引文格式:邓凯亮,黄谟涛,吴太旗,等.利用高阶径向导数带限模型进行重力向下延拓计算[J].武汉大学学报(信息科学版),2024,49(3):442-452.DOI:10.13203/j.whugis20210630

Citation:DENG Kailiang,HUANG Motao,WU Taiqi,et al.Downward Continuation of Gravity Using the Band-Limited Models for High-Order Radial Derivatives of Gravity Anomaly[J].Geomatics and Information Science of Wuhan University,2024,49(3):442-452.DOI:10.13203/j.whugis20210630

利用高阶径向导数带限模型进行重力向下延拓计算

邓凯亮[1]　黄谟涛[1,2]　吴太旗[1]　王伟平[2,3]　欧阳永忠[2]　陈　欣[1]
熊　雄[1]　刘　敏[4]　王　许[1]

1　海军研究院,天津,300061
2　自然资源部海洋环境探测技术与应用重点实验室,广东　广州,510300
3　国家海洋局南海调查技术中心,广东　广州,510300
4　91001部队,北京,100830

摘　要:泰勒级数展开是实施位场向下延拓解算的主要方法之一。该方法的有效性主要取决于位场延拓参量各阶垂向(或径向)偏导数的求取精度及其可靠性。为了避免使用封闭解析核函数在球边界面出现奇异性带来的不确定性问题,依据各类重力观测经滤波处理后均表现为一类有限频谱带宽信号的特点,提出将地球外部重力异常泊松积分式的核函数表示为球谐级数展开式,并将其截断为与重力观测值频谱范围相一致的带限求和式,进而通过直接求导方法,推导得到一组与带限核函数相对应的重力异常高阶径向导数带限计算公式,同时对该组公式进行了实用性改化,并将其应用于重力异常向下延拓泰勒级数展开式计算。使用超高阶地球位模型EGM2008设计两个阶段的数值计算检验方案,分别对重力异常高阶径向偏导数带限模型及其泰勒级数展开向下延拓模型的计算精度进行了检核评估,表明新模型具有良好的可靠性和有效性,在解算稳定性和计算精度两个方面都优于其他同类模型。

关键词:重力向下延拓;高阶径向导数;带限模型;封闭解析核函数;球谐级数展开截断式;泰勒级数展开

中图分类号:P229　　**文献标识码**:A　　**收稿日期**:2022-05-22

DOI:10.13203/j.whugis20210630　　**文章编号**:1671-8860(2024)03-0442-11

Downward Continuation of Gravity Using the Band-Limited Models for High-Order Radial Derivatives of Gravity Anomaly

DENG Kailiang[1]　*HUANG Motao*[1,2]　*WU Taiqi*[1]　*WANG Weiping*[2,3]　*OUYANG Yongzhong*[2]
CHEN Xin[1]　*XIONG Xiong*[1]　*LIU Min*[4]　*WANG Xu*[1]

1　Naval Research Institute, Tianjin 300061, China
2　Key Laboratory of Marine Environmental Survey Technology and Application, Ministry of Natural Resources, Guangzhou 510300, China
3　South China Sea Marine Survey and Technology Center, State Oceanic Administration, Guangzhou 510300, China
4　91001 Troops, Beijing 100830, China

Abstract: **Objectives:** Taylor series expansion is often used in the downward continuation of potential field, and its performance depends on the accuracy and reliability of vertical partial derivatives or radial partial derivatives (RPDs) of potential field parameters. **Methods:** In order to avoid the singularity on spherical boundary and the uncertainty to the computational results by using the closed analytic kernel function to solve the partial derivative, first, this paper considers the fact that all kinds of gravity observations behave as a type of limited spectrum bandwidth signal after being filtered, and proposes to express the kernel function of the Poisson integral for the external gravity anomaly by a spherical harmonic series expansion,

---

基金项目:国家自然科学基金(42174013,41804011,41774021);国家重点研发计划(2016YFB0501704,2016YFC0303007);军队基础研究计划(2019-JCJQ-ZD-017,2020-JCJQ-ZD-139)。

第一作者:邓凯亮,博士,高级工程师,主要从事海洋重力场理论方法研究。dengkailiang036@163.com

which is truncated into a band-limited summation with the same spectrum range as the gravity observation. Then, we derive a set of band-limited formulas to calculate the high-order RPDs, which are modified and applied to the downward continuation of the gravity anomaly by Taylor series expansion. **Results and Conclusions:** The formulas are validated using the ultra-high-degree geopotential model EGM2008 by a two-stage procedure. The numerical tests of the band-limited formulas and the Taylor series expansion downward continuation model show that the proposed band-limited formulas have good reliability and validity, and are superior to other models in terms of stability and accuracy.

Key words: downward continuation of gravity; highly-order radial derivatives; band-limited model; closed analytical kernel function; truncated series expansion of spherical harmonic function; Taylor series expansion

重力向下延拓主要有三个方面的重要应用:一是卫星和航空重力测量数据向地面基准面的归算,用于建立统一的重力场数值模型[1-4];二是地面观测数据向地球内部靠近位场源体的归算,以增强地球内部浅层质量分布异常的映射强度,提高位场数据解释推断的可靠性[5-6];三是地面观测数据向大地水准面的归算,以求解大地测量边值问题[1,7-10]。因位场向下延拓在数学上属于典型的不适定反问题,其延拓算子对高频噪声有明显的放大作用,故其解算结果很容易受到观测噪声的干扰而偏离正确的问题解[5,8]。

