



武汉大学学报(信息科学版)

*Geomatics and Information Science of Wuhan University*

ISSN 1671-8860, CN 42-1676/TN

## 《武汉大学学报(信息科学版)》网络首发论文

题目: 附加浮标基线约束的 GNSS/A 定位联合平差方法研究  
作者: 张世美, 王振杰, 孙振, 聂志喜, 李伟嘉  
收稿日期: 2023-03-10  
网络首发日期: 2023-03-31  
引用格式: 张世美, 王振杰, 孙振, 聂志喜, 李伟嘉. 附加浮标基线约束的 GNSS/A 定位联合平差方法研究[J/OL]. 武汉大学学报(信息科学版).  
<https://kns.cnki.net/kcms/detail/42.1676.TN.20230331.1025.003.html>



**网络首发:** 在编辑部工作流程中, 稿件从录用到出版要经历录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿等阶段。录用定稿指内容已经确定, 且通过同行评议、主编终审同意刊用的稿件。排版定稿指录用定稿按照期刊特定版式(包括网络呈现版式)排版后的稿件, 可暂不确定出版年、卷、期和页码。整期汇编定稿指出版年、卷、期、页码均已确定的印刷或数字出版的整期汇编稿件。录用定稿网络首发稿件内容必须符合《出版管理条例》和《期刊出版管理规定》的有关规定; 学术研究成果具有创新性、科学性和先进性, 符合编辑部对刊文的录用要求, 不存在学术不端行为及其他侵权行为; 稿件内容应基本符合国家有关书刊编辑、出版的技术标准, 正确使用和统一规范语言文字、符号、数字、外文字母、法定计量单位及地图标注等。为确保录用定稿网络首发的严肃性, 录用定稿一经发布, 不得修改论文题目、作者、机构名称和学术内容, 只可基于编辑规范进行少量文字的修改。

**出版确认:** 纸质期刊编辑部通过与《中国学术期刊(光盘版)》电子杂志社有限公司签约, 在《中国学术期刊(网络版)》出版传播平台上创办与纸质期刊内容一致的网络版, 以单篇或整期出版形式, 在印刷出版之前刊发论文的录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿。因为《中国学术期刊(网络版)》是国家新闻出版广电总局批准的网络连续型出版物(ISSN 2096-4188, CN 11-6037/Z), 所以签约期刊的网络版上网络首发论文视为正式出版。

DOI:10.13203/j.whugig20220190

## 引用格式：

张世美, 王振杰, 孙振, 等. 附加浮标基线约束的GNSS/A定位联合平差方法研究[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2023, DOI: 10.13203/j.whugis20220190 (ZHANG Shimei, WANG Zhenjie, SUN Zhen, et al. A joint adjustment method with between-buoy baseline constraint for GNSS/A underwater precise positioning[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2023, DOI: 10.13203/j.whugis20220190)

## 附加浮标基线约束的 GNSS/A 定位联合平差方法研究

张世美<sup>1</sup>, 王振杰<sup>1</sup>, 孙振<sup>1</sup>, 聂志喜<sup>1</sup>, 李伟嘉<sup>1</sup>

1 中国石油大学(华东)海洋与空间信息学院, 山东 青岛, 266580

**摘要：**为解决海面换能器位置误差对海底大地控制点定位精度的影响，将海面浮标和海底应答器均作为未知点，并把海面浮标间的基线信息作为约束条件，提出了附加浮标基线约束的 GNSS/A (Global Navigation Satellite System /Acoustic) 定位联合平差方法。首先，利用海面浮标间基线信息构建互测距方程，把海面换能器位置作为虚拟观测，与水下声学测距共同组成联合函数模型进行解算；然后，基于方差分量验后估计理论，对海面浮标位置、声学测距和浮标基线三类观测值进行准确的权重配比。最后，采用模拟数据进行验证，实验结果表明：该方法的定位精度比传统定位方法提高了 17.5%-46.3%，比联合平差方法提高了 16.5%-45.8%。

**关键词：**GNSS/A；基线约束；方差分量估计；联合平差

A joint adjustment method with between-buoy baseline constraint for  
GNSS/A underwater precise positioningZHANG Shimei<sup>1</sup>, WANG Zhenjie<sup>1</sup>, SUN Zhen<sup>1</sup>, NIE Zhixi<sup>1</sup>, LI Weijia<sup>1</sup>1 College of Oceanography and Space Informatics, China University of Petroleum (East China),  
Qingdao 266580, China

**Abstract:** For reducing the effect of acoustic transducers' coordinate various errors on the positioning accuracy of the undersea geodetic control point, an improved joint adjustment method with between-buoy baseline constraints is proposed for GNSS/A underwater precise positioning system with the moored buoy observation system. This method takes the surface buoy and the seafloor transponder as unknown points, and the mutual ranging information between GNSS buoys as constraints. First, the mutual ranging equation is constructed by using the baseline information between the buoys, and the positions of the acoustic transducer provided by GNSS positioning are introduced into as virtual observations to form a joint function model with the underwater acoustic ranging to solve the equation. Second, in order to balance the covariance matrices of buoy position, baseline observation and acoustic observations, the variance component

收稿日期：2023-03-10

项目资助：青岛海洋科学与技术试点国家实验室“问海计划”（2021WHZZB1000, 2021WHZZB1001）；国家自然科学基金面上项目（42174020）。

第一作者：张世美，硕士研究生，研究方向为水下导航与定位。zhangshimei415@163.com

通讯作者：王振杰，博士，教授，主要从事测量数据处理理论与方法研究。sdwzj@upc.edu.cn

estimation is applied to the improved joint adjustment to accurately determine the weight matrices of three observations. Finally, simulation data was used to verify the proposed method. Experimental results show that the accuracy of seafloor transponder positioning with the proposed method can be improved by 17.5%-46.3% as compared with the conventional positioning method and 16.5%-45.8% compared with the joint adjustment method. Simulation results demonstrate that the proposed method can perform much better than other two methods.

