



引文格式:周寅飞,张立华,贾帅东,等.最大可航窗口序列约束贝塞尔曲线的无人船自主航行航线规划方法[J].武汉大学学报(信息科学版),2024,49(7):1224-1236.DOI:10.13203/j.whugis20220058

Citation: ZHOU Yinfei, ZHANG Lihua, JIA Shuaidong, et al. Autonomous Navigation Route Planning Method of Unmanned Ship Based on Bessel Curves Constrained by Maximum Navigable Window Sequence[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2024, 49(7): 1224-1236. DOI: 10.13203/j.whugis20220058

# 最大可航窗口序列约束贝塞尔曲线的 无人船自主航行航线规划方法

周寅飞<sup>1,2</sup> 张立华<sup>1,2</sup> 贾帅东<sup>1,2</sup> 戴泽源<sup>1,2</sup> 董 箭<sup>1,2</sup> 马梦锴<sup>1,2</sup>

1 大连舰艇学院军事海洋与测绘系, 辽宁 大连, 116018

2 大连舰艇学院海洋测绘工程重点实验室, 辽宁 大连, 116018

**摘要:**提出了一种最大可航窗口序列约束贝塞尔曲线的无人船自主航行航线规划方法。首先,根据电子海图求取碍航区,进而预生成航路点,沿预生成航路依次提取与碍航区不相交的最大可航窗口序列,构建可航约束空间;然后,挖掘贝塞尔曲线在控制点约束包络区域内进行运动参数关联计算的潜能,将航线规划转换为空间与运动参数双约束下通过凸优化求解贝塞尔航路曲线控制点的问题。最后,分别通过仿真和实船实验,对所提方法与已有方法进行对比分析。实验结果表明:(1)所提方法能够顾及船舶运动约束来规划航线,进而有效提高无人船执行规划航线的精度;(2)所提方法可以引导无人船以特定任务所需航向、航速等运动参数自主航行通过指定位置,达到灵活机动的目的。

**关键词:**航线规划;运动约束;自主航行;贝塞尔曲线;碍航区

中图分类号:P208

文献标识码:A

收稿日期:2022-08-30

DOI:10.13203/j.whugis20220058

文章编号:1671-8860(2024)07-1224-13

## Autonomous Navigation Route Planning Method of Unmanned Ship Based on Bessel Curves Constrained by Maximum Navigable Window Sequence

ZHOU Yinfei<sup>1,2</sup> ZHANG Lihua<sup>1,2</sup> JIA Shuaidong<sup>1,2</sup> DAI Zeyuan<sup>1,2</sup>  
DONG Jian<sup>1,2</sup> MA Mengkai<sup>1,2</sup>

1 Department of Military Oceanography and Hydrography & Cartography, Dalian Naval Academy, Dalian 116018, China

2 Key Laboratory of Hydrographic Surveying and Mapping, Dalian Naval Academy, Dalian 116018, China

**Abstract:** **Objective:** Route planning is the foundation of the safe and efficient navigation of ships. Due to insufficient consideration of the requirements for autonomous navigation unmanned ships, the current route planning method has two problems: (1) Own to the insufficient consideration for the motion constraints of ships in the planning route, the unmanned ship tends to produce the track deviation near the turning position and is likely to cross the navigation obstruction area while sailing autonomously. (2) The planned route is difficult to guide the unmanned ship to sail autonomously through the specified place flexibly with the course and speed for a specific task. Therefore, we propose a route planning method for autonomous navigation of the unmanned ship with a maximum navigable window sequence that constrains Bessel curves. **Methods:** First, the navigation obstruction areas are calculated on the basis of electronic navigation charts, the maximum navigable window sequence that does not intersect with the navigation obstruction area is extracted along the pre-generated route, and the navigable constraint space is constructed. Then, the potential of the Bessel curve for the calculation of related motion parameters in the constraint envelope area of control points is excavated, and the route planning is transformed into a problem for the control point of

**基金项目:**国家自然科学基金(41871369,41901320,42071439)。

**第一作者:**周寅飞,博士生,主要从事海洋GIS研究。Zhouyinfei1998@163.com

**通讯作者:**贾帅东,博士,副教授。sky\_jsd@163.com

Bezier curves through convex optimization under the double constraints of space and motion parameters. Finally, the method is compared with the existing methods through simulation and real ship experiments. **Results:** The experimental results show that: (1) This method could effectively reduce the oscillation of track tracing of the unmanned ship at the turning position and significantly improve the tracking control accuracy of the unmanned ship. The maximum horizontal and vertical errors and variances of the track tracing of the route generated by the method are significantly less than those of the improved binary tree method of the route. (2) The actual speed and course are basically consistent with the set speed and direction, which shows that this method could guide the unmanned ship to sail autonomously through the specified place at the speed for a specific task. **Conclusions:** (1) The method could restrain the ship's motion to plan the route, so as to improve the accuracy of the unmanned ship effectively in executing the planned route. (2) The method could guide the unmanned ship to navigate autonomously through the specified place with the motion parameters such as heading and speed required by the specific task, so as to achieve the purpose of flexible mobility.

**Key words:** route planning; motion constraints; autonomous navigation; Bezier curve; obstruction areas

航线规划是确保舰船安全、高效完成海上航行的基础。充分挖掘电子海图的空间分析功能,实现航线的自动规划,成为了国内外众多学者关注的焦点<sup>[1]</sup>。

当前的航线规划方法按原理来讲可以分成两类:(1)基于空间网络模型的航线规划方法。此类方法将航线规划问题转化为计算机中的图论问题,通过构建网络模型,以各类路径搜索算法实现航线的自动规划。例如,Mannarini等<sup>[2]</sup>结合船舶水动力学,对传统Dijkstra算法进行改进,提出了舰船最优航线规划模型;潘伟等<sup>[3]</sup>利用Delaunay三角剖分对环境建模,并通过切线法建立可行网络;潘明阳等<sup>[4]</sup>设计了内河的通航网络,通过改进A\*算法实现了内河水网的航线规划;陈晓等<sup>[5]</sup>应用Maklink图对部分航迹稀疏区域进行建模,对海域内任意两点间的航线规划进行研究。但此类方法本质上是“以空间换时间”,网络模型越精细,所占用的空间也越大,效率呈指数级降低。(2)基于空间拓扑模型的航线规划方法。这类方法首先基于电子海图进行碍航区求取并利用区域叠置生成碍航区集,然后以航路起始点作为测试线两端点,通过生成与碍航区集具有特定空间拓扑关系的测试线来实现航线规划,此类方法原理清晰明了,效率相对较高。例如,文献[6-8]以航路二叉树思想为基础在电子海图平台下建立了自动绕行碍航区的基本原则。众多学者通过设计重构<sup>[9]</sup>、检索递归<sup>[10]</sup>、融合迭代<sup>[11]</sup>、结构重组<sup>[12]</sup>、凸包构建<sup>[13-14]</sup>等多种策略对其进行改进,使得规划航线的质量和算法效率又得到了一定的提升。随后,针对转向对舰船通行性的限制,王涛等<sup>[15]</sup>提出了顾及转向限制的航线自动规

划方法,拓宽了方法的可执行性。

相对传统的舰船,无人船机动灵活性强,能够在水面舰船难以航行的区域执行特殊任务。为充分发挥无人船的优势,需要着力提升其自主航行能力,使其能够在没有人为干预的条件下根据任务目标,自主决策、航行并采取行动。为提升无人船的自主航行能力,高质量的航线自动规划是需要突破的关键技术之一<sup>[16]</sup>。然而,现有航线规划方法多为传统的舰船设计,没有考虑无人船自主航行时执行任务的特定要求,在可执行性方面主要存在两个方面的不足:(1)所生成航线大多是折线式的,转向前后航路的突变使得在转向点附近易产生较大的航迹偏差,甚至可能导致无人船穿越碍航区;(2)没有考虑以特定的航向、航速等运动参数通过指定位置,难以适应无人船自主航行执行特种任务的机动要求。