针对此问题,学者们提出了许多富有成效的处理方法,主要归纳为三种类型[11-12]:第一类是直接求逆法,通过迭代、非迭代、快速傅里叶变换(fast Fourier transform,FFT)等计算方法,求取逆泊松积分方程的数值解。因求逆过程必定会引起数值解算不稳定性问题,此类方法必须通过采用不同形式的正则化算法来提高数值解算的稳定性[2,13-14];第二类是间接求逆法,包括最小二乘配置法[1]、等效源方法[15-16]、多尺度边缘分解法[17]和矩谐分析法[18]等,此类方法虽然避开了直接求逆泊松积分方程的困难,但仍涉及矩阵求逆过程,因此也不可避免地存在不稳定性问题;第三类统称为非求逆法,包括联合使用超高阶位模型和地形信息确定向下延拓改正数的差分补偿法[19-20]、基于位场观测数据有限频谱带宽的直接积分法[9,21-22]、基于重力观测数据随机特性的谱组合法[23]以及基于泰勒级数展开的解析延拓法[1,24]。精确求取位场各阶垂向偏导数是运用泰勒级数展开延拓法的关键,文献[1]基于物理大地测量理论推出了重力异常高阶径向偏导数的递推计算式;文献[5]提出了基于组合二阶垂向偏导数的泰勒级数延拓模型;文献[25]提出了在频率域通过迭代计算确定垂向偏导数的方法;文献[26]将该迭代计算法推广到空间域;文献[27-28]基于中值定理数值解公式,推导出不同形式的泰勒级数延拓计算模型;文献[12]提出了基于向上延拓信息的泰勒级数向下延拓方法;文献[29]依据同样的原理建立了位场向下与向上延拓值的关系式。从已有研究成果可以看出,泰勒级数延拓模型在计算稳定性和计算精度两个方面都显示出一定的优越性,但通过迭代方法计算高阶垂向偏导数同样存在一定的不确定性[5,29],利用向上延拓计算值推算垂向偏导数或直接计算向下延拓值的做法,在抑制观测噪声的同时,也可能同时剔除了有用的位场观测高频信息[12],如何平衡两者之间的关系,是值得进一步探讨的问题。文献[30]依据外部调和函数满足泊松积分关系式,推出重力异常从一阶至九阶的径向偏导数积分计算式,通过仿真计算发现计算值与比对基准值存在较大偏差,因此该组公式的理论严密性和实用有效性有待进一步论证。相比封闭解析核函数,以球谐级数展开表达的核函数不仅在重力场频谱特性分析中有独特优势[7],在局部重力场逼近计算中也发挥着特殊的作用[9,21-22]。

本文将地球外部重力异常泊松积分计算式中的解析核函数替换为球谐级数展开表达式,并以此为基础,通过更直观的直接求导方法,推导得到一组新的重力异常高阶径向偏导数积分计算式。同时考虑到各类重力观测经滤波处理后均表现为一类有限频谱带宽的信号,进一步将核函数的球谐级数展开式截断为与重力观测值频谱范围相一致的带限求和式,最终推得实用化的重力异常高阶径向导数带限计算模型。通过仿真计算,验证了新模型的准确性和可靠性,同时通过一系列的数值计算检验和对比分析,评估了该组公式应用于泰勒级数展开模型的重力向下延拓计算效果。

1　计算模型

1.1　重力异常高阶导数的封闭计算式及分析

根据重力场解析延拓理论[1],如果已知某一

高度面h的观测重力异常Δg_{ob}，可依照泰勒级数展开式求得零高度面上的重力异常Δg_{con}[5,12]，计算式为：

$$\Delta g_{con}=\Delta g_{ob}-h\frac{\partial\Delta g}{\partial h}+\frac{1}{2!}h^2\frac{\partial^2\Delta g}{\partial h^2}-\cdots=\Delta g_{ob}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!}h^n\frac{\partial^n\Delta g}{\partial h^n}\tag{1}$$

式中，$\partial^n\Delta g/\partial h^n$代表地球外部重力异常$\Delta g$在观测高度面上的$n$阶垂向偏导数。

由式(1)可知，实现重力异常向下延拓计算的关键是准确获取重力异常沿垂线方向的各阶偏导数。在实际应用中，各阶偏导数的观测值很难直接获得，一般只能依靠位场的观测量来计算同一观测面上的各阶偏导数[5,12,27-29]。文献[7]基于泊松积分公式，推出了重力异常一阶径向偏导数的积分计算式；文献[1]利用向上和向下延拓算子与微分算子之间的关联性，推出了重力异常高阶径向偏导数的递推计算式。考虑到该组递推公式计算过程过于复杂，随着偏导数阶数的升高，递推过程不仅会导致数据需求范围加大、计算效率降低，同时可能引起计算结果的不稳定性等问题，文献[30]依照文献[7]推导一阶径向偏导数时采用的研究思路，推出了重力异常更高阶径向偏导数的直接积分封闭计算式(以下简称Wei(2014)公式)。

依据Wei(2014)公式，使用观测面上的重力异常即可直接计算得到观测面上的各阶径向偏导数，计算高阶偏导数时不需要低阶偏导数的计算值。从形式上看，相较于文献[1]提出的传统递推方法，Wei(2014)公式具有比较明显的优势，它不仅可以一次性计算得到所需要的各阶径向偏导数，同时还降低了对观测数据覆盖范围的要求。因此，若能证实Wei(2014)公式是可靠有效的，那么，使用该组模型计算得到的径向偏导数替代垂向偏导数，即可快速完成由式(1)定义的重力异常向下延拓计算。但通过仿真计算发现，该组模型从二阶偏导数开始，都无法实现数值上的精准闭环，也就是仿真计算结果回不到理论上的真值，两者偏差远大于预期。这说明该组公式的有效性还有待进一步的检核。考虑到本文提出的新模型是对文献[30]研究成果的改进和拓展，这里简要介绍Wei(2014)公式的直接求导法推导过程和结果。

由文献[7]可知，使用地面观测重力异常计算地球外部重力异常Δg的泊松积分计算式为：

$$\Delta g=\frac{1}{4\pi}\iint_{\sigma}(\Delta g_R-\Delta g_p)K(r,\psi)\mathrm{d}\sigma+\frac{R^2}{r^2}\Delta g_p\tag{2}$$

$$K(r,\psi)=\frac{R^2(r^2-R^2)}{rl^3}\tag{3}$$

式中，Δg_R表示球面上的重力异常；Δg_p表示球面外计算点在球面投影点处的重力异常；r为计算点地心向径；R为地球椭球平均半径；l表示计算点至积分流动点之间的空间距离，$l=\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\psi}$；$\psi$为计算点至流动点之间的球面角距；$K(r,\psi)$为积分核函数。

直接对式(2)求偏导数，可得到球外部重力异常不同阶次的径向偏导数积分计算式：

$$\frac{\partial^i\Delta g}{\partial r^i}=\frac{1}{4\pi}\iint_{\sigma}(\Delta g_R-\Delta g_p)\frac{\partial^i K(r,\psi)}{\partial r^i}\mathrm{d}\sigma+R^2\Delta g_p\frac{\partial^i(r^{-2})}{\partial r^i}\tag{4}$$

依据式(3)，可推得：

$$\frac{\partial K(r,\psi)}{\partial r}=-\frac{3R^2(r^2-R^2)(2r-2R\cos\psi)}{2rl^5}+\frac{2R^2}{l^3}-\frac{R^2(r^2-R^2)}{r^2l^3}=\frac{R^2}{r^2l^5}\left(-2r^4+5r^2R^2+R^4+rR\cos\psi(r^2-5R^2)\right)\tag{5}$$

$$R^2\Delta g_p\frac{\partial(r^{-2})}{\partial r}=-\frac{2R^2}{r^3}\Delta g_p\tag{6}$$