**Keyword:** GNSS/A; buoy-baseline constraint; variance component estimation; joint adjustment

## 1 引言

海底大地控制网是海洋定位与导航技术的基础设施，主要采用 GNSS/A (Global Navigation Satellite System /Acoustic) 定位技术，借助 GNSS 浮标平台实施水下声呐测距，来实现海底大地控制点的精确标定<sup>[1-3]</sup>。由于复杂的海洋环境和水声声呐测距技术的限制，现有的数据处理方法尚不能够满足精确标定海底大地控制点的需求<sup>[4,5]</sup>。2019 年国际大地测量协会正式设立了海洋大地测量工作组，以推动海洋空间基准与水下定位技术的发展，提高海底大地控制点的定位精度。

近年来，研究学者先后发展了航迹优化、差分定位和深度约束等技术手段，来提高海底大地控制点的定位精度。航迹优化提高了海底大地控制点的平面精度，但高程方向的定位精度仍有待提升<sup>[6,7]</sup>。对声呐观测值进行差分能够削弱观测值间的共模误差，提高海底大地控制点的定位精度<sup>[8-11]</sup>。基于压力计提供的深度值，提出了附加深度约束的水下定位方法，提高了海底大地控制的垂直方向的定位精度<sup>[12-15]</sup>。但是，这些方法在估计海底大地控制点的位置时，均忽略了海面换能器的位置误差<sup>[16]</sup>。海面换能器位置主要由 GNSS 定位技术确定，在不同历元具有不同的定位精度，这表明海面换能器位置不可避免的存在定位误差。若忽略海面换能器的位置误差，在平差过程中会将海面浮标位置的不确定信息传递到海底，降低海底大地控制点的定位精度。将海面换能器和海底应答器都当作未知参数，提出了顾及海面位置误差的水下联合平差方法<sup>[16]</sup>，减弱了海面换能器位置误差对水下定位的影响。但该方法没有考虑海面浮标间高精度的基线信息<sup>[17]</sup>。因此，应将浮标间高精度的基线信息作为约束纳入到观测方程，发展附加浮标基线约束的水下联合平差方法，来进一步提高海底大地控制点的定位精度。

## 2 传统 GNSS/A 定位方法

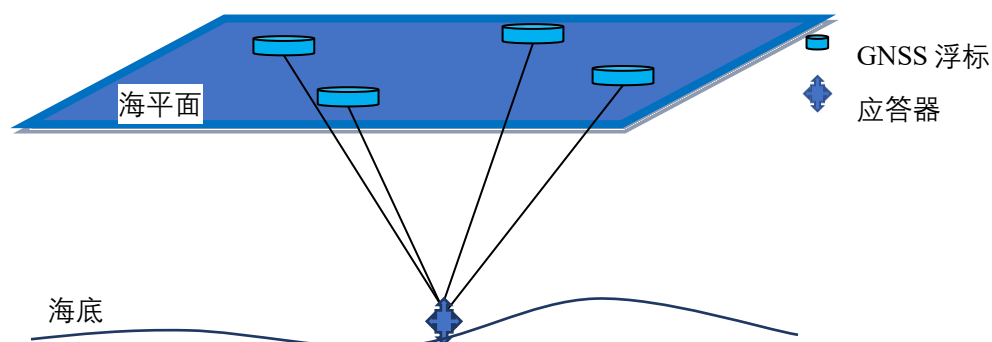


图 1 基于海面浮标的 GNSS/A 定位示意图  
Fig.1 Sketch map of GNSS/A underwater positioning based on surface buoy

GNSS/A 水下定位技术借助 GNSS 浮标平台实施水下声呐测距来精确标定海底大地控制点的位置。如图 1 所示, 假设海平面布放了 $n(n \geq 4)$ 个 GNSS 浮标, 可通过精密单点定位或者后处理差分定位技术进行定位。根据 GNSS 浮标和声学换能器的几何关系, 可以计算声学换能器的位置。声学换能器向海底应答器发射询问信号并接收应答信息, 记录声信号的单向传播时间, 借助声速剖面数据, 计算声学换能器至海底应答器的传播距离。若忽略海面换能器的位置误差, 声学测距线性化观测方程的向量表达式为

$$\mathbf{L} = \mathbf{B}\mathbf{d}\mathbf{x}^q + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1)$$

式中,  $\mathbf{L}$ 为声学测距观测值与测距计算值的差值;  $\mathbf{B}$ 为对应海底应答器的设计矩阵;  $\mathbf{d}\mathbf{x}^q$ 为海底应答器坐标的改正数;  $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为观测误差。根据最小二乘平差法, 则可计算海底应答器的坐标改正量为

$$\mathbf{d}\hat{\mathbf{x}}^q = (\mathbf{B}^T \mathbf{P}_{hq} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{hq} \mathbf{L} \quad (2)$$

式中,  $\mathbf{P}_{hq}$ 为声学观测值的权矩阵。海底应答器的坐标为

$$\hat{\mathbf{x}}^q = \mathbf{x}_0^q + \mathbf{d}\hat{\mathbf{x}}^q \quad (3)$$

式中,  $\mathbf{x}^q = [x^q, y^q, z^q]^T$ 为海底应答器的坐标。

传统 GNSS/A 定位方法认为海面换能器的位置是没有误差的已知值, 但是由 GNSS 定位提供的海面换能器不可避免的存在定位误差, 各个历元的定位精度也不相同。若忽略海面换能器的位置误差, 在平差过程中会将海面浮标位置的不确定信息传递到海底, 降低海底应答器的定位精度。为消除声学换能器位置误差对水下定位的影响, 文献[16]提出了顾及海面位置误差的水下联合平差模型, 提高了海底应答器的定位精度, 但该方法没有考虑高精度的浮标基线观测信息。根据精密单点定位技术定位海面换能器的位置精度为 15cm-20cm, 但由相对定位提供的浮标基线观测信息精度为厘米级, 甚至可以达到毫米级。将高精度的浮标基线信息作为约束条件纳入到观测方程中, 进一步提高海底应答器的定位精度。

