhedral projections, which has different implementations according to the partitioning strategies, and in this paper the vertex-oriented great circle projection is chosen to realize the equal-area mapping between the surface of the rhombic tricontahedron and the sphere because of more uniform angular distortion compared with the Snyder equal-area polyhedral projection. Each diamond face of the rhombic tricontahedron is divided into two triangles along the short diagonal as the basic planar triangles for projection. First, according to the equal surface area of the rhombic tricontahedron and the sphere, we calculate the edge and angle parameters of the rhombic tricontahedron and its corresponding spherical polyhedron. Then, the forward and inverse projection formulas are derived based on the equal-area conditions of the vertex-oriented great circle projection.

收稿日期：2023-03-10

项目资助：河南省重大科技专项国家超级计算郑州中心创新生态系统建设科技专项 (201400210100); 国家重点研发计划项目 (2018YFB0505301)。

第一作者：王蕊, 博士生, 主要从事全球离散格网方面的研究。wr\_paper@126.com

通讯作者：贲进, 博士, 教授。benj@lreis.ac.cn

All procedures are closed form without iterations like the inverse Snyder equal-area polyhedral projection. **Results:** Three experiments are realized and the results show that: (1) compared with the icosahedron using Snyder equal-area polyhedral projection, the angular distortion caused by the proposed method is reduced by 51%. The mean of angular distortion declines from 0.166 radians to 0.082 radians, and the standard deviation declines from 0.055 to 0.023; (2) the proposed scheme is used to generate three types of global grids with different cell shapes—triangles, quadrilaterals and the hexagons, which verifies the validity of the proposed scheme; (3) the efficiency of grid generation using the proposed inverse projection of the rhombic triacontahedron is about four times that of the icosahedron grids based on the inverse Snyder equal-area projection, which needs iterations. **Conclusions:** A new DGGS scheme is proposed by introducing the rhombic triacontahedron, which provides a new idea for the development and application of DGGS. The new scheme has more angular distortion, which helps generate more uniform grids and improve the accuracy of subsequent data processing and representation, and can be applied to different cell shapes. The next step is to research data modeling, spatial analysis algorithms and the combination of DGS and high-performance computing based on this scheme, so as to provide better solutions for the organization, processing and analysis of big data on the Earth.

**Keywords:** rhombic triacontahedron; construction of grid systems; equal-area projection method

随着传感器及探测技术的迅猛发展,地球空间信息的获取、处理和应用已步入“大数据”时代<sup>[1]</sup>。对地观测数据海量、广域、多源、异构、多尺度等特点使得“地球大数据”的表征、汇聚和处理愈加困难。“全球离散格网系统”(discrete global grid systems, DGGS)是对整个地球空间进行递归剖分形成的多分辨率离散地球参考模型<sup>[2]</sup>,有助于建立以空间位置为主键的数据关联新模式,有望成为支持地球大数据融合分析的优选方案<sup>[3,4]</sup>。

基于多面体投影是构建 DGGS 的有效方法。直接在球面进行规则格网剖分较为困难,采用特定方法递归剖分理想多面体表面,再映射至地球表面,即可得到较为规则的球面格网。多面体投影能在满足等积或等角性质的情况下,另一性质的变形较小,使构建格网的几何性质较为优异;此外,多面体格网与球面格网具有相同的拓扑关系,原本在球面的部分运算操作可转换至多面体表面,有效提高了计算效率。

DGGS 的构建主要涉及基础多面体、投影方法、多面体定位、剖分方案与编码 5 个设计选项<sup>[5]</sup>,其中基础多面体与投影方法是影响格网系统单元形变的主要因素。在基础多面体方面,由于柏拉图多面体规则的几何结构,现有绝大部分 DGGS 采用该类多面体来拟合地球<sup>[6-9]</sup>。White 等系统性地统计分析不同柏拉图多面体与投影方法对格网变形性质的影响,发现面数最多的正二十面体带来的畸变最小<sup>[10]</sup>。目前正二十面体已成为构建 DGGS 的主要方案<sup>[8,11-13]</sup>,但其仍然存在与球面差异过大、格网单元分布不均匀的问题。为突破柏拉图多面体的束

缚, Hall 等尝试采用卡特兰多面体中的 120 面体构建 DGGS<sup>[14]</sup>,相比正二十面体该方案的角度变形大大减小,但其单个面均为不规则三角形,仅适于构造三角形格网系统,且计算较复杂。

在投影方面,单元等积性被认为是较为理想的格网特性,它能有效提高数据表达精度并减少数据冗余<sup>[15]</sup>,适于统计分析计算。多面体等积投影相关研究较少,现有柏拉图多面体 DGGS 主要采用 Snyder 等积多面体投影<sup>[16]</sup>,该投影解决了相邻投影面公共边经纬线断裂的问题,然而在投影边界处的角度变形较大,且逆投影需迭代求解,有损精度并影响效率。Van Leeuwen 和 Strebe 提出了“Slice and Dice”多面体等积投影<sup>[17]</sup>,简称 Leeuwen 投影,相比 Snyder 投影角度变形更均匀,但仅用于柏拉图多面体,且未给出多面体到球面的逆投影公式。DGGS 格网生成、数据分析与可视化等方面需频繁使用逆投影,研究表明其运算效率已成为限制 DGGS 应用效率的瓶颈之一<sup>[18]</sup>,因此有必要研究更高效的多面体逆投影运算。