因此,本文提出了一种最大可航窗口序列约束贝塞尔曲线的无人船自主航行航线规划方法,通过最大可航窗口序列生成约束可航空间,依据任务机动要求与无人船运动性能建立运动约束,综合空间与运动参数双约束求解贝塞尔航路曲线,实现航线的自动生成。

## 1 基本思想

本文提出的无人船自主航行航线规划方法分为基于电子海图数据的最大可航窗口序列生成和最大可航窗口序列约束下的航线生成两个阶段(具体流程如图1所示)。

1)在最大可航窗口序列生成阶段,首先求取碍航区并进行航路点的预生成,然后沿预生成航

路依次进行最大可航窗口的提取,实现最大可航窗口序列的生成。通过最大可航窗口序列来构

成航线生成的可航空间约束,可以在确保航路安全性的前提下提升航线生成的运算效率。

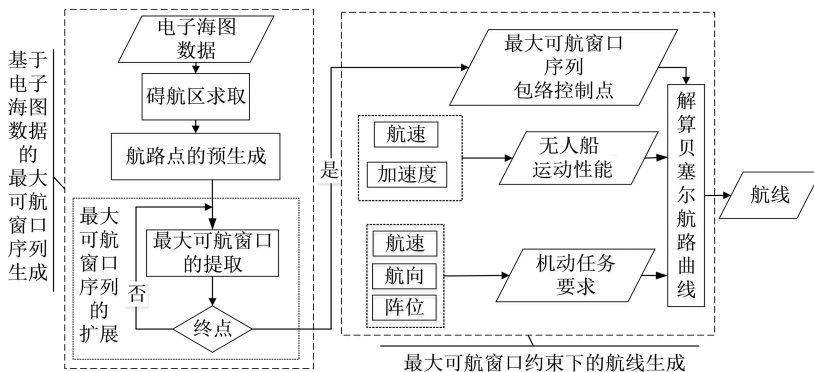


图1 航线规划方法流程图

Fig. 1 Flowchart of Route Planning Method

2)在航线生成阶段,一是将航线规划转换为贝塞尔航路曲线的求解,利用贝塞尔曲线能由其控制点包络区域约束的原理,通过使控制点包含在最大可航窗口序列内来确保航线不穿越碍航区,从而实现空间约束;二是对贝塞尔航路曲线的时间变量求导,通过使一次导小于无人船最大航速、二次导小于无人船最大加速度,来提高航线的可执行性,提升航线可跟踪精度,并通过设定机动任务所需的航向航速和指定位置来为贝塞尔航路曲线求解构建等式约束,从而使规划航线满足自主航行的机动性能要求。

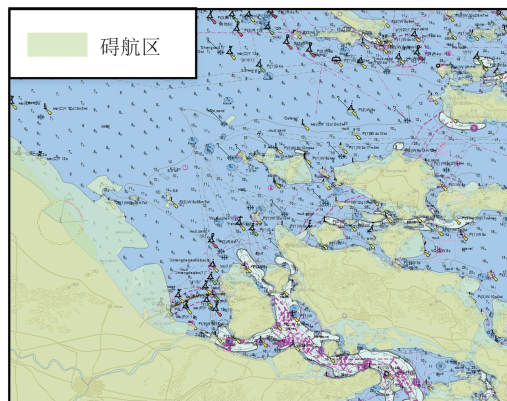


图2 碍航区求取结果图

Fig. 2 Result Diagram of Obstruction Area

## 2 基于电子海图数据的最大可航窗口序列生成

### 2.1 基于电子海图的碍航区求取

碍航区是指影响船舶安全航行的海区,基于电子海图数据的碍航区求取是确保航线规划结果安全性的前提和基础。碍航区主要包括浅水碍航区、人工碍航区和点状碍航区<sup>[11]</sup>。浅水碍航区的提取首先需要根据水深点、岸线和岛礁边界共同构建三角网,然后基于船舶安全吃水提取等深线,进而通过等深线来提取浅水碍航区;人工碍航区则需根据电子海图数据定义类型和任务需要进行提取和处理,如雷区、禁区;点状碍航区要对点状礁石、沉船等进行安全缓冲半径拓展。3类碍航区的并集即为碍航区集,其提取结果示意图如图2所示。

### 2.2 航路点预生成

在当前航线规划算法中,航路二叉树方法计算效率相对较高,因此本文选用该方法预生成航路点。其基本原理是采用测线避碰的方式得出

最短距离航线:如图3(a)所示,设起点为 $S$ ,终点为 $T$ ,碍航区为 $O_1$ 、 $O_2$ ,首先把起点 $S$ 作为当前测试点,与终点 $T$ 连线生成测试线 $ST$ ,通过空间关系检索得到与测试线相交且空间距离最近的碍航区 $O_1$ ;然后,绕行碍航区得到子节点 $P_1$ 、 $P_3$ ,生成航路子二叉树;接下来,分别以子节点 $P_1$ 、 $P_3$ 作为当前测试点,不断重复上述过程,直至子节点与终点 $T$ 之间无碍航区<sup>[11]</sup>。最终可将可行航路建立得到航路二叉树,如图3(b)所示。

以图上几何距离作为节点间权重,通过上述过程得到航路二叉树链表,求得航路点连线权重和最小的航路点作为预生成航路点,将预生成航路点按序依次连线即可构成预生成航路。

### 2.3 最大可航窗口序列的生成

#### 2.3.1 最大可航窗口的提取

1)最大可航窗口的定义。航路窗口是指将预生成航路点依次连线并扩充一定距离后形成的缓冲区,使用航路窗口可减少路径搜索算法纳入计算的节点数量,从而提升算法效率<sup>[17]</sup>。然



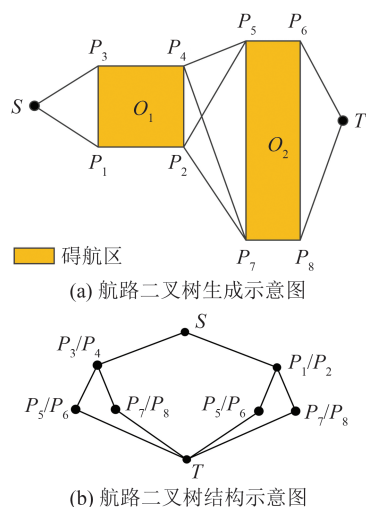


图3 航路二叉树生成及结构示意图

Fig. 3 Route Binary Tree Generation and Structure Diagram

而,这种航路窗口仅能够提取预生成航路周围的等距缓冲区域,与碍航区求差后的可航区域非凸,不满足后续凸优化求解的要求。为此,本文提出了可航窗口的概念。

可航窗口是可以安全航行的矩形区域。可航窗口的设定一方面可以保证窗口里的航路是安全的,另一方面可以过滤窗口外的空间分析判断,从而提高计算效率。

如图4(a)所示,以航路上某点 $O$ 作为起始点,沿预生成航路前进方向 $OP$ 的象限向外拓展可航窗口,遇到碍航区会受到约束。碍航区约束下所能形成的最大矩形区域,为始于点 $O$ 的最大可航窗口。如果此象限没有碍航区(如图4(b)所示),从后续的航路分析判断来说,可航窗口也无需无限拓展,可以人为设定一最大约束值 $R$ ,由此拓展而成的区域称为自约束的最大可航窗口。

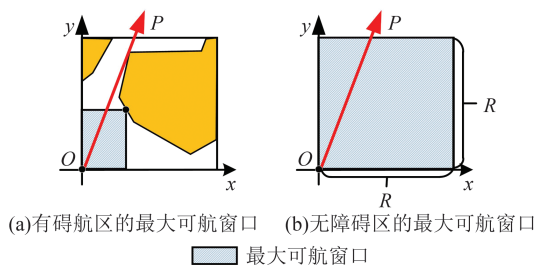


图4 最大可航窗口

Fig. 4 Maximum Navigable Window

碍航区约束和自约束的最大可航窗口,统称为最大可航窗口。自约束的最大可航窗口空间求取非常简单,本文重点分析碍航区约束的最大可航窗口的求取。

## 2) 限制最大可航窗口生成的碍航区约束边

界。为便于描述,在始于点 $O$ 的可航窗口上,定义向外不断拓展的两条边为自由边(如图5(a)箭头所在边)。提取最大可航窗口时,需要考虑碍航区空间约束的多种情形,总体可归结为两类:

(1)如图5(a)所示,矩形的某一自由边 $M$ 从下往上拓展,遇到碍航区的约束区域,边 $M$ 的拓展停止。这种情况下另一自由边的拓展不受影响,如图5(b)所示,可以继续拓展直至遇到自约束边界。

(2)矩形的两条自由边在拓展过程中同时受碍航区某一边约束,如图5(c)所示,这时可航窗口与碍航区相接的顶点还能沿着斜边按两个箭头所示方向滑动。当某自由边遇到碍航区或自约束边界时,拓展停止,如图5(d)所示。

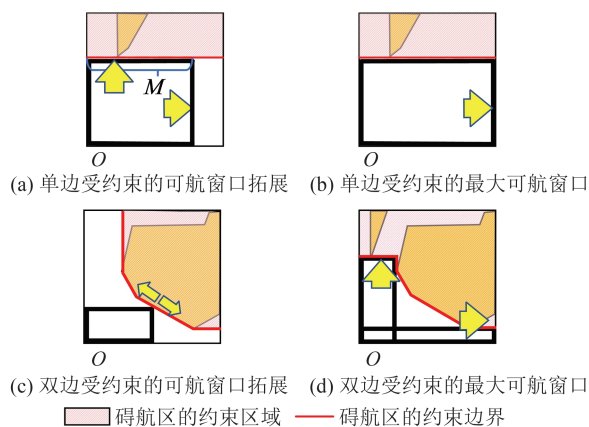


图5 矩形拓展的限制情况分析

Fig. 5 Analysis of Limitation of Rectangle Expansion

因此,定义最大可航窗口生成过程中无法到达的区域为碍航区的约束区域,碍航区约束区域的内侧边界为碍航区的约束边界。

从约束边界的定义可知,最大可航窗口起始顶点 $O$ 所对的矩形顶点(简称对顶点)必然是在碍航区约束边界上。反过来说,若在碍航区约束边界上找到一点,该点和可航窗口的起始顶点 $O$ 作为对角顶点所确定的矩形,与碍航区不相交且面积最大,则该点为最大可航窗口对顶点,该矩形即为所求最大可航窗口,故可通过这一思路对最大可航窗口进行求解。

3)碍航区约束边界的求解。以第一象限为例,将 $O$ 点作为最大可航窗口生成的起始顶点,以距离 $R$ 作为边长,生成一个自约束的最大可航窗口,其与碍航区的交集如图6所示。

为了从图6所示的区域进一步得到碍航区约束边界,首先要找到碍航区上对最大可航窗口拓展有约束关系的边和顶点;然后,根据上述边和



顶点对最大可航窗口拓展的约束关系,得到碍航区约束区域。提取碍航区约束区域的内侧边界即可得到碍航区约束边界。具体流程如下:

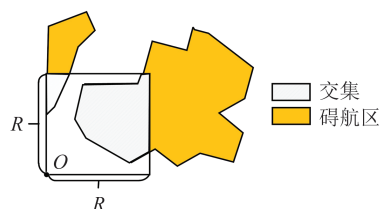


图6 碍航区求交集示意图

Fig. 6 Intersection Diagram of Obstruction Area

(1)首先要找到碍航区上对可航窗口自由边拓展产生影响的边和顶点。因起始顶点 $O$ 与对顶点的连线(即最大可航窗口对角线)必定与碍航区不相交,因此将 $O$ 点与所有碍航区边界顶点进行连线,排除全部与碍航区存在相交关系的碍航区边界顶点,保留所有和 $O$ 连线与碍航区域无相交关系的顶点,以及这些顶点在边界上的连接关系,如图7(a)所示。在第一象限中,斜率为负的斜边能够对最大可航窗口生成形成约束。因此,仅保留斜率为负的斜边,以及斜边上的点;剔除斜率为正的斜边,只保留该类斜边上离起始顶点 $O$ 最近的点。通过上述过程,可以得到碍航区上对最大可航窗口生成产生约束的边和顶点,如图7(b)所示。

(2)碍航区约束边界的生成。对(1)中保留的边和顶点,分别根据图5(a)、5(c)所示的两类约束关系生成碍航区的约束区域,如图7(c)所示。碍航区约束区域的内侧边界即为碍航区的约束边界,此时最大可航窗口的对顶点仅可能位于碍航区的约束边界上。

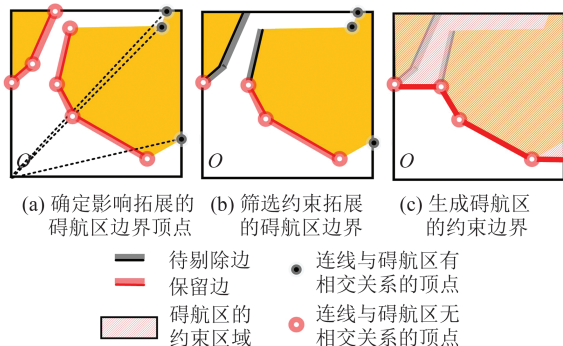


图7 碍航区约束边界的求解示意图

Fig. 7 Solution Diagram of Constraint Boundary in Navigation Obstruction Area

4)基于碍航区约束边界的最大可航窗口提取。最大可航窗口的对顶点仅可能位于碍航区

的约束边界上,因此可通过遍历约束边界上的所有点来提取最大可航窗口。碍航区的约束边界由顶点和斜边构成。顶点的个数有限,遍历较为简单;而斜边上的点有无数个,需要在斜边上找到具有代表性、有限个数的特征点,通过遍历这些点来替代遍历斜边上所有点。

斜边上有代表性的特征点是这条斜边上可以使得矩形面积最大的位置点。如图8所示,设斜边公式为:

$$y = kx + b (m \leq x \leq n) \quad (1)$$

其斜线上任一点 $(x, y)$ 与原点 $O$ 作为对角线所确定的矩形面积为 $S = |xy|$ ,即 $S = |kx^2 + bx|$ 。

根据二次函数的特性,如果 $m \leq -\frac{b}{2k} \leq n$ ,  $x = -\frac{b}{2k}$ ,  $S$ 达到极值;如果 $m \leq -\frac{b}{2k}$ 或 $n \geq -\frac{b}{2k}$ ,则根据二次函数的单调性,斜边上的端点( $x = m$ 或 $x = n$ )与起始点构成的面积最大。

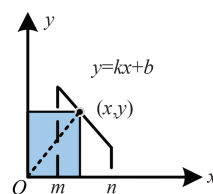


图8 斜边上的最大矩形位置点求取

Fig. 8 Find the Maximum Rectangular Position on the Hypotenuse

### 2.3.2 最大可航窗口序列的扩展

通过前述过程可以提取得到最大可航窗口,接下来需要沿§2.2所述的预生成航路依次扩展最大可航窗口序列,生成最大可航窗口序列。

最大可航窗口序列生成的基本原则为:(1)使最大可航窗口序列沿预生成航路进行拓展;(2)保证相邻最大可航窗口间有一定的重叠面积,以便于后续的航线解算。本文将根据以上原则来分段实现最大可航窗口序列的扩展。

如图9(a)所示,假设无人船从 $A$ 点出发,需航行通过指定位置 $D$ 点后再到达 $E$ 点,则预生成航路具有航段 $AB$ 、 $BC$ 、 $CD$ 、 $DE$ 。如图9(b)所示,从起点位置 $A$ 出发得到一个最大可航窗口,该窗口与航段 $AB$ 相交。接下来,找到窗口上与相交线段夹角最小的边,其长度为 $d_1$ 。从 $A$ 点向 $AB$ 连线方向延伸 $d_1/2$ (也可以是其他小于 $d_1$ 的长度)到 $P_1$ 位置, $P_1$ 位置即是下一个最大可航窗口生成的起始位置。按此方式,在 $AB$ 上递归生