### 3 基于浮标基线约束的联合平差估计方法

#### 3.1 附加浮标基线约束的联合平差函数模型

将海面浮标和海底应答器的位置均视为未知参数, 则线性化后的观测方程为

$$\mathbf{L} = \mathbf{A}\mathbf{d}\mathbf{x}^h + \mathbf{B}\mathbf{d}\mathbf{x}^q + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4)$$

式中,  $\mathbf{L}$ 为声学测距观测值与计算值的差值;  $\mathbf{A}$ 是对应海面浮标的设计矩阵;  $\mathbf{B}$ 是对应海底应答器的设计矩阵;  $\mathbf{d}\mathbf{x}^h$ 为浮标坐标改正数;  $\mathbf{d}\mathbf{x}^q$ 为海底应答器的坐标改正数;  $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为观测误差。

将 GNSS 声学定位提供的海面浮标位置作为虚拟观测，则观测方程为

$$\mathbf{L}_{x^h} = \bar{\mathbf{F}}\mathbf{d}\mathbf{x}^h + \boldsymbol{\varepsilon}_{x^h} \quad (5)$$

式中， $\mathbf{L}_{x^h}$ 为虚拟观测值； $\bar{\mathbf{F}}$ 是块对角矩阵，即 $\bar{\mathbf{F}} = \text{blkdiag}(\mathbf{F}, \mathbf{F}, \dots, \mathbf{F})$ ； $\mathbf{F}$ 为单位阵； $\boldsymbol{\varepsilon}_{x^h}$ 为虚拟观测值的误差向量。

假设海面共布设了 $n$ 个 GNSS 浮标，则浮标间可观测到的基线数为 $n(n-1)/2$ ，且所有观测基线都是不重复的。选择 $n-1$ 条独立基线，将其作为约束条件纳入观测方程中来优化定位模型，相应的线性化后的浮标间互测距观测方程为

$$\mathbf{L}_h = \mathbf{H}\mathbf{d}\mathbf{x}^h + \boldsymbol{\varepsilon}_h \quad (6)$$

式中， $\mathbf{L}_h$ 为浮标间的互测距观测值与计算值的差值； $\mathbf{H}$ 为浮标互测距方程的设计矩阵； $\boldsymbol{\varepsilon}_h$ 为浮标互测距的观测误差；联合式(4)、式(5)和式(6)，则可构建附加海面浮标基线约束的联合平差函数模型

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_{x^h} \\ \mathbf{L} \\ \mathbf{L}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}} & 0 \\ \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{H} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}\mathbf{x}^h \\ \mathbf{d}\mathbf{x}^q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{x^h} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_h \end{bmatrix} \quad (7)$$

根据最小二乘原理可得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d}\mathbf{x}^h \\ \mathbf{d}\mathbf{x}^q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_x + \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{hq} \mathbf{A} + \mathbf{H}^T \mathbf{P}_h \mathbf{H} & \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{hq} \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{hq} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{hq} \mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_x \mathbf{L}_{x^h} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{hq} \mathbf{L} + \mathbf{H}^T \mathbf{P}_h \mathbf{L}_h \\ \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{hq} \mathbf{L} \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中， $\mathbf{P}_x$ 是虚拟观测权重，可根据 GNSS 定位的先验方差-协方差信息定权； $\mathbf{P}_{hq}$ 是声学测距观测权重； $\mathbf{P}_h$ 是海面浮标间基线观测权矩阵。

### 3.2 附加浮标基线约束的联合平差随机模型

海面 GNSS 浮标位置虚拟观测、海面基线观测值和声学测距观测值属于不同类型观测值，利用验前方差估计观测值的权矩阵不能完全反映各类观测值的实际精度，不精确的随机模型会降低参数估计解的精度<sup>[18-20]</sup>。本文采用 Helmert 方差分量验后估计方法，对 GNSS 浮标位置虚拟观测值、浮标基线观测值和声呐测距值进行定权，削弱了随机模型不准确对水下定位的影响。由(4)、(5)、(6)式可得海面 GNSS 浮标位置虚拟观测、海面 GNSS 浮标基线和声学测距的误差方程为

$$\begin{cases} \mathbf{V}_{x^h} = \bar{\mathbf{F}}\mathbf{d}\mathbf{x}^h - \mathbf{L}_{x^h} \\ \mathbf{V}_h = \mathbf{H}\mathbf{d}\mathbf{x}^h - \mathbf{L}_h \\ \mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{d}\mathbf{x}^h + \mathbf{B}\mathbf{d}\mathbf{x}^q - \mathbf{L} \end{cases} \quad (9)$$

式中， $\mathbf{V}_{x^h}$ 为海面浮标位置的改正数向量； $\mathbf{V}_h$ 为海面基线的改正数向量； $\mathbf{V}$ 为声学测距的改正数向量。

根据 Helmert 方差分量估计，附加海面基线约束的联合平差随机模型验后估计公式为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} & \mathbf{S}_{13} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} & \mathbf{S}_{23} \\ \mathbf{S}_{31} & \mathbf{S}_{32} & \mathbf{S}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1^2 \\ \hat{\sigma}_2^2 \\ \hat{\sigma}_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{x^h}^T \mathbf{P}_x \mathbf{V}_{x^h} \\ \mathbf{V}_h^T \mathbf{P}_h \mathbf{V}_h \\ \mathbf{V}^T \mathbf{P}_{hq} \mathbf{V} \end{bmatrix} \quad (10)$$