综上,选择合适的多面体并设计高效的投影方法可以构建更加规则、均匀,且性能优异的 DGGS。本文选择菱形三十面体(rhombic triacontahedron)作为基础多面体<sup>[19]</sup>,虽然面数少于 120 面体,但其结构在 DGGS 应用中存在以下优势:(1)面数多于正二十面体,与地球拟合程度更高,且相邻两个面沿公共边镜像对称符合多面体投影基本要求;(2)每个面为大小相同的菱形,适合各种规则单元的剖分。尽管八面体或正二十面体可利用两个三角面组成“菱形”作为剖分及编码的基本结构<sup>[7,8]</sup>,但其仅

是一种逻辑菱形结构，两个三角面不位于同一平面，增加了单元位置描述及格网相关运算的复杂度；(3) 菱形面上的一组邻边是天然的二维坐标系，易于描述单元位置。结合上述结构特点，依据 Leeuwen 投影原理，本文推导了菱形三十面体正逆投影的解析表达式，并通过对比实验验证了该方案在格网变形与计算效率上的优势。

## 1 基本原理

Leeuwen 投影是实现球面三角形到多面体三角面等积映射的一类方法<sup>[17]</sup>，其基本原理是：在某种分割策略下，球面三角形上任意无限小的单元均以相等的面积投影至平面上一无限小单元，该投影即满足等积性质。根据分割策略的不同，Leeuwen 等积投影有不同实现方法，本文采用的是指向多面体顶点的大圆弧等积投影，该投影的分割策略为：从顶点出发分割球面三角形的大圆弧投影到平面三角形为过对应顶点的一条直线，其中顶点指的是多面体及其球面多面体的顶点。图 1 (a) 和 (b) 分别为球面三角形  $T$  和多面体表面平面三角形  $T'$ ，顶点  $B'$  为多面体的顶点，顶点  $B$  为对应球面多面体的顶点。基于上述分割策略，根据 Leeuwen 投影原理，可推导出该投影的等积条件，推导过程见文献<sup>[17]</sup>，本文不再赘述。

如图 1(a) 所示， $P$  为球面三角形上任意一点， $l$  为穿过顶点  $B$  且经过点  $P$  的大圆弧， $l$  与球面三角形的边  $AC$  交于点  $D$  并将  $T$  分为区域  $U$  与  $T-U$ ，点  $P$  将大圆弧  $BD$  分割为两部分，令弧长  $\widehat{BP} = x$ ， $\widehat{PD} = y$ ；如图 1 (b) 所示， $T'$  为多面体表面上的投影三角面， $P'$  为  $P$  在  $T'$  上投影点， $l'$  为过平面三角形顶点  $B'$  与  $P'$  的一条直线， $l'$  与边  $A'C'$  交于点  $D'$  并将  $T'$  分割为区域  $U'$  与  $T'-U'$ ，线段  $C'D' = u'$ ， $A'D' = v'$ ，点  $P'$  将直线  $B'D'$  分割为线段  $B'P'$  和  $P'D'$ ，定义为线段长度  $B'P' = x'$ ， $P'D' = y'$ 。指向多面体顶点的大圆弧等积投影条件如下：

(1) 球面三角形  $T$  的面积  $A_T$  与平面三角形  $T'$  的面积  $A_{T'}$  相等，即

$$A_T = A_{T'} \quad (1)$$

(2) 球面三角形上区域  $U$  与  $T$  的面积比等于平面三角形上区域  $U'$  与  $T'$  的面积比，即

$$\frac{A_U}{A_T} = \frac{A_{U'}}{A_{T'}} \quad (2)$$

(3) 在大圆弧  $l$  与其投影直线  $l'$  上，点  $P$  投影点  $P'$  的位置满足

$$\left( \frac{x'}{x'+y'} \right)^2 = \frac{1 - \cos x}{1 - \cos(x+y)} \quad (3)$$

上述 3 个条件中，条件 (1) 和 (2) 适用于所有基于 Leeuwen 投影原理的等积投影，条件 (3) 是根据具体的分割策略推导等积微分条件而得。

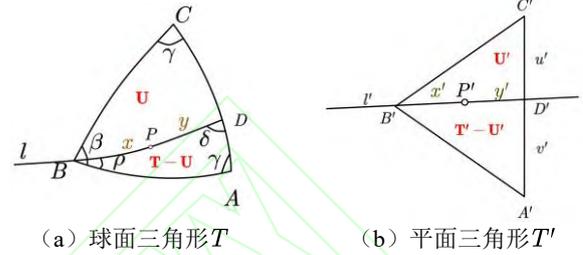


图 1 面向顶点的大圆弧投影示意图

Fig.1 Diagram of the Vertex-oriented Great Circle Projection

## 2 菱形三十面体等积投影

菱形三十面体由三十个全等菱形组成(图 2 左)，共有 32 个顶点、60 条边，每个面均为黄金菱形，即两条对角线的长度比为黄金比例。Leeuwen 投影实现了球面三角形到平面三角形的等积映射，为将该方法推广至菱形三十面体，本文将三十面体的各个菱形面沿短对角线分为两个相等的等腰三角形作为菱形三十面体的基本投影面。考虑到菱形三十面体的对称特性，下文仅针对一个等腰三角形面进行投影算法的推导。