成最大可航窗口,直至生成的最大可航窗口②遇到航段BC起点B位置生成的最大可航窗口①,则航段AB最大可航窗口序列的扩展停止。

最大可航窗口序列在航段BC的扩展与在航段AB的扩展基本相同。如图9(c)所示,从起点位置B出发得到一个最大可航窗口,找到窗口上与BC段夹角最小的边,其长度为 $d_3$ 。从B点向BC连线方向延伸 $d_3/2$ 到 $P_3$ 位置, $P_3$ 位置即是下一个最大可航窗口生成的起始位置。可以看出, $P_3$ 位置处生成的最大可航窗口和下一航段CD起点C位置处生成的最大可航窗口相交,则航段BC最大可航窗口序列的扩展停止。不断重复以上过程,最大可航窗口序列的生成示意图如图9(d)所示。

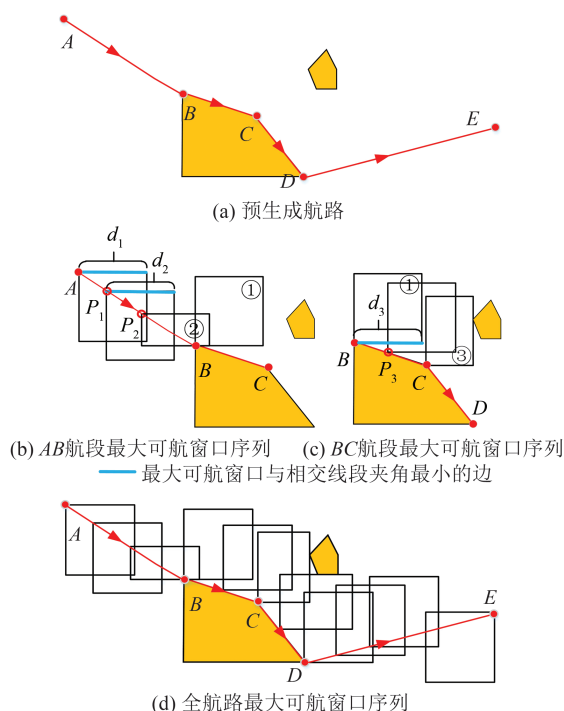


图9 最大可航窗口序列的生成示意图

Fig. 9 Generation Diagram of the Maximum Navigable Window Sequence

值得一提的是,当需要考虑以指定航向通过某指定位置,且该位置处指定航向与航路方向不一致时,需优先向航向所指的象限生成最大可航窗口,为航向变化提供可航空间。

### 3 最大可航窗口序列约束下的航线生成

#### 3.1 无人船运动学模型

为研究无人船运动,本文根据需要分别建立固定于地球的惯性坐标系与固定于船上的运动

坐标系。惯性参考系原点固定于地球椭球面的某位置(通常为船舶起始位置),X轴沿当地纬线指向东,Y轴沿当地子午线指向北,Z轴沿铅垂线指向地心<sup>[18]</sup>。船舶运动具有六自由度,然而在进行航迹跟踪时,只需考虑船舶的纵向、横向和艏向运动即可,其余方向运动对船舶的平面运动影响较小。故本文以船重心为原点建立运动坐标系,纵向速度 $u$ 轴沿船艏方向为正向,横向速度 $v$ 轴沿垂直于船体沿右舷方向为正向,艏摇角速度 $r$ 以右舷方向为正<sup>[18]</sup>。其数学模型中的符号定义如表1所示。

表1 船舶数学模型的符号定义

Tab. 1 Symbol Definition of Ship Mathematical Model

参考系	符号	定义	单位
惯性坐标系	$x$	X轴坐标	m
	$y$	Y轴坐标	m
	$\phi$	艏摇角	rad
运动坐标系	$u$	艏向速度	m/s
	$v$	横向速度	m/s
	$r$	艏摇角速度	rad/s
	$a_u$	船舶方向加速度	rad/s <sup>2</sup>
	$a_v$	船舷方向加速度	rad/s <sup>2</sup>

设定船舶的姿态矢量为 $\eta = [x \ y \ \phi]^T$ ,速度矢量为 $v = [u \ v \ r]^T$ ,由文献[18]可知,船舶的运动学模型为:

$$\begin{cases} \dot{\eta} = R(\phi)v \\ R(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2)$$

式中, $\dot{\eta}$ 为 $\eta$ 的导数。

为在后续实验中通过运动控制来使无人船追踪航线,需要建立船舶的动力学模型,根据文献[19]有:

$$M\dot{v} + C(v)v + D(v)v = \tau + \tau_d \quad (3)$$

式中, $\dot{v}$ 为 $v$ 的导数; $M$ 为惯性矩阵; $C(v)$ 为科里奥利矩阵; $D(v)$ 为阻尼矩阵; $\tau = [\tau_u \ 0 \ \tau_r]^T$ 为控制输入; $\tau_d = [\tau_{d,u} \ \tau_{d,v} \ \tau_{d,r}]^T$ 为外界扰动。

#### 3.2 面向航线生成的贝塞尔曲线控制点解算

##### 3.2.1 贝塞尔航路曲线公式

在二维平面中,贝塞尔曲线 $B(n,t)$ 的方程为:

$$B(n,t) = \sum_{i=0}^n C_k^i (1-t)^{k-i} t^i w_i \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (4)$$

式中, $t$ 是曲线的标准化参数; $k$ 是曲线的阶数; $w_i$ 是其控制点。贝塞尔曲线是插值方程,通过控制

点的插值来生成处于控制点间的值<sup>[20]</sup>。贝塞尔曲线插值生成的示意图如图10(a)所示,在控制点A、B、C构成的直线AB、BC先进行线性插值,然后对插值后对应点(图10(a)虚线相连的点)构成的线段再次进行线性插值,最终这些插值后的点共同构成了贝塞尔曲线,如图10(b)所示。因此,如果能够将控制点包络在最大可航窗口中,则能够保证整条贝塞尔曲线都在可航约束空间内。

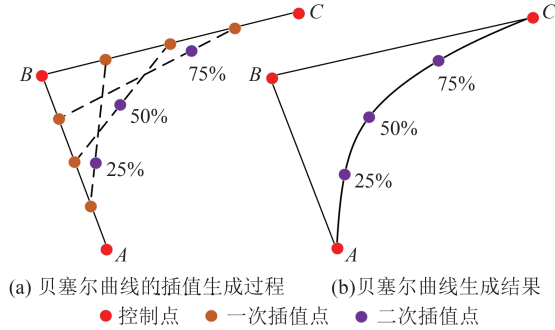


图10 贝塞尔曲线生成示意图

Fig. 10 Diagram of Bezier Curve Generation

根据贝塞尔曲线的定义, $t$ 的范围是 $[0,1]$ ,为了将航线规划问题转化为贝塞尔曲线生成问题,本文对贝塞尔曲线进行了变量代换。若最大可航窗口有 $N$ 个,则贝塞尔航路曲线共有 $N$ 段,可以得到其中第 $j$ 段的贝塞尔航路曲线方程:

$$S_j(n, t) = \sum_{i=0}^n C_n^i \left(1 - \left(\frac{t}{T_j}\right)\right)^{n-i} \left(\frac{t}{T_j}\right)^i w_{j,i} \quad (0 \leq t \leq T_j) \quad (5)$$

式中, $n$ 是贝塞尔航路曲线的次数; $T_j$ 为第 $j$ 段曲线的航行总时间; $w_{j,i}$ 为第 $j$ 段曲线的第 $i$ 个控制点; $t$ 为航路曲线中的时间变量,即无人船在第 $j$ 段曲线运动的时间,是通过将贝塞尔曲线方程式(4)中的 $t$ 代换为 $\frac{t}{T_j}$  ( $0 \leq t \leq T_j$ ) 变量实现的。接下来,可通过约束条件和目标方程来凸优化解算曲线上的各控制点 $w_{j,i}$ ,进而得到各段贝塞尔航路曲线的表达式。