在式(5)和式(6)中，令$r=R$，可推得球面上的偏导数计算式为：

$$\left.\frac{\partial K(r,\psi)}{\partial r}\right|_{r=R}=\frac{2R^2}{l_0^3}\tag{7}$$

$$\left.R^2\Delta g_p\frac{\partial(r^{-2})}{\partial r}\right|_{r=R}=-\frac{2}{R}\Delta g_p\tag{8}$$

式中，$l_0=2R\sin(\psi/2)$。将式(7)和式(8)代入式(4)，可得到重力异常在球面上的一阶径向偏导数计算式：

$$\frac{\partial\Delta g}{\partial r}=\frac{R^2}{2\pi}\iint_{\sigma}\frac{\Delta g_R-\Delta g_p}{l_0^3}\mathrm{d}\sigma-\frac{2}{R}\Delta g_p\tag{9}$$

依据同样的推导过程，可推得二阶及更高阶的径向偏导数积分表达式，为了节省篇幅，这里只列出二阶和三阶偏导数计算式如下：

$$\frac{\partial^2\Delta g}{\partial r^2}=-\frac{2R}{\pi}\iint_{\sigma}\frac{\Delta g_R-\Delta g_p}{l_0^3}\mathrm{d}\sigma+\frac{6}{R^2}\Delta g_p\tag{10}$$

$$\frac{\partial^3\Delta g}{\partial r^3}=\frac{9}{4\pi}\iint_{\sigma}\left(\frac{25}{6}-\frac{2R^2}{l_0^2}\right)\frac{\Delta g_R-\Delta g_p}{l_0^3}\mathrm{d}\sigma-\frac{24}{R^3}\Delta g_p\tag{11}$$

对比上述推导结果与Wei(2014)公式[30]，

发现两组积分计算式是完全一致的。这说明本文使用的直接求导法与文献[30]采用调和函数径向导数作为过渡量的间接求导法不存在本质性的区别，不必做过多的讨论。但需要特别指出的是，经数值计算检验发现，文献[30]给出的重力异常径向偏导数计算公式，除了一阶导数外，其他高阶导数计算式均无法给出有效可靠的结果（见下文算例）。其原因可能与推导该组公式所依据的泊松积分公式的适用条件有关，因为依据文献[7]，泊松积分公式是球外狄利克雷问题的直接球面解，其适用条件为$r>R$。当$r=R$时，积分核函数在计算点处将出现分子分母同时为零的不定式情形，即存在奇异点，说明积分核函数在球边界面不满足连续可微条件，也就不满足求导与积分运算交换次序的基本条件，故不能直接通过对泊松积分公式进行求导来获取球面上的重力异常径向偏导数计算公式。此外，对比式(9)和式(10)可以看出，一阶和二阶偏导数两个核函数的变化形态完全一致，只在变化幅值大小上存在差异，这在理论上显然不成立，也从另一个侧面说明 Wei(2014)公式存在理论缺陷。

为了解决核函数奇异性问题，文献[7]采用了一种基于积分恒等式的数值置换方法，即将积分式内每一个已知的位场观测量都减去计算点处的观测量，然后在积分式外恢复计算点观测量的影响。但正如文献[7]所述，数值置换方法只是在一定程度上中和了核函数的奇异性，而非完全消除了奇异性，因为数值置换方法所依据的积分恒等式在边界面($r=R$)上并不成立。也许正是由于核函数的奇异性得到了一定程度的中和，泊松积分式的一阶偏导数才得以在边界面上逼近稳定的解析解。依据文献[1]、文献[10]和文献[31]，尽管式(9)是一个强奇异积分，但当重力异常观测量足够平滑时，比如存在有界的二阶导数时，式(9)存在 Cauchy 主值意义下的积分解。而对于阶数大于1的更高阶导数，由于其核函数的奇异性变得更强，基于初始泊松积分核的数值置换方法不再适用，故导致由此导出的高阶偏导数计算式最终失效。虽然采用文献[1]提出的由$(k-1)$阶偏导数推算k阶偏导数方法，可以从理论上解决高阶偏导数的计算稳定性问题，但递推过程不仅会导致计算结果的有效范围逐步缩小，降低观测数据的使用效率，同时随着递推阶数的增大，低阶导数的计算误差通过累积也可能引起高阶导数计算结果的不稳定性。

1.2　高阶径向导数带限计算模型及分析

从上述分析可知，Wei(2014)公式的问题主要在于积分核函数在球边界面上存在跳点，不满足连续可微以及求导与积分运算交换次序条件。为解决此问题，本文提出将泊松积分式中的封闭解析核函数替换为球谐级数展开表达式，并以此为基础，通过直接求导方法推导出形式更简单的重力异常高阶径向偏导数积分计算公式。

原始的地球外部重力异常积分计算式为[7]：

$$\Delta g=\frac{R^2(r^2-R^2)}{4\pi r}\iint_\sigma\frac{\Delta g_R}{l^3}\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{4\pi}\iint_\sigma\Delta g_R K(r,\psi)\mathrm{d}\sigma \tag{12}$$

因由式(3)表示的封闭解析核函数$K(r,\psi)$在球边界面不满足连续可微条件，故不能直接对式(12)进行求导。为了避开核函数奇异性问题，将核函数表示为球谐函数展开式[7]：

$$K(r,\psi)=\frac{R^2(r^2-R^2)}{rl^3}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}P_n(\cos\psi) \tag{13}$$

式中，$P_n(\cos\psi)$为n阶勒让德函数。由球谐函数展开理论可知，当$r>R$时，由式(13)表示的积分核函数是收敛的；而当$r=R$时，式(13)转变为发散级数，此时，同样无法直接对式(12)求导数来完成重力异常高阶径向偏导数的计算。为了解决级数发散问题，可以采用球谐函数的有限线性组合对积分核函数进行一致逼近。实际上，根据文献[1]，将球谐函数展开式进行截断，就可以很方便地得到合适的线性组合，且这个有限线性组合表达式一定是收敛的。据此，可将由式(13)表示的勒让德函数展开项统一截断到N阶：

$$K_N(r,\psi)=\sum_{n=0}^{N}(2n+1)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}P_n(\cos\psi) \tag{14}$$

并使用$K_N(r,\psi)$来一致逼近$K(r,\psi)$。也就是可以使用式(14)代替式(13)，再代入到式(12)，即可得到由有限求和核函数表示的地球外部重力异常积分计算式：

$$\Delta g=\frac{1}{4\pi}\iint_\sigma\Delta g_R K_N(r,\psi)\mathrm{d}\sigma \tag{15}$$