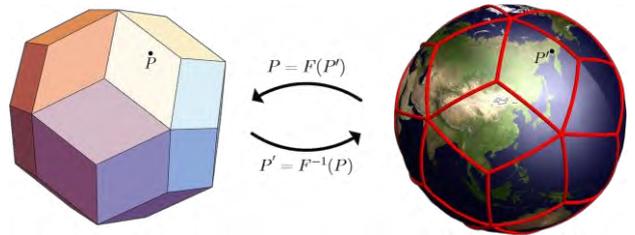


图 2 菱形三十面体正逆投影示意图

Fig.2 Diagram of the Forward and Inverse Projections between the Rhombic Triacanthedron and the Sphere

### 2.1 投影基本参数

多面体投影需先确定球面三角形与平面三角形的顶点坐标、边长等作为投影运算的基本参数。为计算菱形三十面体基本投影面，即等腰三角形的有关参数，将等积条件 (1) 推广到整个多面体，等效于菱形三十面体表面积需等于球面面积，由此

可计算与单位球等表面积的菱形三十面体菱形面棱长 $r$ 、长对角线 $p$ 、短对角线 $q$ 为:

$$\begin{cases} r = \sqrt{\pi/3\sqrt{5}} \approx 0.68433981476 \\ p = \frac{2r}{\sqrt{1 + ((\sqrt{5} + 1)/2)^{-2}}} \approx 1.164268433 \\ q = \frac{2r}{\sqrt{1 + ((\sqrt{5} + 1)/2)^2}} \approx 0.7195574638 \end{cases} \quad (4)$$

为方便平面坐标运算,在图1(b)所示平面三角形 $T'$ 上构建二维平面直角坐标系:以 $A'C'$ 为 $x$ 轴, $A'C'$ 中点为原点, $B'$ 位于 $y$ 轴正方向上,易得三个顶点坐标分别为 $A'(-q/2, 0)$ ,  $C'(q/2, 0)$ ,  $B'(0, p/2)$ 。

为计算球面菱形三十面体(图2右)上顶点坐标、边的弧长与内角等参数,需先定义菱形三十面体与地球球体的位置关系。球面菱形三十面体共32个顶点,以数字0~31对其索引,在展开面上的具体标识如图3所示。

本文采取一种简单、易理解的定位方法:将0

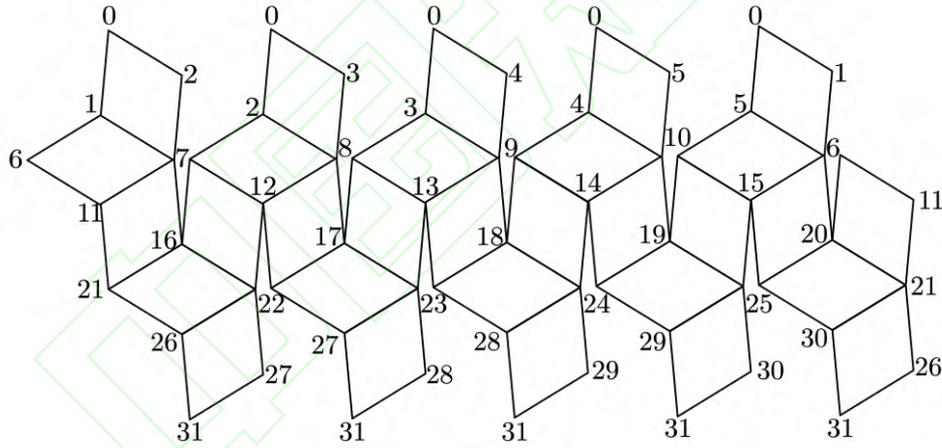


图3 菱形三十面体顶点索引

Fig.3 Vertex Indices of the Rhombic Triacanthedron

## 2.2 正投影公式

给定球面三角形上一点地理坐标,解算其在平面三角形上投影坐标的过程为正投影或投影正算。根据等积投影条件,推导菱形三十面体等积投影正算的解析表达式。

**步骤一:** 根据等积条件(2)确定投影点 $P'$ 所在投影直线 $l'$ 在平面三角形 $T'$ 上位置。

依据单位球上球面三角形的面积公式可得 $A_T = \beta + 2\gamma - \pi = \pi/15$ ; 设大圆弧 $l$ 与 $AB$ 、 $AC$ 的夹角分别为 $\rho$ 和 $\delta$ , 则可得球面三角形 $ABD$ 对应区

号顶点放置在北极,31号顶点放置于南极,1号顶点经度为 $36^\circ\text{E}$ ,可计算得菱形三十面体32个顶点的地理坐标:1~5、6~10、11~15 顶点纬度分别为 $52.622631859^\circ\text{N}$ 、 $26.565051177^\circ\text{N}$ 、 $10.812316964^\circ\text{N}$ ,同纬度相邻顶点经度间隔72度,根据对称性,可得其他顶点地理坐标。该定位方法使得投影后经度为东经(或西经) $0^\circ$ 、 $36^\circ$ 、 $72^\circ$ 、 $108^\circ$ 、 $154^\circ$ 、 $180^\circ$ 的10条经线均与菱形面的对角线或棱长重合,且关于赤道对称。在格网构建时,能使离散化的球面格网单元与地理特性建立关联,利于地球科学相关研究。在实际情况中也可根据应用需求,选择其他定位参数,并计算相应的顶点地理坐标。