### 3.2.2 航线表达式的解算

1) 空间约束的建立。为确保航线的安全性(不穿越碍航区),需要将贝塞尔航路曲线的控制点包络在各最大可航窗口内,同时根据任务所需确定起点、终点位置。设航线被最大可航窗口分割为 $N$ 段,起点的位置为 $(P_{x0}, P_{y0})$ ,终点的位置为 $(P_{xN}, P_{yN})$ ,最大可航窗口 $j$ 的范围为 $\begin{cases} x_{j\min} \leq x \leq x_{j\max} \\ y_{j\min} \leq y \leq y_{j\max} \end{cases}$ ,则可由起点、终点的位置以及

最大可航窗口约束共同建立空间约束方程:

$$\begin{cases} S_{x1}(n, 0) = P_{x0} \\ S_{y1}(n, 0) = P_{y0} \\ x_{j\min} \leq w_{x,j,i} \leq x_{j\max} (i = 0, 1, 2, \dots, n) \\ y_{j\min} \leq w_{y,j,i} \leq y_{j\max} (i = 0, 1, 2, \dots, n) \\ S_{xN}(n, T_N) = P_{xN} \\ S_{yN}(n, T_N) = P_{yN} \end{cases} \quad (6)$$

这样一来,可以使得规划航线在起点、终点位置能够与无人船运动的实际要求相符,并且将规划航线约束在最大可航窗口的范围内。

2) 连续性约束的建立。一条可执行的航线应当位置、速度都是连续的。为此根据“导数存在必连续”的定理,应使得各段贝塞尔航路曲线在连接位置处的位置、速度、加速度存在且相等。这就要求在各段贝塞尔航路曲线连接位置处增添连续性约束:

$$\begin{cases} S_{x(j-1)}(n, T_{j-1}) = S_{xj}(n, 0) \\ S_{y(j-1)}(n, T_{j-1}) = S_{yj}(n, 0) \\ S_{x(j-1)}(n, T_{j-1})' = S_{xj}(n, 0)' \\ S_{y(j-1)}(n, T_{j-1})' = S_{yj}(n, 0)' \\ S_{x(j-1)}(n, T_{j-1})'' = S_{xj}(n, 0)'' \\ S_{y(j-1)}(n, T_{j-1})'' = S_{yj}(n, 0)'' \end{cases} \quad (7)$$

3) 运动约束的建立。通过对贝塞尔航路曲线的时间变量求导,使其一次导小于无人船最大航速、二次导小于无人船最大加速度,以此来确保规划航线的可执行性,并使得规划航线能够满足机动所需的航向、航速。

可参照文献[21]对无人船的速度、加速度进行限定:

$$\begin{cases} V_{\min} \leq V(t) \leq V_{\max} \\ V_{\min}' \leq V(t)' \leq V_{\max}' \end{cases} \quad (8)$$

式中, $V_{\max}$ 、 $V_{\min}$ 和 $V_{\max}'$ 、 $V_{\min}'$ 分别是最大、最小速度和最大、最小加速度。

为确保规划航线能够达到无人船的机动要求,需要通过设定机动任务所规定起点和终点的航向、航速来为贝塞尔航路曲线求解构建等式约束:

$$\begin{cases} S_{x1}(n, 0)' = v_{x0} \\ S_{y1}(n, 0)' = v_{y0} \\ S_{xN}(n, T_N)' = v_{xN} \\ S_{yN}(n, T_N)' = v_{yN} \end{cases} \quad (9)$$

式中, $(v_{x0}, v_{y0})$ 是起点速度; $(v_{xN}, v_{yN})$ 是终点速度。

4) 各段贝塞尔航路曲线的航行时间预分配。



在求解各段贝塞尔航路曲线控制点的过程中,式(5)中各段航路曲线的航行时间需要为已知量才能保证可解,因此要对各段的航行时间进行预分配<sup>[22-23]</sup>。

整体航行时间的确定是各段航行时间确定的基础,分为人为设定和自动生成两种方式。人为设定是指根据任务所需,人为规定航行开始和结束的时间。自动设定的方式首先是根据预生成航路长度对无人船的总路程 $S$ 进行预估,然后可按照文献[24]的方法,依据起点速度、终点速度以及巡航航速来计算无人船航行通过总路程 $S$ 所需的时间 $T$ ,作为预估的总时间。

总时间的合理设定是使得后续时间分配合理的重要前提。人为设定的总时间需顾及无人船的可执行能力,使得无人船能够在该段时间内通过航段。如果无人船在分配的时间内无法通过对应的航段,则时间分配是不合理的,这会导致后续解算不到可行解。

在整体航行时间 $T$ 预估完成后,接下来为各段贝塞尔航路曲线分配航行时间。最大可航窗口与各段贝塞尔航路曲线是一一对应的,并且贝塞尔曲线的两个端点必定在相邻最大可航窗口的交集区域内,根据这个关系,本文对各段曲线进行了时间预分配。如图 11 所示, $P_1$ 为起点位置, $P_9$ 为终点位置, $P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8$ 为相邻最大可航窗口相交部分的中点位置。可航窗口①~⑧所对应的贝塞尔航路曲线分配的航行时间为:

$$T_i = T \times \frac{P_i P_{i+1}}{\sum_{i=1}^8 P_i P_{i+1}} \quad (10)$$

式中, $T_i$ 是第 $i$ 段贝塞尔航路曲线分配的时间; $P_i P_{i+1}$ 是 $P_i$ 到 $P_{i+1}$ 的线段长度。

各段分配到的预估航行时间无需非常精准,处于图 11 相邻最大可航窗口相交区域各段的贝塞尔航路曲线的端点,在使用凸优化方法进行直接解算时,会根据时间分配在该区域内自适应调整位置,弹性变化曲线长度,使该段航路规划出的贝塞尔航路曲线长度与分配到的时间相契合。由于本文将以上内容都涵盖在了约束方程中,通过凸优化方法对贝塞尔航路曲线进行了直接解算,所以是不需要多次迭代计算的。

5) 目标函数的确立。通过§3.2.2的1)、2)、3)过程,本文构造了无人船航线生成的空间、运动双约束方程组,以及连续性的约束方程。接下来,需要确立航线求解的目标函数。变加速度是

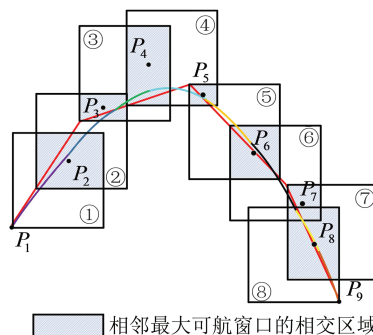


图 11 分段贝塞尔运动曲线的时间分配示意图

Fig. 11 Time Distribution of Piecewise Bezier Motion Curve

加速度对时间的导数,即加速度的变化率,通过调整变加速度可以有效平滑运动,降低运动控制的难度,在允许范围内生成一条平滑的运动曲线<sup>[22,25]</sup>。因此,本文将整体变加速度最小作为航线生成的目标函数。根据文献[26],5阶曲线方程实现运动平滑的效果最好,因此本文将贝塞尔航路曲线设定为5阶。要使整体变加速度最小,需令 $N$ 段贝塞尔航路曲线整体的变加速度平方和 $J(S)$ 最小,可表示为:

$$\min J(S) = \min \sum_{j=1}^N \int_0^{T_j} (S_j(5, t)''')^2 dt \quad (11)$$

式中, $T_k$ 表示第 $k$ 段贝塞尔航路曲线所分配的时间。为计算式(11),可先对各段贝塞尔航路曲线的变加速度平方和进行化简。设贝塞尔航路曲线在第 $j$ 段的多项式系数向量为 $s_j = [s_{j,0} \ s_{j,1} \ s_{j,2} \ s_{j,3} \ s_{j,4} \ s_{j,5}]$ ,则第 $j$ 段贝塞尔航路曲线的变加速度平方和可表示为:

$$\begin{aligned} \int_0^{T_j} (S_j(5, t)''')^2 dt &= \int_0^{T_j} (as_j)^T (as_j) dt = \\ &= \int_0^{T_j} s_j^T (aa^T) s_j dt = \\ &= s_j^T \int_0^{T_j} (aa^T) dt s_j \end{aligned} \quad (12)$$