式中，

$$\mathbf{S}_{11} = n_1 - 2 \operatorname{tr}(\mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_1) + \operatorname{tr}(\mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_1)^2; \mathbf{S}_{12} = \mathbf{S}_{21} = \operatorname{tr}(\mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_1 \mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_2);$$

$$\mathbf{S}_{13} = \mathbf{S}_{31} = \operatorname{tr}(\mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_1 \mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_3); \mathbf{S}_{22} = n_2 - 2 \operatorname{tr}(\mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_2) + \operatorname{tr}(\mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_2)^2;$$

$$\mathbf{S}_{32} = \mathbf{S}_{23} = \operatorname{tr}(\mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_2 \mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_3); \mathbf{S}_{33} = n_3 - 2 \operatorname{tr}(\mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_3) + \operatorname{tr}(\mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_3)^2;$$

$n_1$ 为海面浮标位置虚拟观测数； $n_2$ 为海面基线观测数； $n_3$ 为声学测距观测数； $\hat{\sigma}_1^2$ 为海面浮标位置虚拟观测量的单位权方差； $\hat{\sigma}_2^2$ 为海面基线观测量的单位权方差； $\hat{\sigma}_3^2$ 为声学测距观测量的单位权方差。

$$\mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}^T \mathbf{P}_x \bar{\mathbf{F}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T \mathbf{P}_h \mathbf{H} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{N}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{hq} \mathbf{A} & \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{hq} \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{hq} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{hq} \mathbf{B} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_x + \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{hq} \mathbf{A} + \mathbf{H}^T \mathbf{P}_h \mathbf{H} & \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{hq} \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{hq} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{hq} \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

本文设计给出了附加浮标基线约束的联合平差随机模型验后估计的计算过程如下：

(1) 将观测值分为海面浮标位置虚拟观测值、海面浮标间基线值和海面换能器到海底应答器的声学测距值三类独立观测值，分别对其进行验前权估计，求得三类观测值的初始权 $\mathbf{P}_x$ 、 $\mathbf{P}_h$ 与 $\mathbf{P}_{hq}$ ；

(2) 对海面浮标位置虚拟观测值、浮标基线观测值和海面换能器到海底应答器的声学测距观测值进行第一次平差，得到三类观测值的改正数 $\mathbf{V}_{x^h}$ 、 $\mathbf{V}_h$ 及 $\mathbf{V}$ ；

(3) 根据附加浮标基线约束的联合平差随机模型验后估计所采用的 Helmert 方差分量估计公式，求得三类观测值单位权方差的第一次估值 $\hat{\sigma}_1^2$ 、 $\hat{\sigma}_2^2$ 与 $\hat{\sigma}_3^2$ ，再根据 $\mathbf{P}_i^{k+1} = \mathbf{P}_i^k \cdot C / \hat{\sigma}_i^2$ 重新定权；

(4) 反复进行步骤(2)和步骤(3)，直至 $\hat{\sigma}_1^2$ 、 $\hat{\sigma}_2^2$ 与 $\hat{\sigma}_3^2$ 的比值符合设定的阈值，得到相对应的权，将权带入式(8)中，进行参数的求解。

### 3.3 附加浮标基线约束的联合平差方法优越性的证明

根据方差-协方差传播定律<sup>[21]</sup>，传统 GNSS/A 定位方法计算的海底应答器的方差-协方差矩阵 $\mathbf{D}_{LS}$ 为

$$\mathbf{D}_{LS} = \sigma_0^2 (\mathbf{B}^T \mathbf{P}_{hq} \mathbf{B})^{-1} \quad (11)$$

式中， $\sigma_0^2$ 为单位权方差。

由参考文献[16]可知, 根据方差-协方差传播定律, 联合平差计算海底应答器的方差-协方差矩阵 $D_{JA}$ 为

$$D_{JA} = \sigma_0^2 (\mathbf{B}^T \mathbf{P}_{hq} \mathbf{B} - \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{hq} \mathbf{A} (\mathbf{P}_x + \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{hq} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{hq} \mathbf{B})^{-1} \quad (12)$$

根据式(7), 附加浮标基线约束的 GNSS/A 联合平差的函数模型可表达为

$$\mathbf{S} = \mathbf{G} d\mathbf{x}^h + \mathbf{K} d\mathbf{x}^q + \boldsymbol{\varepsilon}_l = [\mathbf{G} \quad \mathbf{K}] \begin{bmatrix} d\mathbf{x}^h \\ d\mathbf{x}^q \end{bmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon}_l \quad (13)$$

式中,  $\mathbf{S}$ 为观测值向量,  $\mathbf{S} = [\mathbf{L}_x^h \quad \mathbf{L}^T \quad \mathbf{L}_h^T]^T$ ;  $\mathbf{G}, \mathbf{K}$ 为设计矩阵,  $\mathbf{G} = [\mathbf{F}^T \quad \mathbf{A}^T \quad \mathbf{H}^T]^T$ ,  $\mathbf{K} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{B}^T \quad \mathbf{0}]^T$ ;  $\boldsymbol{\varepsilon}_l$ 为误差向量,  $\boldsymbol{\varepsilon}_l = [\boldsymbol{\varepsilon}_x^h \quad \boldsymbol{\varepsilon}^T \quad \boldsymbol{\varepsilon}_h^T]^T$ ;  $\mathbf{P}$ 为 $(5n-1) \times (5n-1)$ 的块对角矩阵,  $\mathbf{P} = \text{blkdiag}(\mathbf{P}_x, \mathbf{P}_{hq}, \mathbf{P}_h)$ 。

根据最小二乘原理, 由式(13)可得附加浮标基线约束的 GNSS/A 联合平差的法方程为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}_{12} \\ \mathbf{U}_{21} & \mathbf{U}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{x}^h \\ d\mathbf{x}^q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{W}_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