基于顶点坐标,利用球面几何可计算得球面三角形 $T$ 的相关参数: $\angle A = \angle C = \gamma = \pi/3$ ,  $\angle B = \beta = 2\pi/5$ ,  $\widehat{BA} = \widehat{BC} = 0.652358139$ ,  $\widehat{AC} = 0.729727656$ 。

域 $U$ 的面积为 $A_U = \frac{\pi}{15} - \left(\rho + \delta + \frac{\pi}{3} - \pi\right) = \frac{11\pi}{15}$

$- \rho - \delta$ 。因此,可以推导在菱形三十面体等积投影

中投影条件(2)  $\frac{A_U}{A_T}$ 的具体表达式

$$\frac{A_U}{A_T} = \frac{\frac{11\pi}{15} - \rho - \delta}{\frac{\pi}{15}} = \frac{u'}{u' + v'} \quad (5)$$

式(5)中,由于点 $P$ 的经纬度已知,利用叉乘公式可解算 $\rho$ ;然后在球面三角形 $ABD$ 内根据球面余弦公式计算 $\delta$ :

$$\cos \delta = -\cos \rho \cos \gamma + \sin \rho \sin \gamma \cos \widehat{AB} \quad (6)$$

将  $\rho$  与  $\delta$  代入式(5)可得  $\frac{u'}{u'+v'}$ ，易计算直线  $l'$  与  $A'C'$  的交点  $D'$  坐标  $(x_{D'}, y_{D'})$ ：

$$\begin{cases} x_{D'} = \frac{q}{2} - q \frac{u'}{u'+v'} \\ y_{D'} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

**步骤二：**根据等积条件(3)确定投影直线  $l'$  上投影点  $P'$  的位置。

已知点  $B$ 、 $P$  地理坐标，计算两点间弧长  $x$ ；在球面三角形  $ABD$  内，借助余弦公式计算  $\cos(x+y)$ ：

$$\cos(x+y) = \frac{1/2 + \cos \rho \cos \delta}{\sin \rho \sin \delta} \quad (8)$$

然后根据式(3)等积条件，可得  $\frac{x'}{x'+y'}$ 。最后，计算投影点  $P'$  坐标  $(x_{P'}, y_{P'})$ ，公式如下

$$\begin{cases} x_{P'} = x_{D'} \times \frac{x'}{x'+y'} \\ y_{P'} = \frac{p}{2} \times \left(1 - \frac{x'}{x'+y'}\right) \end{cases} \quad (9)$$

### 2.3 逆投影公式

给定平面三角形上一点的平面坐标，解算其在球面三角形上投影点地理坐标的过程为逆投影或投影反算。同样根据等积投影条件，推导菱形三十面体等积投影反算的解析表达式。

**步骤一：**求解球面上过投影点的大圆弧与球面三角形交点  $D$  的坐标。

对于逆投影，点  $P'$  的平面坐标已知，易计算等积投影条件式(2)的比例系数  $\frac{u'}{u'+v'}$ ，然后根据式(5)计算  $\rho + \delta$ 。

为解算  $\rho$  与  $\delta$ ，根据球面三角形  $ABD$  内余弦公式  $\cos \delta = -\cos \rho \cos \gamma + \sin \rho \sin \gamma \cos \widehat{AB}$ ，令  $\tau = \rho + \delta$ ，上式左侧用  $\tau - \rho$  替换  $\delta$ ，展开得

$$\begin{aligned} \cos \tau \cos \rho + \sin \tau \sin \rho \\ = -\cos \rho \cos \gamma + \sin \rho \sin \gamma \cos \widehat{AB} \end{aligned} \quad (10)$$

两边除  $\cos \rho$  得

$$\tan \rho = \frac{\cos \tau + \cos \gamma}{\sin \gamma \cos \widehat{AB} - \sin \tau} \quad (11)$$

即可解算出球面三角形  $ABD$  内角  $\rho$  与  $\delta$ ，再根据余弦公式可求出  $\sin(\widehat{AD})$ 。

由于  $\sin(\widehat{AC})$  已知，根据四元数的球面线性插值公式 (spherical linear interpolation, SLERP)，点  $D$  的坐标计算公式如下：

$$q_D = \frac{q_C \sin(\widehat{AD}) + q_A \sin(\widehat{AC} - \widehat{AD})}{\sin(\widehat{AC})} \quad (12)$$

其中， $q_D$ 、 $q_C$ 、 $q_A$  为球面三角形对应点的四元数坐标。由于投影坐标求解无需旋转参数，因此只用点  $A$ 、 $C$  的三维坐标即可计算出点  $D$  的三维坐标。

**步骤二：**求解大圆弧  $BD$  上投影点  $P$  的坐标。再次利用 SLERP 插值方法，大圆弧  $BD$  上有

$$q_P = \frac{q_B \sin y + q_D \sin(x)}{\sin(x+y)} \quad (13)$$

如图 1 所示， $\widehat{BD} = x + y$ ， $\widehat{BP} = x$ ， $\widehat{PD} = y$ 。为求解点  $P$  坐标，需计算上述弧长。根据投影基本参数，易得点  $B$ 、 $D$  三维坐标，然后计算  $x + y$ ；对于  $x$ ，已知平面三角形内点坐标，计算  $x'$  与  $y'$ ，然后根据式(3)，即可解算  $x$ 。