式中, $a = [0 \ 0 \ 0 \ \frac{6}{T_j^3} \ \frac{24t}{T_j^4} \ \frac{60t^2}{T_j^5}]$ ,是贝塞尔航路曲线中的向量 $[1 \ \frac{t}{T_j} \ (\frac{t}{T_j})^2 \ (\frac{t}{T_j})^3 \ (\frac{t}{T_j})^4 \ (\frac{t}{T_j})^5]$ 三次求导后得到的。

设 $Q_j = \int_0^{T_j} (aa^T) dt$ ,则:

$$\int_0^{T_j} (S_j(5, t)''')^2 dt = s_j^T Q_j s_j \quad (13)$$

可以通过矩阵计算得到 $Q_j$ 是一个实对称矩阵。因此, $N$ 段贝塞尔航路曲线整体变加速度平方和 $J(S)$ 的最小值可以根据式(13)表示为:

$$\begin{aligned} \min J(S) &= \min \sum_{j=1}^N \int_0^{T_j} (S_j(5, t))^2 dt = \\ &= \min \sum_{j=1}^N s_j^T Q_j s_j = \\ &= \min [s_1^T \quad \cdots \quad s_N^T] \begin{bmatrix} Q_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & Q_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_N \end{bmatrix} = \\ &= \min s^T Q s \end{aligned} \quad (14)$$

这样一来,就将目标函数  $\min J(S)$  表示为贝塞尔航路曲线系数向量  $s = [s_1 \ s_2 \ \cdots \ s_j \ \cdots \ s_N]$  的二次型,因为  $Q_j$  是实对称矩阵,故矩阵  $Q$  为正定矩阵。并且可以通过贝塞尔航路曲线系数向量与贝塞尔航路曲线控制点向量的转换矩阵,将目标函数  $\min J(S)$  表示为贝塞尔航路曲线控制点向量的二次型。

6) 凸优化求解贝塞尔航路曲线。凸优化问题中二次规划的标准形式为<sup>[27]</sup>:

$$\min f(x) = x^T Q x \quad \text{s.t.} \quad Ax \leq b \quad (15)$$

式中,  $\min f(x)$  为二次项形式的目标函数;  $Ax \leq b$  为约束矩阵方程。

式(14)可以构成二次规划求解的目标函数矩阵,式(6)、式(7)、式(8)和式(9)可以共同构成约束矩阵方程。且因为式(14)中的  $Q$  为一个正定的矩阵,故根据二次规划问题的存在性定理,存在全局最优解。因此可以将本文中的目标函数矩阵和约束函数矩阵,作为函数参数输入二次规划解算函数 quadprog,即可得到各段贝塞尔曲线的多项式系数,以及各段贝塞尔曲线的所有控制点。具体的二次规划求解过程可见文献[27]。

## 4 无人船自主航行航线规划实验与分析

为验证所提方法的有效性,本文选用目前已顾及转向限制的改进航路二叉树航线规划算法(文献[15])作为对比方法,并分别设置了仿真实验与实船实验。仿真实验主要侧重对本文方法所规划航线提高无人船跟踪控制精度的能力进行检验;考虑到无人船穿行碍航区可能对船舶造成损坏,故实船实验仅针对本文所提方法的机动规划能力。

### 4.1 仿真实验

为了对比本文方法与改进航路二叉树方法的航迹跟踪效果,分别用以上两种方法生成航线,通过反步法进行航迹跟踪;为模拟无人船自

主航行通过狭水道,并以指定航向航速到达机动目标位置的特定任务,在实验中对无人船航行的起点位置、目标点位置及对应的航向、航速进行设定。

仿真实验选用海图 C1313300 作为基础数据,并预设了 3 m 的无人船安全吃水求得碍航区。设定无人船最大航速为 15 m/s,其正常巡航速度为 12 m/s,算法最大可航窗口的最大限制值设定为 100 m × 100 m (非特定值,推荐选取船舶最大转向半径的 5~10 倍作为最大限制值)。

反步法的动力学方程根据 §3.1 进行设定,其

$$\begin{aligned} \text{惯性矩阵 } M &= \begin{bmatrix} 25.8 & 0 & 0 \\ 0 & 33.8 & 0 \\ 0 & 0 & 6.2 \end{bmatrix}, \text{ 阻尼矩阵} \\ D &= \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \text{ 起始点与目标点的航向航速} \end{aligned}$$

及位置设定见表 2。

表 2 仿真实验参数设定

航路阶段	位置	航向/(°)	航速/(m·s <sup>-1</sup> )
起点	122.225 756 63°E 30.334 481 694°N	0	0
中间航路			≤ 15
终点	122.237 134 50°E 30.288 980 189°N	135	7.2

图 12(a)对改进二叉树方法所规划的航线与本文方法所规划的航线进行了全局显示,区域 A、B 是在航线上任意选取的两个转向位置,图 12(b)、图 12(e)分别是区域 A、B 的放大显示。为更清晰地看到对规划航线进行航迹跟踪的仿真情况,对区域 A 的①、②和区域 B 的③、④进行了进一步的放大显示,分别如图 12(c)、图 12(d)、图 12(f)和图 12(g)所示。

从图 12(c)、12(f)中可以看出,因为改进航路二叉树方法所规划航线在转向点处是折线式的,曲率不连续,因此转向时航迹跟踪难以按照规划航线进行,并且出现了穿越碍航区的情况,这也导致了航迹跟踪与规划航线在这些位置处产生了偏离;而从图 13(b)、13(d)、13(e)、13(g)可以看出,本文方法充分考虑了无人船转向的曲率变化限制,在转向位置附近规划逐渐转向的航线,使得航迹跟踪结果基本与规划航线一致,偏离程度较小。为进一步对本文方法与改进航路二叉树方法生成航线在航路关键位置的跟踪控制精

度进行数值化分析,对转向位置(含起点)前后 30 m 航线的横向、纵向跟踪误差的最大值和方差进行了统计,如表 3 所示。从表 3 中可以看出,用本文方法生成航线进行航迹跟踪的横向、纵向最

大误差以及方差,明显小于用改进航路二叉树方法进行航迹跟踪的值。这表明本文方法能够有效地减小无人船在转向位置航迹跟踪的震荡,明显提高无人船的跟踪控制精度。

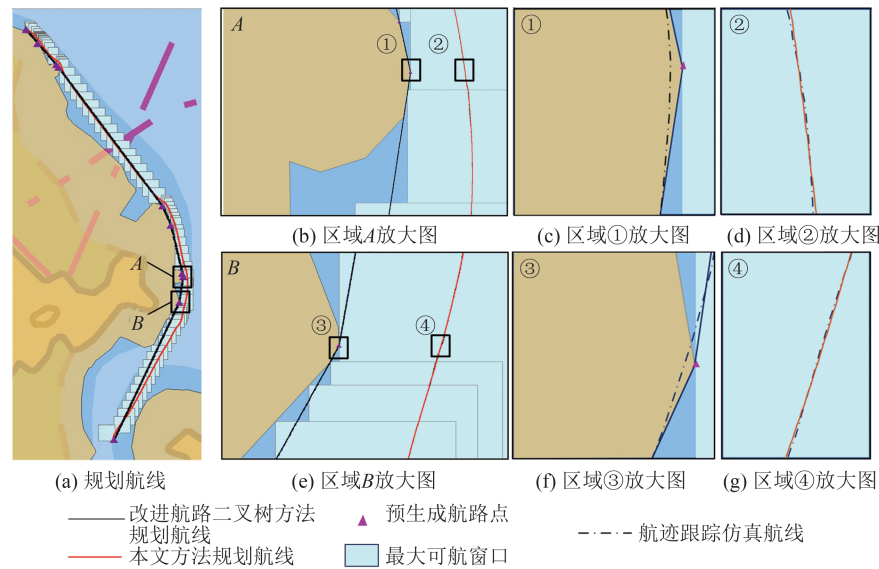


图 12 航线规划及航迹跟踪仿真结果

Fig. 12 Simulation Results of Trajectory Planning and Tracking

表 3 仿真实验结果精度

Tab. 3 Accuracy of Simulated Experimental Results

方法	最大误差/m		方差/m <sup>2</sup>	
	横向	纵向	横向	纵向
改进航路二叉树	6.608 93	-6.948 03	4.737 5	3.712 4
本文方法	1.946 24	-1.967 50	0.706 6	0.922 0