式中,  $\mathbf{U}_{11} = \mathbf{G}^T \mathbf{P} \mathbf{G}$ ;  $\mathbf{U}_{12} = \mathbf{G}^T \mathbf{P} \mathbf{K}$ ;  $\mathbf{U}_{21} = \mathbf{K}^T \mathbf{P} \mathbf{G}$ ;  $\mathbf{U}_{22} = \mathbf{K}^T \mathbf{P} \mathbf{K}$ ;  $\mathbf{W}_1 = \mathbf{G}^T \mathbf{P} \mathbf{S}$ ;  $\mathbf{W}_2 = \mathbf{K}^T \mathbf{P} \mathbf{S}$ 。将式(14)进行等价变换可得

$$\mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}_{12} \\ \mathbf{U}_{21} & \mathbf{U}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{x}^h \\ d\mathbf{x}^q \end{bmatrix} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{W}_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_{21} & \mathbf{U}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{x}^h \\ d\mathbf{x}^q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{W}_2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

式中,  $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\mathbf{Z} & \mathbf{E}_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_3 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{E}_3$ 是 $3 \times 3$ 的单位阵;  $\mathbf{Z} = \mathbf{U}_{21} \mathbf{U}_{11}^{-1}$ ;  $\mathbf{U}_1 = \mathbf{K}^T \mathbf{P} (\mathbf{E}_{5n-1} - \mathbf{G} \mathbf{U}_{11}^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{P}) \mathbf{K}$ ,  $\mathbf{E}_{5n-1}$ 是 $(5n-1) \times (5n-1)$ 的单位阵;  $\mathbf{R}_1 = \mathbf{K}^T \mathbf{P} (\mathbf{E}_{5n-1} - \mathbf{G} \mathbf{U}_{11}^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{P}) \mathbf{S}$ 。

对式(16)进行解算可得

$$\mathbf{K}^T \mathbf{P} (\mathbf{E}_{5n-1} - \mathbf{G} \mathbf{U}_{11}^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{P}) \mathbf{K} d\mathbf{x}^q = \mathbf{K}^T \mathbf{P} (\mathbf{E}_{5n-1} - \mathbf{G} \mathbf{U}_{11}^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{P}) \mathbf{S} \quad (17)$$

令

$$\mathbf{J} = \mathbf{G} \mathbf{U}_{11}^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{P} \quad (18)$$

则

$$(\mathbf{E}_{5n-1} - \mathbf{J})^2 = \mathbf{E}_{5n-1} - \mathbf{J} \quad (19)$$

$$(\mathbf{E}_{5n-1} - \mathbf{J})^T \mathbf{P} = \mathbf{P} (\mathbf{E}_{5n-1} - \mathbf{J}) \quad (20)$$

矩阵 $\mathbf{E}_{5n-1} - \mathbf{J}$ 是幂等矩阵,  $(\mathbf{E}_{5n-1} - \mathbf{J})^T \mathbf{P}$ 是对称矩阵。

根据式(18)、(19)、(20), 式(17)可改写为

$$\mathbf{K}^T (\mathbf{E}_{5n-1} - \mathbf{J})^T \mathbf{P} (\mathbf{E}_{5n-1} - \mathbf{J}) \mathbf{K} d\mathbf{x}^q = \mathbf{K}^T (\mathbf{E}_{5n-1} - \mathbf{J})^T \mathbf{P} \mathbf{S} \quad (21)$$

令  $\mathbf{Y} = (\mathbf{E}_{5n-1} - \mathbf{J})\mathbf{K}$ , 根据式(21)可得海底应答器的坐标改正数为

$$\mathbf{dx}^q = (\mathbf{Y}^T \mathbf{P} \mathbf{Y})^{-1} \mathbf{Y}^T \mathbf{P} \mathbf{S} \quad (22)$$

采用方差-协方差传播定理, 则附加基线约束的 GNSS/A 水下联合平差方法计算得到的海底应答器的方差-协方差阵  $\mathbf{D}_{\text{IJA}}$  为

$$\mathbf{D}_{\text{IJA}} = \sigma_0^2 (\mathbf{Y}^T \mathbf{P} \mathbf{Y})^{-1} = \sigma_0^2 (\mathbf{B}^T \mathbf{P}_{hq} \mathbf{B} - \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{hq} \mathbf{A} (\mathbf{P}_x + \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{hq} \mathbf{A} + \mathbf{H}^T \mathbf{P}_h \mathbf{H})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{hq} \mathbf{B})^{-1} \quad (23)$$

由于  $\mathbf{P}_x + \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{hq} \mathbf{A} + \mathbf{H}^T \mathbf{P}_h \mathbf{H}$  为正定矩阵, 则满足

$$\text{tr}(\mathbf{P}_x + \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{hq} \mathbf{A} + \mathbf{H}^T \mathbf{P}_h \mathbf{H})^{-1} < \text{tr}(\mathbf{P}_x + \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{hq} \mathbf{A})^{-1} \quad (24)$$

将式(24)带入式(23)并求迹可得

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{D}_{\text{IJA}}) &= \sigma_0^2 \text{tr} \left( \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{hq} \mathbf{B} - \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{hq} \mathbf{A} (\mathbf{P}_x + \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{hq} \mathbf{A} + \mathbf{H}^T \mathbf{P}_h \mathbf{H})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{hq} \mathbf{B} \right)^{-1} \\ &< \sigma_0^2 \text{tr} \left( \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{hq} \mathbf{B} - \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{hq} \mathbf{A} (\mathbf{P}_x + \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{hq} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{hq} \mathbf{B} \right)^{-1} = \text{tr}(\mathbf{D}_{\text{JA}}) \end{aligned} \quad (25)$$