将  $x + y$ 、 $x$  与  $y$  代入式(13)计算  $q_P$ ，即为投影点  $P$  坐标。可发现，上述运算过程均为解析表达式，无需 Snyder 逆投影的迭代过程。

## 3 实验与分析

为了验证本文所提方案的优势，设计以下实验：

(1) 投影角度变形对比实验，比较 Leeuwen 投影与 Snyder 投影应用于菱形三十面体与正二十面体的角度畸变；(2) 格网生成实验，分别生成三角形、四边形和六边形三类规则单元格网系统；(3) 格网生成效率对比实验，比较本文推导的逆投影与 Snyder 等积多面体逆投影对格网生成效率的影响。

### 3.1 等积投影角度变形对比实验

由于地图投影无法同时满足等积和等角性质，因此等积投影必然存在角度变形。为证明本文方案的优势，比较其与目前使用广泛且面数最多的正二十面体 Snyder 等积投影的角度变形。实验采用角度变形程度的通用衡量指标—Tissot 椭圆<sup>[20]</sup>，来计算角度变形值，其原理为：球面上任意无限小的圆投影至多面体表面为一椭圆。定义投影椭圆的长轴和短轴分别为  $a$  和  $b$ ，角度变形值  $d$  由如下公式解算：

$$d = 2 \times \arcsin \frac{a-b}{a+b} \quad (14)$$

具体实验方法为：在球面三角形上，选择均匀分布的若干小圆（图 4），每个小圆上等间隔取若干离散点，投影至平面三角形，计算小圆上投影点与小圆中心投影点的距离，取距离中的最大值与最小值分别作为此小圆投影椭圆的长轴和短轴，然后利用式(14)解算小圆的角度变形  $d$ ，最后统计所有小圆角度变形均值与标准差。

经过实验统计，各投影角度变形的均值与标准差如表 1 所示。为更直观展示角度变形程度，将角度变形值可视化，按照  $1^\circ$  间隔，将  $0^\circ$  到  $20^\circ$  的角度变形值渐变映射为白色至品红色，其中  $20^\circ$  是由实

测角度变形最大弧度值—正二十面体 Snyder 投影的 0.31 确定。可视化结果如图 5 所示，颜色越浅代表角度变形的程度越小，颜色越深代表角度变形的程度越大。

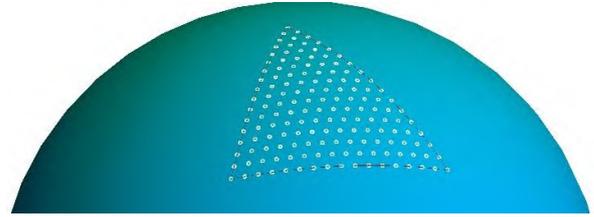


图 4 Tissot 椭圆球面小圆采样示意图

Fig.4 Illustration of Sampled Small Circles of Tissot Ellipse on the Sphere

表 1 等积投影角度变形均值与标准差

Tab.1 Average and Standard Deviation of the Angular Distortion for Different Equal-area Projections

投影类型	均值（弧度）	标准差
正二十面体 Snyder	0.166	0.055
菱形三十面体 Leeuwen	0.082	0.023

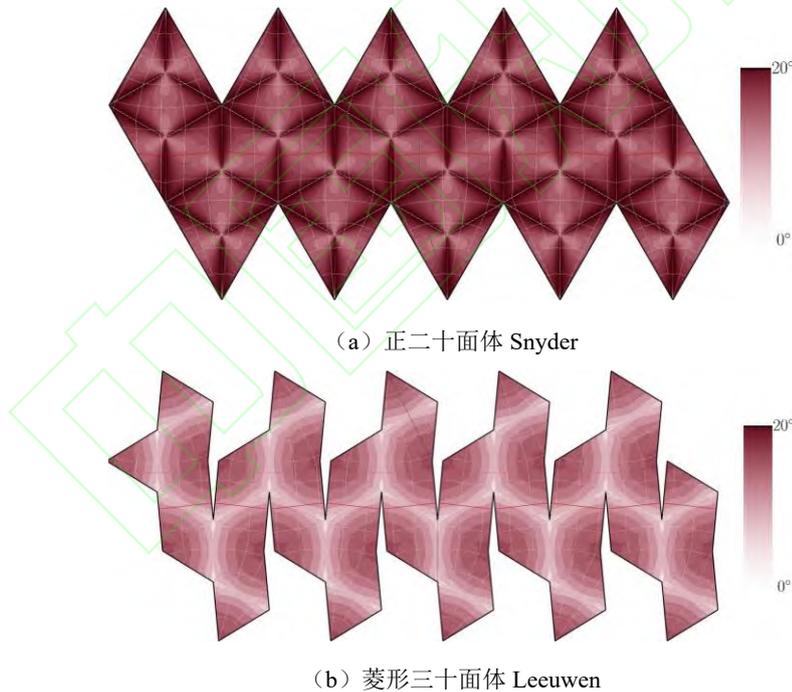


图 5 等积投影角度变形可视化结果

Fig.5 Visualization of the Angular Distortion for Different Equal-area Projections

分析实验结果，可发现：

(1) 菱形三十面 Leeuwen 投影的整体角度变形与二十面体 Snyder 投影相比明显减小，且分布更加均匀；相比二十面体 Snyder 投影，菱形三十面体 Leeuwen 投影的平均角度变形减小约 51%，标准差减小约 58%，原因主要在于相比正二十面体，菱形