4.2 实船实验

为了进一步验证本文方法对无人船自主航行机动的规划能力,并检验其在真实电子海图平台下对实船的适用性,本文以电子海图 C1511381 作为实验基础数据,以某型无人船作为实验船开展实船实验,该船的巡航航速为 1.7 m/s,最大航速为 2 m/s。实验按 2.5 m 的无人船安全吃水求取碍航区,其提取结果如图 13 所示,碍航区设置了 30% 的透明度叠置到海图上,红色虚线框内为实验区域。

不失一般性,实验预设为:无人船从点  $P_1$  出发,以特定任务所需航向、航速自主航行通过指定位置  $P_2$ 、 $P_3$  到达  $P_4$ ,具体实验参数如表 4 所示。无人船沿本文方法生成的航线进行自主巡航,图 14 为无人船航行轨迹结果数据在电子海图平台上的显示结果。无人船从  $P_1$  到  $P_2$  航行过程中的航速、航向变化如图 15(a) 所示;从  $P_2$  到  $P_3$  航行过程中的航速、航向变化如图 15(b) 所示;从  $P_3$  到  $P_4$  航行过程中的航速、航向变化如图 15(c) 所示。

无人船到达  $P_2$ 、 $P_3$  和  $P_4$  位置的航速、航向结果统计如表 5 所示。

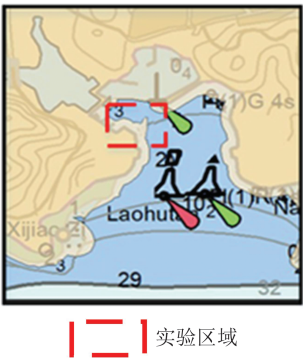


图 13 实验区域示意图

Fig. 13 Schematic Diagram of the Experimental Area

表 4 实船实验目标参数设定

Tab. 4 True Experimental Parameters Settings

序号	位置点号	经纬度	航向/(°)	航速/(m·s <sup>-1</sup> )
1	起点 $P_1$	121.675°E 38.871°N	90.0	1.000
2	$P_2$	121.677°E 38.871°N	45.0	1.432
3	$P_3$	121.678°E 38.871°N	180.0	1.500
4	终点 $P_4$	121.678°E 38.869°N	180.0	0.500



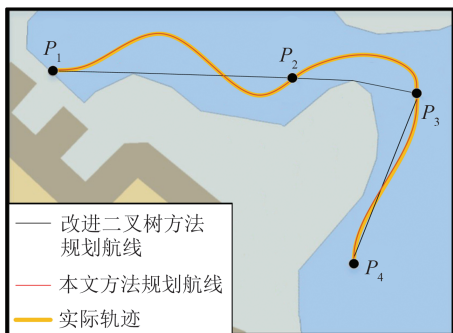


图 14 实船巡航结果

Fig. 14 Results of Real Ship Cruise

结合图 14 和图 15(a)可以看出,在无人船从  $P_1$  航行到  $P_2$  的过程中,首先以  $90^\circ$  左右的航向从

$P_1$  位置出发,通过向左舷转向避开碍航区,然后右舷转向向目标点驶去,最后在接近目标点位置处向左舷转向,使得无人船能够按表 5 所示的  $40.7^\circ$  的航向、 $1.33\text{ m/s}$  的航速到达  $P_2$ ;结合图 14 和图 15(b)可以看出,在无人船从  $P_2$  航行到  $P_3$  的过程中,无人船通过逐渐向右舷方向转向,基本按照设定的航向、航速到达  $P_3$ ;结合图 14、图 15(c)可以看出,在无人船从  $P_3$  航行到  $P_4$  的过程中,首先通过右舷小幅度转向  $24^\circ$  航向目标点,然后在到达  $P_4$  位置前提前向左舷转向驶向目标,从表 5 中可以看出,按  $185.3^\circ$  的航向、 $0.42\text{ m/s}$  的航速到达  $P_4$  位置。

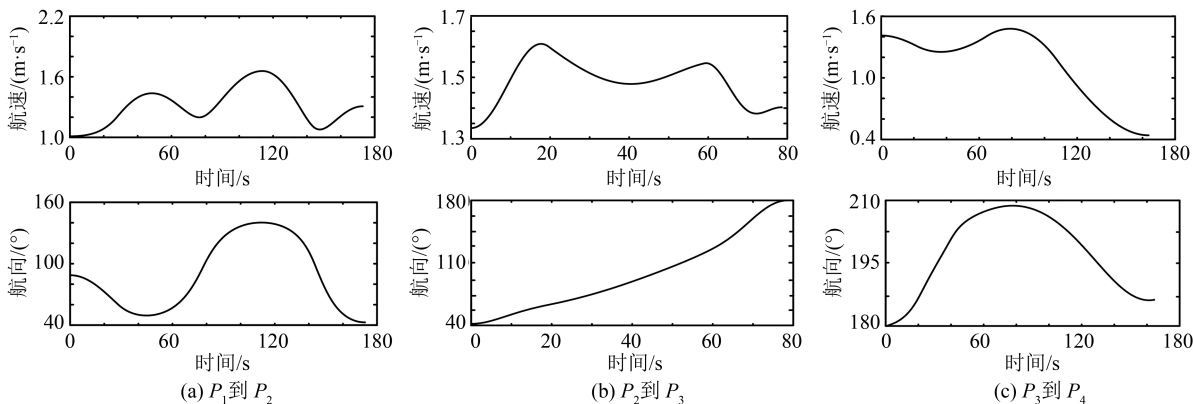


图 15 实船实验航速航向变化曲线

Fig. 15 Experimental Ship Speed Course Change Curve

表 5 实船实验结果

Tab. 5 True Experimental Results

位置点号	实际航向 / $^\circ$	目标航向 / $^\circ$	航向差值 / $^\circ$	实际航速 / $(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	目标航速 / $(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	航速差值 / $(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$
$P_2$	40.7	45	-4.3	1.33	1.432	-0.102
$P_3$	178.7	180	-1.3	1.41	1.500	-0.090
$P_4$	185.3	180	5.3	0.42	0.500	-0.080

结合表 4 实验航向设定与表 5 实验结果的航向数据可以看出,无人船沿本文所提方法所规划航线自主航行到达  $P_2$ 、 $P_3$  和  $P_4$  位置的实际航向分别为  $040.7^\circ$ 、 $178.7^\circ$  和  $185.3^\circ$ ,基本与实验设定的到达航向  $45^\circ$ 、 $180^\circ$  和  $180^\circ$  相吻合。这说明本文方法能够规划航线使无人船通过逐渐转向调整到目标航向,引导无人船以特定任务所需航向自主航行通过指定位置,这是现有的改进航路二叉树方法所难以做到的。

结合表 4 实验航速设定与表 5 实验结果的航速数据可以看出,无人船沿本文所提方法规划出的航线航行到达  $P_2$ 、 $P_3$  和  $P_4$  位置的实际航速分别为  $1.33\text{ m/s}$ 、 $1.41\text{ m/s}$  和  $0.42\text{ m/s}$ ,与表 4 中实验

设定的  $1.432\text{ m/s}$ 、 $1.5\text{ m/s}$  和  $0.5\text{ m/s}$  到达航速基本吻合。这是由于本文方法提供给自主航行模块控制器的规划航线顾及了航速规划的加密规划点,并为无人船规划了加密点间的航行时间间隔,从规划的角度间接实现了对无人船航速的控制。这说明本文方法能够引导无人船以特定任务所需航速自主航行通过指定位置,这是现有的改进航路二叉树方法所难以做到的。