此时，由于$K_N(r,\psi)$是收敛的，在球边界面及其外部均连续可微，故满足求导与积分运算交换次序条件。此时，对应于式(15)的径向偏导数积分计算式可表示为：

$$\frac{\partial^i \Delta g}{\partial r^i}=\frac{1}{4\pi}\iint_\sigma \Delta g_R \frac{\partial^i K_N(r,\psi)}{\partial r^i}\mathrm{d}\sigma \quad (16)$$

依次对式(14)求一阶至三阶径向偏导数，将其代入式(16)，并令$r=R$，可得到由勒让德函数有限展开项表达的球面重力异常径向偏导数积分计算式：

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial r}=-\frac{1}{4\pi R}\iint_\sigma \Delta g_R \cdot \sum_{n=0}^{N}(2n+1)(n+2)P_n(\cos\psi)\mathrm{d}\sigma \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 \Delta g}{\partial r^2}=\frac{1}{4\pi R^2}\iint_\sigma \Delta g_R \cdot \sum_{n=0}^{N}(2n+1)(n+2)(n+3)P_n(\cos\psi)\mathrm{d}\sigma \quad (18)$$

$$\frac{\partial^3 \Delta g}{\partial r^3}=-\frac{1}{4\pi R^3}\iint_\sigma \Delta g_R \cdot \sum_{n=0}^{N}(2n+1)(n+2)(n+3)(n+4)P_n(\cos\psi)\mathrm{d}\sigma \quad (19)$$

实际上，还可以从另一个角度来分析讨论使用截断球谐函数展开式一致逼近积分核函数，进而完成重力异常高阶径向偏导数计算的合理性。以一阶偏导数计算式为例，将式(17)改写为：

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial r}=-\frac{1}{4\pi R}\cdot \sum_{n=0}^{N}(2n+1)(n+2)\iint_\sigma \Delta g_R(\theta',\lambda')P_n(\cos\psi)\mathrm{d}\sigma \quad (20)$$

式中，θ'、λ'分别为球面流动点的地心余纬和经度。由文献[1]可知，重力异常n阶拉普拉斯面球谐函数可依据球面观测值展开为：

$$\Delta g_n(\theta,\lambda)=\frac{2n+1}{4\pi}\iint_\sigma \Delta g_R(\theta',\lambda')P_n(\cos\psi)\mathrm{d}\sigma \quad (21)$$

将式(21)代入式(20)可得：

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial r}=-\frac{1}{R}\sum_{n=0}^{N}(n+2)\Delta g_n(\theta,\lambda) \quad (22)$$

由式(22)可以看出，使用由截断阶次为N的球谐函数展开式(14)表示的积分核函数进行重力异常径向偏导数计算，实质上是将球面重力异常观测量展开为N阶次的拉普拉斯面球谐函数级数。实际上，式(22)同时等价于将球面重力异常的球谐函数无穷级数展开式截断为与积分核函数展开式相同阶数的有限求和级数，因为由文献[1]得知，地球外部空间重力异常的球谐函数展开式可表示为：

$$\Delta g(r,\theta,\lambda)=\frac{GM}{R^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}(n-1)\sum_{m=0}^{n}\left(\bar{C}_{nm}^{*}\cos(m\lambda)+\bar{S}_{nm}\sin(m\lambda)\right)\bar{P}_{nm}(\cos\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}\Delta g_n(\theta,\lambda) \quad (23)$$

$$\Delta g_n(\theta,\lambda)=\frac{GM}{R^2}(n-1)\sum_{m=0}^{n}\left(\bar{C}_{nm}^{*}\cos(m\lambda)+\bar{S}_{nm}\sin(m\lambda)\right)\bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (24)$$

式中，GM为地球引力常数；$\bar{P}_{nm}(\cos\theta)$为完全规格化缔合勒让德函数；$\bar{C}_{nm}^{*}$和$\bar{S}_{nm}$为完全规格化地球位系数。对式(23)求径向偏导数，取最高求和阶次为N，并令$r=R$，即可得到与式(22)完全相同的有限求和计算式。

根据同样的思路，可推证二阶及以上高阶偏导数计算式也有与一阶导数相类似的对等关系。这种对频谱做截断处理的方式在实用上是非常有意义也是符合实际情况的。根据位场信息频谱分布特点，虽然重力场各类参量在理论上包含从低频到中频、高频全频谱信息，不同参量在各频段具有不同的谱能量占比，但总体而言，各参量的谱能量占比一般都随频段的升高而降低，因此由人为截断高频段信息带来的逼近误差影响是有限且可控的。此外，现实中的各类重力观测量（包括航空重力测量）都是一些离散化的点值，其观测过程不可避免受各类干扰因素的影响，原始观测值中必然包含不可忽略的观测噪声，要想分离出所需的重力信息，必须对原始观测值作低通滤波处理。这说明正常获取的重力观测成果实际上都是经过滤波处理，也就是经过高频截断后的一类有限频谱带宽信号，因此在数值积分计算式中，将核函数的球谐级数展开式截断为与此类重力观测值频谱带宽相一致（比如N阶）的有限求和，是一种技术合理且符合实际的处理方法。因此，式(22)（或式(20)）结合式(23)和式(24)的作用效果相当于依据地面重力异常观测数据，将现有的地球重力位模型扩展至与观测数据分辨率相一致的阶次。这一研究思路与文献[9]和文献[21-23]将带限计算模型应用于大地水准面精化的做法相吻合。

1.3 计算模型改化

由前述得知，式(1)联合式(17)～式(19)共同组成本文实施重力向下延拓计算的基础模型。在投入实际应用之前，还需要根据数据保障条件对这些基础模型进行必要的改化处理。

在实际应用中，由于重力观测数据无法覆盖全球，故一般只能将全球积分区域划分为近区和远区两部分进行差异化分区处理。近区是指以

计算点为中心、ψ_0为半径的球冠区域σ_0,近区积分直接由观测数据按离散求和方法进行计算;远区是球面上的剩余部分$(\sigma-\sigma_0)$,其影响一般可以忽略不计,也可由高阶地球位模型进行补偿计算。为了尽可能减弱远区效应对计算结果的影响,通常采用移去-恢复方法对理论计算模型进行改化处理。该方法的实质是,通过引入阶次为L的地球位模型作为参考场,发挥替代积分远区观测数据的作用,同时降低对近区观测数据覆盖范围的要求。具体实施步骤是:首先从重力异常观测值中移去位模型计算值Δg^{ref},得到剩余重力异常,然后由剩余重力异常计算得到剩余径向偏导数,最后将剩余径向偏导数加上(恢复)相对应的径向偏导数位模型计算值g_p^{ref},就得到最终的径向偏导数值。以一阶偏导数计算模型为例,对应于式(17)的改化计算式可表示为:

$$\frac{\partial\Delta g}{\partial r}=g_{1p}^{\mathrm{ref}}+\frac{1}{4\pi}\iint_{\sigma_0}(\Delta g_R-\Delta g_R^{\mathrm{ref}})K_{1N}(R,\psi)\mathrm{d}\sigma \tag{25}$$

$$g_{1p}^{\mathrm{ref}}=-\frac{GM}{R^3}\sum_{n=0}^{L}(n+2)(n-1)\cdot\sum_{m=0}^{n}\left(\bar{C}_{nm}^{*}\cos(m\lambda)+\bar{S}_{nm}\sin(m\lambda)\right)\bar{P}_{nm}(\cos\theta) \tag{26}$$

$$\Delta g_R^{\mathrm{ref}}=\frac{GM}{R^2}\sum_{n=0}^{L}(n-1)\cdot\sum_{m=0}^{n}\left(\bar{C}_{nm}^{*}\cos(m\lambda)+\bar{S}_{nm}\sin(m\lambda)\right)\bar{P}_{nm}(\cos\theta) \tag{27}$$

$$K_{1N}(R,\psi)=-\frac{1}{R}\sum_{n=0}^{N}(2n+1)(n+2)P_n(\cos\psi) \tag{28}$$

式中,g_{1p}^{ref}代表由参考场位模型计算得到的在球面计算点处的重力异常一阶径向偏导数;$\Delta g_R^{\mathrm{ref}}$代表由参考场位模型计算得到的球面流动点重力异常;$K_{1N}(R,\psi)$为球面一阶径向导数对应的积分核函数。引入移去-恢复处理模式后,还需要对积分核函数作相应的改化处理,以满足积分核函数与观测重力异常信息之间的频谱匹配要求。已有研究结果表明,对核函数作简单化的截断处理,即由原核函数减去与参考场位模型阶次L相同的勒让德函数展开式,就能达到预期的改化效果[32-34]。截断后的核函数等效于一个高通数字滤波器的作用,可显著减弱观测数据长波误差对计算结果的影响。本文使用Wong-Gore方法(简称WG)[32]对重力异常径向偏导数计算模型进行核函数改化。以上文讨论过的一阶偏导数改化模型为例,可将对应于式(28)的截断核函数再次截断为:

$$K_{1N}^{\mathrm{WG}}(R,\psi)=K_{1N}(R,\psi)-\left[-\frac{1}{R}\sum_{n=0}^{L}(2n+1)(n+2)P_n(\cos\psi)\right]=-\frac{1}{R}\sum_{n=L+1}^{N}(2n+1)(n+2)P_n(\cos\psi) \tag{29}$$

式中,$K_{1N}^{\mathrm{WG}}(R,\psi)$代表对应于一阶偏导数计算模型的双截断核函数。改化公式(25)应改写为:

$$\frac{\partial\Delta g}{\partial r}=g_{1p}^{\mathrm{ref}}+\frac{1}{4\pi}\iint_{\sigma_0}(\Delta g_R-\Delta g_R^{\mathrm{ref}})K_{1N}^{\mathrm{WG}}(R,\psi)\mathrm{d}\sigma \tag{30}$$

通过引入地球重力位模型作为参考场,对原始积分模型进行移去-恢复和核函数改化计算,虽然在一定程度上减弱了积分远区缺少观测数据的影响,但远区截断误差的存在仍是不可避免的[7],其大小取决于积分半径ψ_0的取值和计算区域重力场变化的激烈程度。当采用的参考场位模型阶数(L=360)远低于当前广泛使用的超高阶位模型阶数($L_{\max}$=2 160)时,还可以使用超高阶位模型来进一步减弱远区截断误差的影响。以一阶偏导数为例,对应于改化计算式(30)的远区截断误差补偿公式可表示为:

$$g_{1(\sigma-\sigma_0)}=\frac{1}{2}\sum_{n=L+1}^{L_{\max}}Q_{1n}(\psi_0)\Delta g_n(\theta,\lambda) \tag{31}$$

$$Q_{1n}(\psi_0)=-\frac{1}{R}\sum_{m=L+1}^{L_{\max}}(2m+1)(m+2)R_{nm}(\psi_0) \tag{32}$$

$$R_{nm}(\psi_0)=\int_{\psi_0}^{\pi}P_n(\cos\psi)P_m(\cos\psi)\sin\psi\mathrm{d}\psi \tag{33}$$

式中,$g_{1(\sigma-\sigma_0)}$代表一阶偏导数计算模型远区截断误差的补偿量;$Q_{1n}(\psi_0)$为远区截断系数。改化公式(30)应进一步改写为:

$$\frac{\partial\Delta g}{\partial r}=g_{1p}^{\mathrm{ref}}+\frac{1}{4\pi}\iint_{\sigma_0}(\Delta g_R-\Delta g_R^{\mathrm{ref}})K_{1N}^{\mathrm{WG}}(R,\psi)\mathrm{d}\sigma+g_{1(\sigma-\sigma_0)} \tag{34}$$

式(34)即为重力异常一阶径向偏导数积分计算模型的最终改化公式。同理,可推得相类似的二阶及更高阶径向偏导数计算模型的改化公式,为了节省篇幅,这里不再列出。

2　数值计算检验与分析

2.1　数值检验使用的数据及区域

为了分析检验上文推导的重力异常高阶径向

偏导数带限计算模型及其在向下延拓计算应用中的恢复能力,本文采用超高阶位模型EGM2008作为数值计算检验的仿真标准场,用于模拟产生不同高度面$1'\times1'$网格重力异常及不同阶数径向偏导数的“真值”。由地球位模型计算不同高度重力异常及其径向偏导数的公式均可由式(23)推演得到。为了体现检验结果的代表性,特选取重力场变化比较剧烈的马里亚纳海沟作为试验区,具体覆盖范围为:143°E~146°E,11°N~14°N。首先选取截断到360阶次的位模型EGM2008作为参考场,即取$L=360$,然后选取361~2 160阶次的位模型EGM2008作为计算检验的标准场,由其产生的模拟观测量分辨率为$5'\times5'$,故可取$N=2\ 160$,$L_{\max}=N=2\ 160$;然后选取$r=R+h$,$R=6\ 371$ km,由EGM2008模型(361~2 160阶次)分别计算7组高度面h_i上的$1'\times1'$网格剩余重力异常“真值”Δg_i^t,其中$h_i=2\times(i-1)$ km ($i=1,2,\cdots,7$),每组对应180×180个网格点数据;同时计算3组分别对应于$h_1=0$ km、$h_4=6$ km、$h_6=10$ km高度面上的剩余重力异常一阶至五阶径向偏导数“真值”g_{1j}^t、g_{4j}^t、g_{6j}^t($j=1,2,\cdots,5$)。3组不同高度面$1'\times1'$网格剩余重力异常“真值”和一阶至五阶垂向偏导数“真值”的统计结果分别见表1、表2。