三十面体的面数更多，与球体的近似程度更高，因此变形更小；

(2) 由于投影策略不同，两种投影的变形分布也不同；Snyder 投影是以三角面中心作为投影点，角度变形从三角面中心向外辐射，可以直观地看出，三角面内部 3 条投影边界处的变形非常大，角度变

形接近 20 度；菱形三十面 Leeuwen 投影以菱形面的顶点为投影中心，每个面上角度变形从投影中心向外呈辐射状散发，离投影中心越远变形越小，面中心处几乎无角度变形。

该实验结果证明了本文设计方案在基础多面体与投影方法上的优势。

### 3.2 菱形三十面体格网生成实验

菱形三十面体的 30 个面为全等的菱形，其优势在于菱形面适合多种规则图形的剖分，包括三角形、菱形和六边形。基于本文菱形三十面体等积投影方法构建全球等积格网的基本流程如图 6 所示。

确定多面体及与地球定位关系后，格网系统构建的下一步是确定单元类型及初始剖分单元。根据菱形三十面体结构，本文定义如下三类格网系统的初始单元，即第 0 层单元：30 个菱形面为菱形格网系统第 0 层单元；每个菱形面沿对角线分为两个三角形，共 60 个三角面作为三角形格网系统第 0 层单元；由 60 个三角面组成的 12 个五边形作为六边形格网系统的第 0 层单元，五边形分别以图 3 中索引为 0、6~10、21~25 与 31 的 12 个顶点为中心。

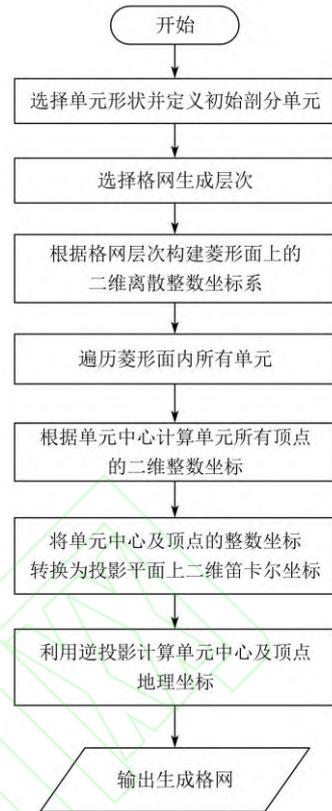


图 6 菱形三十面体等积全球离散格网系统构建流程图

Fig.6 The flow chart of constructing the rhombic triacontahedron equal-area grid systems

较特别的是六边形格网，以格网剖分孔径 4 为例，即上下两层单元面积之比为 4，六边形格网第 1 层单元分布如图 7 所示，共 30 个六边形和 12 个五边形。需要注意的是，六边形格网系统每层都是由六边形和 12 个五边形组成，五边形的面积为六边形的 5/6。图 8 (a)、(b)、(c) 分别展示了算法生成的菱形三十面体三角形、菱形、六边形球面等积格网的第三层，该结果验证了本文提出的等积投影算法，能够很好地适用于三类规则单元格网系统构建。

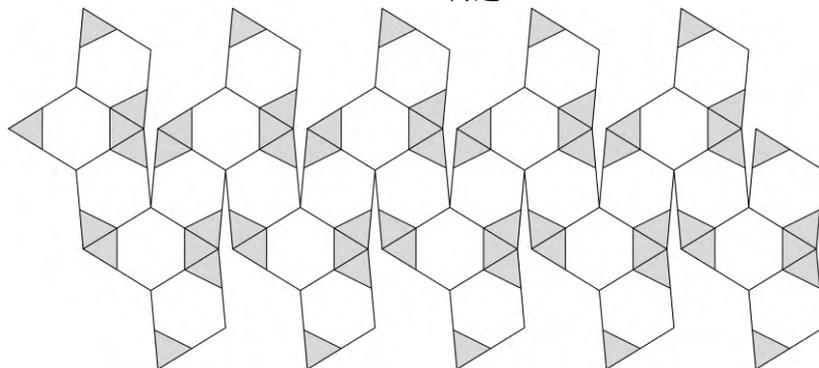


图 7 孔径为 4 菱形三十面体六边形格网系统第 1 层单元

Fig.7 The first level of the aperture 4 hexagonal grid system based on the rhombic triacontahedron