## 5 结 语

本文提出了一种最大可航窗口序列约束贝塞尔曲线的无人船自主航行航线规划方法,能够有效顾及船舶运动约束来规划航线,提高了无人

船在转向点附近执行规划航线的精度;还可以引导无人船按所需的航向、航速自主航行通过指定位置序列,可满足无人船到达指定位置等任务的需求。

当然,本文所提方法还只是通过具有代表性的简单场景来验证,更完善的实验特别是真正执行特定任务的效果检验还有待于以后进一步进行。且相较现有的航路二叉树方法,本文方法因规划航线时顾及的因素较多,使得步骤相对复杂,计算开销有一定增长,如何优化方法将是后续研究工作的重点。同时,所考虑的海洋环境条件还相对简单,如何考虑更复杂海况对无人船航线规划的影响,也有待进一步研究。

### 参 考 文 献

- [1] Han P, Yang X. Big Data-Driven Automatic Generation of Ship Route Planning in Complex Maritime Environments [J]. *Acta Oceanologica Sinica*, 2020, 39(8):113-120.
- [2] Mannarini G, Carelli L. VISIR-I. b: Waves and Ocean Currents for Energy Efficient Navigation[J]. *Geoscientific Model Development Discussions*, 2019 (1):1-47.
- [3] Pan Wei, Dong Qilin, Xu Xiaowei, et al. Route Planning of Intelligent Ships Considering Navigation Environment Factors[J]. *Journal of Shanghai Maritime University*, 2021, 42(3):76-84. (潘伟,董其林,许小卫,等.考虑通航环境因素的智能船舶航线规划[J].上海海事大学学报,2021,42(3):76-84.)
- [4] Pan Mingyang, Liu Yisai, Li Qi, et al. Improved A\* Algorithm Based Route Planning and Its Application for Inland Waterway Network[J]. *Journal of Shanghai Maritime University*, 2020, 41(1):40-45. (潘明阳,刘乙赛,李琦,等.基于改进A\*算法的内河水网航线规划及应用[J].上海海事大学学报,2020,41(1):40-45.)
- [5] Chen Xiao, Dai Ran, Chen Changyuan. Navigation Route Planning with Maklink Graph and Ant Colony Algorithm[J]. *Navigation of China*, 2017, 40(3):9-13. (陈晓,戴冉,陈昌源.基于Maklink图和蚁群算法的航线规划[J].中国航海,2017,40(3):9-13.)
- [6] Zhang Lihua. Theory and Method of Automatic Route Generation Based on Electronic Navigation Chart[M]. Beijing: Science Press, 2011. (张立华.基于电子海图的航线自动生成理论与方法[M].北京:科学出版社,2011.)
- [7] Zhang Lihua, Zhu Qing, Zhang Anmin, et al. An Intelligent Method for the Shortest Routing[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2008, 37(1):114-120. (张立华,朱庆,张安民,等.一种智能的最短航线构建方法[J].测绘学报,2008,37(1):114-120.)
- [8] Wang Zhu, Li Shujun, Zhang Lihua, et al. A Method for Automatic Routing Based on Route Binary Tree [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2010, 35(4):407-410. (汪柱,李树军,张立华,等.基于航路二叉树的航线自动生成方法[J].武汉大学学报(信息科学版),2010,35(4):407-410.)
- [9] Cao Hongbo, Zhang Lihua, Jia Shuidong, et al. An Improved Method for Automatically Building Shortest Route Based on Electronic Chart[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2011, 36(9):1107-1110. (曹鸿博,张立华,贾帅东,等.电子海图最短距离航线自动生成的改进方法[J].武汉大学学报(信息科学版),2011,36(9):1107-1110.)
- [10] Zhang Lihua, Su Fenzhen, Peng Rencan, et al. A Method for the Shortest Time Routing Based on an Instantaneous Depth Model[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2010, 39(5):516-521. (张立华,苏奋振,彭认灿,等.基于瞬时水深模型的最短时间航线自动生成算法[J].测绘学报,2010,39(5):516-521.)
- [11] Zhang Lihua, Dai Zeyuan, Jia Shuidong. Improved Method for Route Generation Based on Chart Fusion [J]. *Journal of Harbin Engineering University*, 2019, 40(6):1090-1097. (张立华,戴泽源,贾帅东.融合多幅海图的航线自动生成改进方法[J].哈尔滨工程大学学报,2019,40(6):1090-1097.)
- [12] Lü Jintao, Liu Zhiqiang, Wang Na. Method for Automatic Ship Routing Based on Route Stack [J]. *Journal of Computer Applications*, 2018, 38(S1):16-19. (吕锦涛,刘志强,王娜.基于航路堆栈的航线自动生成方法[J].计算机应用,2018,38(S1):16-19.)
- [13] Liu Y, Wang H, Xie J. Global Path Planning Method Based on Geometry Algorithm in a Strait Environment [C]//IEEE 2010 International Conference on Electrical and Control Engineering, Wuhan, China, 2010.
- [14] Li Gaixiao, Lü Cheng, Peng Rencan, et al. A Rapid Path Planning Algorithm Based on the Bilateral Convex-Hull Expanding Model[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2021, 46(1):58-64. (李改肖,吕程,彭认灿,等.一种利用双侧凸包扩张模型的路径快速规划算法[J].武汉

- 大学学报(信息科学版), 2021, 46(1):58-64.)
- [15] Wang Tao, Zhang Lihua, Peng Rencan, et al. Automatic Generation of the Shortest Route of an Electronic Navigational Chart Considering Turning Restrictions[J]. *Journal of Harbin Engineering University*, 2016, 37(7):923-929. (王涛, 张立华, 彭认灿, 等. 考虑转向限制的电子海图最短距离航线自动生成方法[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2016, 37(7):923-929.)
- [16] Zhang Shukai, Liu Zhengjiang, Zhang Xianku, et al. Development and Prospect of Unmanned Ships[J]. *World Shipping*, 2015, 38(9):29-36. (张树凯, 刘正江, 张显库, 等. 无人船艇的发展及展望[J]. 世界海运, 2015, 38(9):29-36.)
- [17] Dai Zeyuan. Theory and Method of Ship Route Automatic Planning Driven by Ocean Spatio-Temporal Big Data[D]. Dalian: Dalian Naval Academy, 2020. (戴泽源. 海洋时空大数据驱动的舰船航线自动规划理论与方法[D]. 大连:大连舰艇学院, 2020.)
- [18] Sheng Zhenbang, Liu Yingzhong. Principles of Naval Architecture[M]. Shanghai: Shanghai Jiaotong University Press, 2004. (盛振邦, 刘应中. 船舶原理[M]. 上海:上海交通大学出版社, 2004.)
- [19] Mccue L. Handbook of Marine Craft Hydrodynamics and Motion Control[J]. *IEEE Control Systems*, 2016, 36(1):78-79.
- [20] Farin G E. Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design [M]. San Diego: Academic Press, 1988.
- [21] Zhang X, Wang C, Chui K, et al. A Real-Time Collision Avoidance Framework of MASS Based on B-Spline and Optimal Decoupling Control[J]. *Sensors*, 2021, 21(14):4911.
- [22] Liu S, Watterson M, Mohta K, et al. Planning Dynamically Feasible Trajectories for Quadrotors Using Safe Flight Corridors in 3-D Complex Environments[J]. *IEEE Robotics & Automation Letters*, 2017, 2(3):1688-1695.
- [23] Gao F, Shen S. Online Quadrotor Trajectory Generation and Autonomous Navigation on Point Clouds [C]//IEEE International Symposium on Safety, Lausanne, Switzerland, 2016.
- [24] Richter C A, Bry A P, Roy N. Polynomial Trajectory Planning for Aggressive Quadrotor Flight in Dense Indoor Environments[J]. *Robotics Research*, 2016(1): 649-666.
- [25] Bosetti P, Lio M D, Saroldi A. On the Human Control of Vehicles: An Experimental Study of Acceleration [J]. *European Transport Research Review*, 2014, 6(2):157-170.
- [26] Shadmehr R, Wise S P. The Computational Neurobiology of Reaching and Pointing[M]. Cambridge: The MIT Press, 2005.
- [27] Boyd S, Vandenberghe L. Convex Optimization [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.