表1 3组高度面重力异常统计结果/mGal

Tab. 1 Anomalies on Three Altitude Surfaces /mGal

高度面/km	最小值	最大值	平均值	均方根值
0	−78.48	132.75	−0.05	26.36
6	−41.18	74.21	−0.04	16.22
10	−30.45	52.29	−0.04	12.00

表2 3组高度面重力异常径向偏导数统计结果

Tab. 2 Radial Partial Derivatives of Anomalies on Three Altitude Surfaces

高度面/km	统计参量	一阶导数/(10^{-3} mGal·km^{-1})	二阶导数/(10^{-3} mGal·km^{-2})	三阶导数/(10^{-3} mGal·km^{-3})	四阶导数/(10^{-3} mGal·km^{-4})	五阶导数/(10^{-3} mGal·km^{-5})
0	平均值	−32.93	1.12	0.14	−0.06	0.02
	均方根值	2 933.26	412.72	83.84	21.00	5.82
6	平均值	−25.14	1.31	−0.03	−0.01	0.00
	均方根值	1 515.01	158.85	23.15	4.59	1.10
10	平均值	−20.19	1.15	−0.05	−0.00	0.00
	均方根值	1 045.19	97.43	11.79	1.93	0.41

2.2 数值检验方法及结果分析

本文将数值计算检验方案设计为两个阶段。第一阶段检验流程为:以上文选定的3组高度面(0 km、6 km、10 km)上的位模型剩余重力异常Δg_i^t作为观测量,分别依据相对应的改化公式计算前述3个高度面上的$1'\times1'$网格一阶至五阶径向偏导数(g_{1j}^c、g_{4j}^c、g_{6j}^c),将其与相对应的“真值”(g_{1j}^t、g_{4j}^t、g_{6j}^t)作比较,可获得不同高度面、不同阶次偏导数计算模型的精度评估信息,具体结果见表3。积分半径统一取为$\psi_0=0.5°$,故计算区域外围0.5°范围内的比对结果不参加精度评估统计计算(下同)。为了对比分析径向偏导数积分模型改化前后的计算效果,本文给出了采用原始积分模型完成相同参量计算获得的精度评估结果,具体见表4。

表3 利用改化模型计算3组高度面重力异常径向偏导数精度检核

Tab.3 Accuracy of Radial Partial Derivatives Obtained by the Modified Model on Three Altitude Surfaces

高度面/km	统计参量	一阶导数/(10^{-3} mGal·km^{-1})	二阶导数/(10^{-3} mGal·km^{-2})	三阶导数/(10^{-3} mGal·km^{-3})	四阶导数/(10^{-3} mGal·km^{-4})	五阶导数/(10^{-3} mGal·km^{-5})
0	平均差值	−1.69	0.52	−0.16	0.05	−0.02
	均方根值	61.95	19.00	5.97	1.86	0.57
6	平均差值	−1.07	0.33	−0.10	0.03	−0.01
	均方根值	38.65	11.84	3.72	1.16	0.36
10	平均差值	−0.79	0.24	−0.08	0.02	−0.01
	均方根值	28.70	8.79	2.76	0.86	0.26

从表3可以看出,依据本文推导的经改化后的带限积分模型计算重力异常一阶至五阶径向偏导数均可获得比较满意的闭环符合精度。从表3与表2可以看出,改化计算模型的绝对精度(互差均

方根值)随计算高度面的增高和偏导数阶数的增大而提升,其相对精度(互差均方根值/偏导数均方根值)的变化趋势则正好相反,均随计算高度面的增高和偏导数阶数的增大而降低,计算高度面越高,其相对精度的降低幅度越明显。这个结果显然与高度面越高、高阶偏导数的绝对量值越小有关,同时与偏导数阶数越高、积分模型离散化误差的影响越大有关,符合理论分析预期。进一步对比表3和表4可以看出,如果直接采用原始带限积分模型进行重力异常径向偏导数计算,那么其计算精度将显著降低,下降幅度最大可达一个数量级。以一阶和二阶偏导数计算结果为例,在3组高度面上,改化带限模型的相对计算精度分别优于3%和10%,而原始带限模型的相对计算精度则最高不超过6%和30%,说明本文对原始带限模型进行改化处理是必要且有效的。

表4　利用原始模型计算3组高度面重力异常径向偏导数精度检核

Tab.4　Accuracy of Radial Partial Derivatives Obtained by the Original Model on Three Altitude Surfaces

高度面/km	统计参量	一阶导数/(10^{-3} mGal•km^{-1})	二阶导数/(10^{-3} mGal•km^{-2})	三阶导数/(10^{-3} mGal•km^{-3})	四阶导数/(10^{-3} mGal•km^{-4})	五阶导数/(10^{-3} mGal•km^{-5})
0	平均差值	7.23	−5.02	1.89	−0.67	0.24
	均方根值	233.70	136.56	51.40	18.23	6.39
6	平均差值	4.41	−3.15	1.19	−0.42	0.15
	均方根值	103.94	80.77	30.97	11.03	3.87
10	平均差值	3.22	−2.32	0.88	−0.31	0.11
	均方根值	67.78	59.83	23.06	8.22	2.88

第二阶段数值计算检验流程设计为:利用第一阶段经模型改化计算得到的$h_4=6$ km高度面上的剩余重力异常一阶至五阶径向偏导数,分别依据式(1)向下和向上延拓解算3组高度面h_i上$1'\times1'$网格剩余重力异常Δg_i^{dc}和Δg_i^{uc},其中,$h_i=2\times(i-1)$ km,向下延拓时$i=3,2,1$;向上延拓时$i=5,6,7$,将Δg_i^{dc}和Δg_i^{uc}分别与直接由位模型计算得到的相对应"真值"Δg_i^t作比较,可获得延拓计算模型整体精度的评估信息,具体结果见表5和表6。为了对比分析不同阶数偏导数对延拓解算结果的影响,表5和表6均列出了使用不同截断阶次泰勒级数展开式(1)进行延拓计算获得的比对结果。

表5　从6 km向下延拓至不同高度面重力异常的精度检核

Tab.5　Accuracy of Downward Continuation of Gravity Anomaly on Different Altitude Surfaces from 6 km