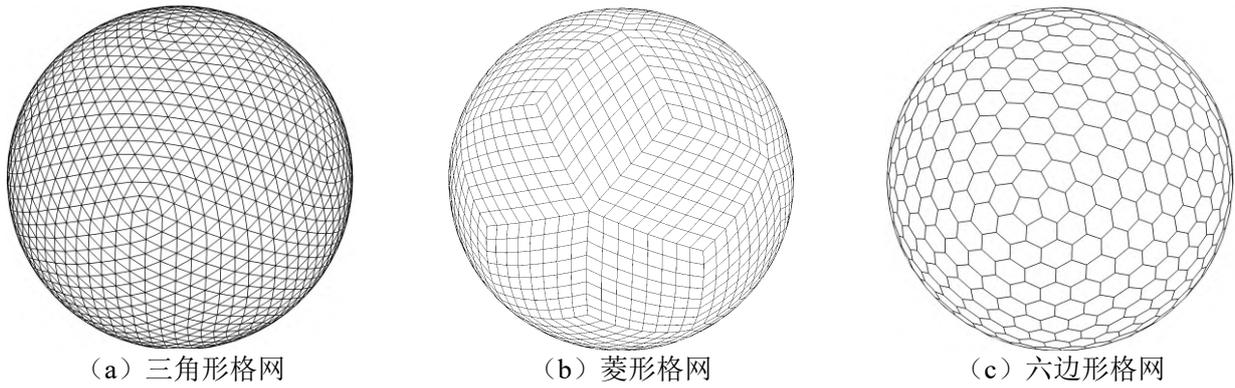


图8 三类规则单元的菱形三十面体等积格网第三层示例

Fig.8 Examples of three different types of equal-area grids based on the rhombic triacontahedron at level 3

### 3.3 格网生成效率对比实验

在格网生成过程中，逆投影运算需频繁使用三角函数运算，是制约格网生成效率的主要因素。为进一步验证本文提出逆投影算法的效率优势，作者采用 Visual C++ 2012 开发工具分别实现了基于二十面体 Snyder 逆投影与本文提出菱形三十面体等积逆投影的格网生成算法。

为获取均匀分布的待投影单元集合，分别构建二十面体和菱形三十面体三角形格网，相邻两层单元的面积比均为 4，计算三角形单元的顶点坐标作为待投影点，并投影至球面计算地理坐标。全部程序编译为 Release 版本，并在一台兼容机（配置：Windows 7×64 旗舰版+SP1；硬件配置：Intel Core i5-6500 CPU@3.20GHZ, 8G RAM, KingSton 120GB SSD）上进行测试。统计各算法在格网 7~10 层的

运算时间，运算效率为单位时间内生成的三角形单元个数，每层测试 10 次取平均值，结果见表 2。

分析以上实验结果：

(1) 本文算法生成菱形三十面体等积格网的效率约为基于二十面体 Snyder 等积投影生成格网效率的 4 倍。根据图 6，除逆投影算法外，两者生成过程中的其他运算基本一致，均为整数或简单的浮点数运算，可见本文逆投影算法对格网生成效率的提升。主要原因在于本文算法求解过程均为解析表达，而 Snyder 逆投影涉及迭代运算，且需良好的初值，大大影响了运算效率；

(2) 影响格网生成效率的主要因素是逆投影算法的三角函数运算，由于两种算法均涉及难以避免的球面三角形参数解算，因此效率提升存在瓶颈。

表 2 格网生成实验效率统计结果

Tab.2 Efficiency of the global grid generation for icosahedron snyder grids and the proposed grids

层次	本文方案			二十面体 Snyder			效率比
	单元数量	运行时间 (毫秒)	效率 (个/毫秒)	单元数量	运行时间 (毫秒)	效率 (个/毫秒)	
7	983,040	760	1293.47	327,680	997	328.67	3.94
8	3,932,160	3003	1309.41	1,310,720	4021	325.97	4.02
9	15,728,640	12047	1305.61	5,242,880	15901	329.72	3.96
10	62,914,560	47840	1315.10	20,971,520	62718	334.38	3.93

## 4 总结展望

本文引入菱形三十面体提出了一种新型等积全球离散格网系统构建方法。根据等积投影条件，推导了菱形三十面体正逆等积投影的解析表达式，并利用逆投影算法构建了三类不同形状的等积全球格网。与现有方案相比，该方案构建的 DGGS 单

元角度变形更小，有利于提高后续数据处理与表达的精度，且解决了现有多面体等积逆投影迭代导致格网构建效率低的问题。本文方案摆脱了当前利用柏拉图多面体构建 DGGS 的思维定势，为全球离散格网系统的发展及相关应用提供了新的思路。下一步需基于该方案继续研究数据建模、空间分析算法及 DGGS 与高性能计算的结合，为地球大数据的组