经证明联合平差优于传统 GNSS/A 定位方法<sup>[11]</sup>, 联合式(25), 则三种方法求得的海底应答器的方差-协方差阵求迹后的大小关系为

$$\text{tr}(\mathbf{D}_{\text{IJA}}) < \text{tr}(\mathbf{D}_{\text{JA}}) < \text{tr}(\mathbf{D}_{\text{LS}}) \quad (26)$$

由以上证明可知, 附加浮标基线约束的 GNSS/A 水下联合平差方法的方差-协方差的迹最小, 表明新方法能够提高传统 GNSS/A 定位方法和联合平差的定位精度, 获取更加可靠稳定的水下定位参数估计解。

#### 4 实验及分析

采用仿真数据来验证新方法的有效性。如图 2(a)所示, GNSS/A 水下定位系统主要由海面 GNSS 浮标和海底应答器组成。在海面布设 6 个 GNSS 浮标, 形状为正六边形, 共可以形成 15 条基线, 选择 5 条独立基线进行约束。海底应答器仿真深度分别为 300m、500m 和 1000m。图 2(b)给出了声速剖面, 采用声线跟踪方法模拟海面换能器和海底应答器之间的传播时间。考虑到时间和声速的随机误差, 忽略了声波的短期影响和潮汐的长期影响, 声学测距误差设置为换能器和海底应答器之间距离的 1/10000 倍, 并且在实验中加入了系统误差。为了更加符合实际海洋环境, 表面波模拟为 2m 的余弦波, 且海面浮标位置随着时间的推移处于不断的变化中, 水平方向速度为 5cm/s 左右(浮标的动态图如图 2(a)左上角所示)。GNSS 精密单点定位精度约为 20cm, GNSS 浮标之间的基线观测误差约为 5cm。模拟 100 个历元的基线观测数据和声学测距数据, 分别采用传统 GNSS/A 方法、顾及海面位置误差的联合平差方法和附加浮标基线约束的联合平差方法三种方法计算海底应答器的位置。



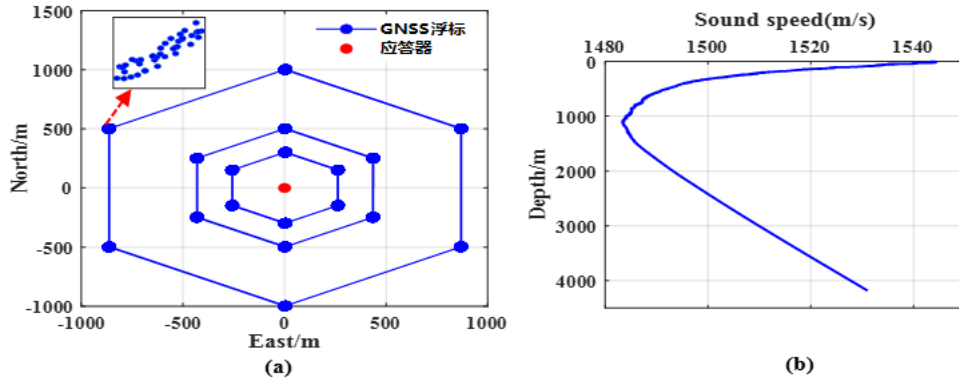


图 2 浮标与应答器位置布局及声速剖面图

Fig. 2 Buoy and transponder position layout diagram (a) and sound velocity profile (b)

图 3 给出了三种方法在不同水深情况下，海底应答器的 E、N、U 三个方向偏差的均方根（Root Mean Square, RMS）误差。由图可知，三种方法在 E、N、U 三个方向的定位误差随着水深的增加而增大。由于声学换能器位置误差的影响，传统 GNSS/A 水下定位方法的平差定位精度最低。联合平差方法通过降低声学换能器位置误差的影响，一定程度上提高了海底应答器的定位精度，但该方法没有考虑海面浮标间的基线观测信息。附加基线约束的联合平差方法，将海面基线观测信息作为约束信息纳入到联合平差中，提高了海底应答器的定位精度。由结果可知，附加基线约束的联合平差方法能够获取更可靠的定位结果。

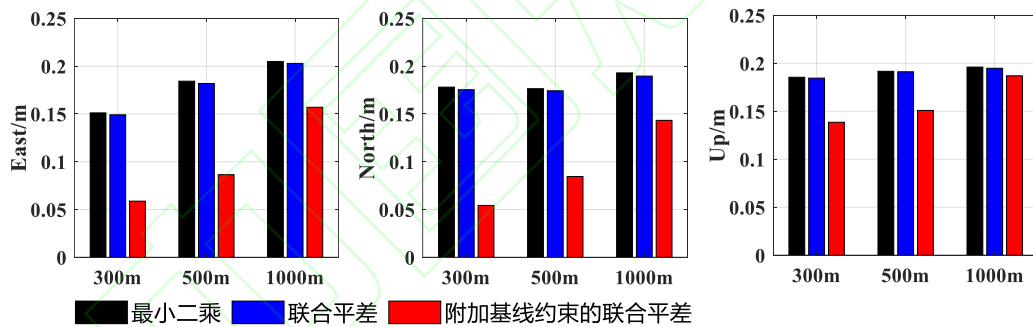


图 3 三种定位方法在不同水深情况下定位误差图

Fig.3 Statistics of positioning errors in three directions for three methods

表 1 给出了三种方法在不同深度的二维（2D）定位误差和三维（3D）定位误差的 RMS 值，以此来评估海底应答器的定位精度。从表中可以看出，通过附加基线约束的联合平差方法计算的海底应答器定位精度最高。在水深 300m、500m、1000m 时，与联合平差方法相比，海底大地控制点的平面精度分别提高了 0.1502m、0.1310m、0.0651m；相比于传统最小二乘方法，海底应答器的精度分别提高了 0.1535m、0.1342m、0.0689m。在三种不同的水深情况下，附加基线约束的联合平差方法的三维精度（3D）分别为 0.1600m、0.1934m、0.2831m，与联合平差方法相比，海底应答器的精度分别提高了 45.8%、38.8%、16.5%，相比于传统最小二乘方法，精度分别提高了 46.3%、39.4%、17.5%。综上，本文提出的附加浮标间基线约束的联合平差方法的定位精度优于其他两种方法。