高度面/km	统计参量	不同截断阶数n对应的$\Delta g_i^{dc}-\Delta g_i^t$/mGal				
		$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
4	平均差值	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	均方根值	0.41	0.12	0.11	0.11	0.11
2	平均差值	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
	均方根值	1.65	0.46	0.31	0.30	0.30
0	平均差值	0.03	0.01	0.02	0.02	0.02
	均方根值	4.05	1.39	0.73	0.66	0.67

表6　从6 km向上延拓至不同高度面重力异常的精度检核

Tab.6　Accuracy of Upward Continuation of Gravity Anomaly on Different Altitude Surfaces from 6 km

高度面/km	统计参量	不同截断阶数n对应的$\Delta g_i^{uc}-\Delta g_i^t$/mGal				
		$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
8	平均差值	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	均方根值	0.24	0.07	0.06	0.06	0.06
10	平均差值	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
	均方根值	0.97	0.24	0.10	0.09	0.09
12	平均差值	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00
	均方根值	2.08	0.66	0.21	0.11	0.11

从表5可以看出,利用泰勒级数展开式进行重力向下延拓计算,其计算精度随展开式截断阶数增大而提高,随延拓高度差增大而降低,完全符合理论上的分析预期。从具体数值变化幅度看,如果以0.5 mGal作为模型计算精度指标(误差均方根值)的阈值,那么从$h_4=6$ km高度面向下延拓到4 km高度面(高度差为2 km)和2 km高度面(高度差为4 km),展开式截断阶数取$n=2$即可满足要求。而当延拓到0 km高度面(高度差为6 km)时,即使将截断阶数提高至$n=5$也无法满足指标要求。可见,使用泰勒级数展开模型向

下延拓时,其解算精度不仅取决于展开式截断阶数的选择,还取决于延拓高度差的大小、重力异常高阶偏导数的计算精度水平及计算区域重力场变化的剧烈程度。从理论上讲,增加高阶项应当更有利于提高向下延拓模型的计算精度,但增加高阶项越多,对数据观测质量的要求也越高。就本文试验数据源而言,尽管形式上使用1′×1′网格数据,但由于EGM2008模型的最高阶次为2 160阶,对应的数据分辨率只有5′×5′,故本文试验数据源包含的有限的高频成分可能不足以精确分离出更高阶项信息。此外,在向下延拓模型中还隐含一个与计算区域重力场变化特征相关的代表误差因素的影响,因为泰勒级数展开式是以展开点处的各阶偏导数为基础建立起来的,计算点在径向上距离展开点越远,重力场变化特征越显著,各阶偏导数的代表误差就越大,展开式的计算误差也就越大。这可能是从6 km向下延拓至0 km高度面时,计算比对精度出现明显下降的主要原因,从表2可以看出,6 km和0 km高度面的各阶偏导数在量值上存在较大差异。

对比表5和表6可以看出,利用径向偏导数计算作向上延拓的解算精度要明显高于向下延拓的解算精度,且高阶项对解算结果的作用更加减弱。从理论上也不难理解,因为向上延拓是利用相对高频段信息推算低频段信息的过程,向下延拓则是一个相反的过程。也就是说,前者通常是沿着重力场强度衰减的方向进行延拓计算,后者则相反,因此前者更容易获得较高的推算精度,同时实现较大高度差的延拓解算。

2.3 其他模型解算结果及分析

如引言所述,采用泰勒级数展开式作为位场向下延拓模型的关键是精确求取位场延拓参量的各阶垂向偏导数。目前已有学者提出了不同形式的推求重力异常高阶径向导数的方法,如文献[12]和文献[29]都是以向上延拓信息作为过渡量,文献[30]则是直接采用地面观测重力异常作为输入量。为分析比较不同计算模型的解算效果,本文进一步采用上述3个文献提出的3组计算模型,在同一个试验区域对3组高度面上的重力异常一阶至五阶径向偏导数进行数值解算。考虑到不同方法之间的条件对等性,本文事先依照前面的流程对3组计算模型进行统一的改化处理,即做位模型参考场移去-恢复、核函数截断和远区效应补偿等三步处理。同样,将3组模型计算结果分别与相对应的位模型计算基准值作比较,可获得不同计算模型在不同高度面上的精度评估信息,具体结果见表7(这里只列出计算值与基准值互差的均方根)。

表7 其他模型计算不同高度面重力异常径向偏导数精度检核

Tab.7 Accuracies of RPDs of Gravity Anomalies Obtained by Three Methods on Three Altitudes

计算模型	高度面/km	一阶导数/(10^{-3} mGal·km^{-1})	二阶导数/(10^{-3} mGal·km^{-2})	三阶导数/(10^{-3} mGal·km^{-3})	四阶导数/(10^{-3} mGal·km^{-4})	五阶导数/(10^{-3} mGal·km^{-5})
文献[12]	0	228.73	206.88	86.13	20.50	5.98
	6	67.02	61.61	24.25	4.37	1.17
	10	33.85	32.30	12.55	1.79	0.45
文献[29]	0	562.31	1 130.43	1 554.67	1 484.47	891.23
	6	339.03	683.65	940.73	898.37	539.40
	10	244.70	494.69	681.01	650.41	390.53
文献[30]	0	67.78	1 149.76	2 068.47	44.23	8 751.60
	6	36.65	477.64	869.06	10.81	3 693.60
	10	32.03	292.40	536.49	4.61	2 283.28

从表7和表2可以看出,对于文献[30]方法(即Wei(2014)公式),只有一阶偏导数的解算结果是有效可用的,其相对精度优于3%,其他高阶次偏导数的解算结果都明显偏离了相应的基准值,且变化没有规律性,说明其解算模型确实存在理论上的缺陷,无法推广使用。对于文献[12]和文献[29]方法,尽管两者都是基于向上延拓信息进行重力异常径向偏导数解算,但由于文献[12]使用基于多余观测的最小二乘平差法,而文献[29]使用观测数与未知数等量的线性方程组直接解法,因此文献[12]在抑制观测噪声(向上延拓计算误差)方面具有明显优势,表7结果正是这种优势的具体体现。在有效性方面,文献[29]方法只有一阶偏导数的解算结果勉强可用,文献[12]方法解算结果的可用阶数提升到了二阶。这个结果同时说明,尽管使用向上延拓信息作为过渡量进行重力异常径向偏导数解算可以获得比较稳定的数值解,但由于向上延拓计算过程一方

面相当于一种低通滤波器,对重力异常高频信息和观测噪声(指起算高度面上的数据误差)有一定的抑制作用,另一方面又不可避免产生附加的计算误差,两方面共同作用的结果必然会使得高阶偏导数的解算结果越来越偏离其基准值,这可能正是文献[12]方法无法取得满意的更高阶偏导数解算结果的原因,尽管该方法具备上文已经论述过的二次抑制观测噪声功效。对比表7和表3可以看出,无论是解算稳定性还是计算精度,本文推出的重力异常高阶径向导数带限计算模型都一致优于其他方法,显示出了比较明显的优势。