织、处理与分析提供更优的解决方案。

### 参考文献

- [1] Guo Huadong. A Project on Big Earth Data Science Engineering[J]. *Bulletin of Chinese Academy of Sciences*, 2018, 33(8): 818-823. (郭华东. 地球大数据科学工程[J]. 中国科学院院刊, 2018, 33(8): 818-823.)
- [2] Sahr K, White D, Kimerling J. Geodesic Discrete Global Grid Systems[J]. *Cartography and Geographic Information Science*, 2003, 30(2): 121-134.
- [3] Yao Xiaochuang, Li Guoqing, Xia Junshi, et al. Enabling the Big Earth Observation Data via Cloud Computing and DGGs: Opportunities and Challenges[J]. *Remote Sensing*, 2019, 12(1):62.
- [4] Bondaruk B, Roberts A, Robertson C. Assessing the State of the Art in Discrete Global Grid Systems: OGC Criteria and Present Functionality[J]. *Geomatica*, 2020, 74(1):1-22.
- [5] Mahdavi-amiri A, Alderson T, Samavati F. A Survey of Digital Earth[J]. *Computers & Graphics*, 2015, 53.
- [6] Mahdavi-amiri A, Bhojani, F, Samavati F. One-To-Two Digital Earth[C] // In Proceedings of the 9th International Symposium on Advances in Visual Computing (ISVC 2013), Rethymnon, Greece, 29–31 July 2013; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2013; doi:10.1007/978-3-642-41939-3\_67.
- [7] Ben Jin, Tong Xiaochong, Zhou Chenghu, et al. Construction Algorithm of Octahedron Based Hexagon Grid systems[J]. *Journal of Geo-information Science*, 2015, 17(7): 789-797. (贲进, 童晓冲, 周成虎, 等. 正八面体的六边形离散格网系统生成算法[J]. 地球信息科学学报, 2015, 17(7): 789-797. )
- [8] Sahr K. Location Coding on Icosahedral Aperture 3 Hexagon Discrete Global Grids[J]. *Computers, Environment and Urban Systems*, 2008, 32(3):174-187.
- [9] Wang Rui, Ben Jin, Du Lingyu, Zhou Jianbin, Li Zhuxin. Code Operation Scheme for the Icosahedral Aperture 4 Hexagonal Grid System[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2020, 45(1): 89-96. doi: 10.13203/j.whugis20180191 (王蕊, 贲进, 杜灵瑀, 周建彬, 李祝鑫. 正二十面体四孔六边形格网系统编码运算[J]. 武汉大学学报 • 信息科学版, 2020, 45(1): 89-96.)
- [10] White D, Kimerling J, Sahr K, et al. Comparing Area and Shape Distortion on Polyhedral-based Recursive Partitions of the Sphere[J]. *International Journal of Geographical Information Science*, 1998, 12(8): 805-827.
- [11] Zhou Liangchen, Sheng Yehua, Lin Bingxian, et al. Diamond Discrete Grid Subdivision Method for Spherical Surface with Icosahedron[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2014, 43(12):1293-1299 (周良辰, 盛业华, 林冰仙, 等. 球面菱形离散格网正二十面体剖分法[J]. 测绘学报, 2014, 43(12): 1293-1299. )
- [12] Wang Rui, Ben Jin, Zhou Jianbin, et al. A Generic Encoding and Operation Scheme for Mixed Aperture Three and Four Hexagonal Discrete Global Grid Systems[J]. *International Journal of Geographical Information Science*, 2020(10):1-43.
- [13] Zhou Jianbin, Ben Jin, Wang Rui, Zheng Mingyang. Encoding and operation for the aperture 4 hexagonal discrete global grids on uniform tiles[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*. doi: 10.13203/j.whugis20200530 (周建彬, 贲进, 王蕊, 郑明阳. 四孔六边形全球离散格网一致瓦片层次结构编码运算[J]. 武汉大学学报 • 信息科学版.)
- [14] Hall J, Wecker L, Ulmer B, et al. Disdyakis Triacanthedron DGGs. *ISPRS International Journal of Geo-Information*[J], 2020, 9: 315. <https://doi.org/10.3390/ijgi9050315>
- [15] Wang Rui, Ben Jin, Zhou Jianbin, et al. Indexing Mixed Aperture Icosahedral Hexagonal Discrete Global Grid Systems. *ISPRS International Journal of Geo-Information*[J]. 2020, 9: 171. <https://doi.org/10.3390/ijgi9030171>
- [16] Ben Jin, Tong Xiaochong, Zhang Yongsheng, Zhang Heng. Snyder Equal-area Map Projection for Polyhedral Globes[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2006, 31(10): 900-903. (贲进, 童晓冲, 张永生, 张衡. 对施奈德等积多面体投影的研究[J]. 武汉大学学报 • 信息科学版, 2006, 31(10): 900-903.)
- [17] Leeuwen D V, Strebe D. A "Slice-and-Dice" Approach to Area Equivalence in Polyhedral Map Projections[J]. *Cartography and Geographic Information Science*, 2006, 33(4):269-286.
- [18] Harrison E, Mahdavi-amiri A, Samavati F. Optimization of Inverse Snyder Polyhedral Projection[C] // 2011 International Conference on Cyberworlds, CW 2011,

Calgary, Alberta, Canada, October 4-6, 2011 IEEE, 2011.  
[19] WolframMathWorld. Rhombic Tricontahedron[OL].  
<https://mathworld.wolfram.com/RhombicTricontahedron.html>

[20] Snyder J . Map Projections--a Working Manual[J].  
Geological Survey Professional Paper, U.S. Government  
Printing Office, 1987.

#### 网络首发:

**标题:** 菱形三十面体格网系统构建的等积投影方法研究

**作者:** 王蕊, 贲进, 梁晓宇, 梁启爽, 涂祖瑞

**DOI:** 10.13203/j.whugis20220231

**收稿日期:** 2023-03-10

#### 引用格式:

王蕊, 贲进, 梁晓宇, 等. 菱形三十面体格网系统构建的等积投影方法研究[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2023, DOI: 10.13203/j.whugis20220231 (WANG Rui, BEN Jin, LIANG Xiaoyu, et al. Research on the Equal-Area Projection for the Construction of the Rhombic Tricontahedron Grid Systems[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2023, DOI: 10.13203/j. whugis20220231)

**网络首发文章内容和格式与正式出版会有细微差别, 请以正式出版文件为准!**

---

#### 您感兴趣的其他相关论文:

正二十面体四孔六边形格网系统编码运算

王蕊, 贲进, 杜灵瑀, 周建彬, 李祝鑫

武汉大学学报(信息科学版), 2020, 45(1): 89-96

<http://ch.whu.edu.cn/cn/article/doi/10.13203/j.whugis20180191>