表 1 三种定位方法不同水深精度统计 (米)

Tab.1 Accuracy statistics of three positioning methods under different water depth settings (m)

水深/m	300		500		1000	
方法	2D	3D	2D	3D	2D	3D
最小二乘	0.2335	0.2982	0.2551	0.3191	0.2815	0.3430
联合平差	0.2302	0.2950	0.2519	0.3162	0.2777	0.3392
本文方法	0.0800	0.1600	0.1209	0.1934	0.2126	0.2831

以第一个浮标为例, 三种方法在不同水深情况下, 海面 GNSS 浮标到海底应答器的声学测距残差直方图如图 4 所示 (其余浮标的残差直方图与第一个浮标类似)。由直方图可知, 三种定位方法在不同深度下的声学测距残差概率密度都服从正态分布。由于声学换能器位置误差的影响, 传统最小二乘估计方法的密集度最低。通过降低换能器位置误差的影响, 联合平差方法一定程度上提高了残差的拟合度。而附加基线约束的联合平差方法的密集度最高, 明显优于联合平差方法和传统最小二乘估计方法, 这表明无论是在解精度还是模型拟合度上, 新方法具有更好的解算效果和可信度。

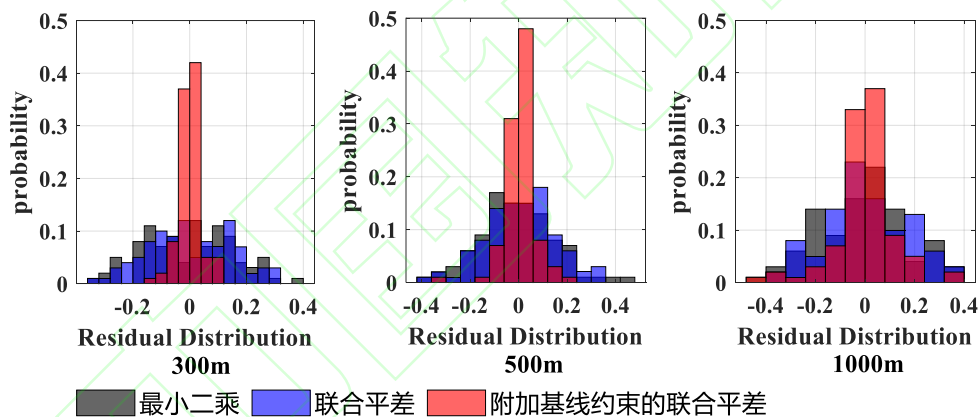


图 4 三种定位方法的残差直方图  
Fig.4 Residual histogram by three positioning methods

## 5 结论

为了提高海底应答器的定位精度, 本文将海面 GNSS 浮标与海底应答器的位置都作为未知数, 海面换能器的位置当成虚拟观测纳入观测方程中, 并顾及海面高精度的浮标基线信息, 提出了附加浮标基线约束的水下联合平差方法。顾及海面浮标位置虚拟观测值、浮标基线观测值与海面换能器到海底应答器的声学测距观测值属于不同类观测值, 以方差分量估计方法为基础, 合理的估计三类观测值的权矩阵。通过仿真实验进行验证, 结果表明, 本文方法能够获得较稳定的残差值。在不同的水深 300m、500m、1000m 的情况下, 该方法海底应答器的定位精度比传统 GNSS/A 定位方法分别提高了 46.3%、39.4%、17.5%, 比联合平差方法分别提高了 45.8%、38.8%、16.5%。

## 参考文献

- [1] Liu Jingnan, Chen Guanxu, Zhao Jianhu, et al. Development and Trends of Marine Space-Time Frame Network[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2019, 44(1): 17-37 (刘经南,陈冠旭,赵建虎,等.海洋时空基准网的进展与趋势[J].武汉大学学报(信息科学版),2019,44(1):17-37)
- [2] Qi Ke, Qu Guoqing, Su Xiaoqing, et al. Analytical Optimization on GNSS/Sonar Buoy Array Deployment for Underwater Positioning[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2019, 44(9): 1312-1319 (齐珂,曲国庆,苏晓庆,等.水下声纳定位浮标阵列解析优化[J].武汉大学学报(信息科学版),2019,44(9):1312-1319)
- [3] Cheng Shilai, Zhang Xiaohong. Simulation of Tsunami Forecasting with GPS Buoy Using PPP Technology[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2007, 32(9): 764-766 (程世来,张小红.基于 PPP 技术的 GPS 浮标海啸预警模拟研究[J].武汉大学学报(信息科学版),2007(9):764-766)
- [4] Yang Yuanxi, Xu Tianhe, Xue Shuqiang. Progresses and prospects in developing marine geodetic datum and marine navigation of China[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2017, 46(1): 1-8 (杨元喜,徐天河,薛树强.我国海洋大地测量基准与海洋导航技术研究进展与展望[J].测绘学报,2017,46(1):1-8)
- [5] Yang Yuanxi, Liu Yanxiong, Sun Dajun, et al. Seafloor geodetic network establishment and key technologies [J]. Science China Earth Sciences, 2020, 50(7): 936-945 (杨元喜,刘焱雄,孙大军,等.海底大地基准网建设及其关键技术[J].中国科学:地球科学,2020,50(7):936-945)
- [6] Chen G, Liu Y, Liu Y, et al. Improving GNSS-acoustic positioning by optimizing the ship's track lines and observation combinations. Journal of geodesy. 2020;94(6):61-75
- [7] Sato M, Fujita M, Matsumoto Y, et al. Improvement of GPS/acoustic seafloor positioning precision through controlling the ship's track line[J]. Journal of Geodesy, 2013, 87(9): 105-114
- [8] Zhao Shuang, Wang Zhenjie, Wu Shaoyu, et al. A ship-board acoustic difference positioning method based on selection weight iteration[J]. Oil Geophysical Prospecting, 2017, 52(6): 1137-1145 (赵爽,王振杰,吴绍玉,等.基于选权迭代的走航式水声差分定位方法[J].石油地球物理勘探,2017,52(6):1137-1145)
- [9] Cai Yanhui, Yang Xinhong. Underwater positioning system's baseline network analyzing based on analytical method[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2008, 28(06): 101-106 (蔡艳辉,杨新红.差分GPS水下定位系统的解析法分析[J].大地测量与地球动力学,2008,28(06):101-106)
- [10] Xu P L, Ando M, Tadokoro K. Precise, three-dimensional seafloor geodetic deformation measurements using difference techniques[J]. Earth Planets and Space, 2005, 57(9): 795-808
- [11] Xin M Z, Yang F L, Liu H, et al. Single-Difference Dynamic Positioning Method for GNSS-

- Acoustic Intelligent Buoys Systems[J]. *Journal of Navigation*,2020,73(3):646-657
- [12] Liu Huimin, Wang Zhenjie,Zhao Shuang. A depth-constraint multi-target positioning acoustic approach in shallow waters[J]. *Oil Geophysical Prospecting*, 2019, 54(6): 1181-1187. (刘慧敏,王振杰,赵爽.深度约束的浅海多目标声学定位方法[J].石油地球物理勘探, 2019, 54(06):1181-1187)
- [13] Zhao Jianhu, Zou Yajing, Wu Yongting, et al.Determination of underwater control point coordinate based on constraint of water depth[J].*Journal of Harbin Institute of Technology*,2016,48(10):137-141 (赵建虎,邹亚靖,吴永亭,等.深度约束的海底控制网点坐标确定方法[J].哈尔滨工业大学学报, 2016, 48(10): 137-141)
- [14] Zhao Jianhu, Chen Xinhua, Wu Yongting, et al. Determination of Absolute Coordinate of Underwater Control Point Taking Waves and Depth's Constraint into Account[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2018, 47(3): 413-421(赵建虎, 陈鑫华, 吴永亭,等. 顾及波浪影响和深度约束的水下控制网点绝对坐标的精确确定[J]. 测绘学报, 2018, 047(3):413-421)
- [15] Wang Zhenjie, Liu Huimin, Yang Huiliang, et al. USBL/DVL integrated navigation algorithm for deep-sea towing system based on vertical constraints[J]. *Journal of Chinese Inertial Technology*, 2019, 27(5):670-676 (王振杰,刘慧敏,杨慧良,等.基于垂直约束的深海拖曳系统 USBL/DVL 组合导航算法[J]. 中国惯性技术学报, 2019, 27(5):670-676)
- [16] Zhao S, Wang Z J,Nie Z X, et al. Investigation on total adjustment of the transducer and seafloor transponder for GNSS/Acoustic precise underwater point positioning[J]. *Ocean Engineering*,2021,221: 108533
- [17] Tran D T, Nguyen D H, Luong N D, et al. Impact of the precise ephemeris on accuracy of GNSS baseline in relative positioning technique[J]. *Vietnam Journal of Earth Sciences*, 2020, 43(1):96-110
- [18] Zhao Shuang, Wang Zhenjie, Liu Huimin. Investigation on Underwater Positioning Stochastic Model Based on Sound Ray Incidence Angle[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2018, 47(9): 1280-1289 (赵爽,王振杰,刘慧敏.顾及声线入射角的水下定位随机模型[J].测绘学报,2018,47(9):1280-1289)
- [19] Cui Xizhang, Yu Zongchou,Tao Benzao, et al. *Generalized Surveying Adjustment*[M]. Wuhan:Wuhan University Press,2009(崔希璋,於总铸,陶本藻,等.广义测量平差[M]. 武汉:武汉大学出版社, 2009:102-129)
- [20] Zhou Jiangwen. Classical theory of errors and robust estimation[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 1989,18(2):115-120 (周江文.经典误差理论与抗差估计[J].测绘学报,1989,18(2):115-120)
- [21] Huang Weibin. *Theory and Application of Modern Surveying Adjustment*[M]. Beijing:PLA Press1992: 23-29 (黄维彬.近代平差理论及其应用[M].北京:解放军出版社, 1992: 23-

**网络首发:**

**标题:** 附加浮标基线约束的GNSS/A定位联合平差方法研究

**作者:** 张世美, 王振杰, 孙振, 聂志喜, 李伟嘉

**DOI:** 10.13203/j.whugis20220190

**收稿日期:** 2023-03-10

**引用格式:**

张世美, 王振杰, 孙振, 等. 附加浮标基线约束的GNSS/A定位联合平差方法研究[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2023, DOI: 10.13203/j.whugis20220190 (ZHANG Shimei, WANG Zhenjie, SUN Zhen, et al. A joint adjustment method with between-buoy baseline constraint for GNSS/A underwater precise positioning[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2023, DOI: 10.13203/j. whugis20220190)

**网络首发文章内容和格式与正式出版会有细微差别, 请以正式出版文件为准!**

---

**您感兴趣的其他相关论文:**

附加高水平分辨率PWV约束的GNSS水汽层析算法

张文渊, 郑南山, 张书毕, 丁楠, 戚铭心, 王昊

武汉大学学报(信息科学版), 2021, 46(11): 1627-1635

<http://ch.whu.edu.cn/cn/article/doi/10.13203/j.whugis20210055>