3 结　语

为了提高重力异常高阶径向导数计算模型的稳定性,本文依据重力观测成果数据固有的带限频谱特性,提出将泊松积分核函数的球谐级数展开式截断为与重力观测值频谱带宽相一致的有限求和,并通过直接求导方法推导得到一组与截断核函数相对应的重力异常高阶径向导数带限计算公式,同时对该组公式进行了实用性改化,将其应用于重力异常向下延拓泰勒级数展开计算。所提方法的优越性一方面避免了使用封闭解析核函数在球边界面出现奇异性带来的不确定性问题;另一方面,使用截断球谐函数展开式表示的核函数可有效抑制重力观测噪声的干扰,同时可依据观测重力异常的分辨率和精度水平灵活确定相匹配的核函数截断阶数,从而提高高阶导数解算过程的稳定性和延拓计算模型的解算精度。两个阶段的数值计算检验结果表明,本文推导的重力异常径向导数带限计算模型具有良好的可靠性和有效性,在解算稳定性和计算精度两个方面都优于其他同类模型。在实际应用中,针对特定的计算精度指标要求,应综合考虑向下延拓高度差大小、计算区域重力场变化的剧烈程度和观测数据的分辨率及噪声水平等各种因素影响,选择一个适中的泰勒级数展开最高阶数来实施重力异常向下延拓计算。通常情况下,选取最高阶数 $n=3$ 的延拓模型,就能取得比较稳定可靠的解算结果。

参 考 文 献

[1] Moritz H. Advanced Physical Geodesy[M]. Karlsruhe: Wichmann, 1980

[2] Huang Motao, Ouyang Yongzhong, Liu Min, et al. Regularization of Point-Mass Model for Multi-Source Gravity Data Fusion Processing[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2015, 40(2): 170-175 (黄谟涛,欧阳永忠,刘敏,等. 融合海域多源重力数据的正则化点质量方法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2015, 40(2): 170-175)

[3] Shen Wenbin, Yan Jianguo, Chao Dingbo. Local Fictitious Downward Continuation of Gravity Field and Simulation Experiment Tests Using EGM96 Model[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2006, 31(7): 589-593 (申文斌,鄢建国,晁定波. 重力场的局部虚拟向下延拓以及利用EGM96模型的模拟实验检验[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2006, 31(7): 589-593)

[4] Pitoňák M, Novák P, Eshagh M, et al. Downward Continuation of Gravitational Field Quantities to an Irregular Surface by Spectral Weighting[J]. *Journal of Geodesy*, 2020, 94: 62-88

[5] Fedi M, Florio G. A Stable Downward Continuation by Using the ISVD Method[J]. *Geophysical Journal International*, 2002, 151(1): 146-156

[6] Trompat H, Boschetti F, Hornby P. Improved Downward Continuation of Potential Field Data[J]. *Exploration Geophysics*, 2003, 34(4): 249-256

[7] Heiskanen W A, Moritz H. Physical Geodesy[M]. San Francisco: W. H. Freeman, 1967

[8] Martinec Z. Stability Investigations of a Discrete Downward Continuation Problem for Geoid Determination in the Canadian Rocky Mountains[J]. *Journal of Geodesy*, 1996, 70: 805-828

[9] Novák P, Heck B. Downward Continuation and Geoid Determination Based on Band-Limited Airborne Gravity Data[J]. *Journal of Geodesy*, 2002, 76: 269-278

[10] Sansò F, Sideris M G. Geoid Determination: Theory and Methods[M]. Berlin, Heidelberg: Springer, 2013

[11] Liu Min, Huang Motao, Ouyang Yongzhong, et al. Test and Analysis of Downward Continuation Models for Airborne Gravity Data with regard to the Effect of Topographic Height[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2016, 45(5): 521-530 (刘敏,黄谟涛,欧阳永忠,等. 顾及地形效应的重力向下延拓模型分析与检验[J]. 测绘学报,2016, 45(5): 521-530)

[12] Huang Motao, Liu Min, Deng Kailiang, et al. Analytical Solution of Downward Continuation for Airborne Gravimetry Based on Upward Continuation Method[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2018, 61(12): 4746-4757 (黄谟涛,刘敏,邓凯亮,等. 基于向上延拓的航空重力向下解析延拓解[J]. 地球物理学报, 2018, 61(12): 4746-4757)

[13] Wu Taiqi, Deng Kailiang, Huang Motao, et al. An Improved Singular Values Decomposition Method

for Ill-Posed Problem[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2011, 36(8): 900-903(吴太旗,邓凯亮,黄谟涛,等. 一种改进的不适定问题奇异值分解法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2011, 36(8): 900-903)

[14] Alberts B, Klees R. A Comparison of Methods for the Inversion of Airborne Gravity Data[J]. *Journal of Geodesy*, 2004, 78: 55-65

[15] Bjerhammar A. A New Theory of Geodetic Gravity [M]. Stockholm: Tekniska Högskolan, 1964

[16] Dampney C N G. The Equivalent Source Technique [J]. *Geophysics*, 1969, 34: 39-53

[17] Ning Jinsheng, Wang Haihong, Luo Zhicai. Downward Continuation of Gravity Signals Based on the Multiscale Edge Constraint[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2005, 48(1): 63-68(宁津生,汪海洪,罗志才. 基于多尺度边缘约束的重力场信号的向下延拓[J]. 地球物理学报, 2005, 48(1): 63-68)

[18] Jiang Tao, Dang Yaming, Zhang Chuanyin, et al. Downward Continuation of Airborne Gravity Data Based on Rectangular Harmonic Analysis[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2013, 42(4): 475-480(蒋涛,党亚民,章传银,等. 基于矩谐分析的航空重力向下延拓[J]. 测绘学报,2013, 42(4): 475-480)

[19] Huang Motao, Ouyang Yongzhong, Liu Min, et al. Practical Method for Downward Continuation of Airborne Gravity Data in the Sea Area[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2014, 39(10): 1147-1152(黄谟涛,欧阳永忠,刘敏,等. 海域航空重力测量数据向下延拓的实用方法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2014, 39(10): 1147-1152)

[20] Huang Motao, Ning Jinsheng, Ouyang Yongzhong, et al. Downward Continuation of Airborne Gravimetry on Land Using Geopotential Model and Terrain Information[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2015, 44(4): 355-362(黄谟涛,宁津生,欧阳永忠,等. 联合使用位模型和地形信息的陆区航空重力向下延拓方法[J]. 测绘学报, 2015, 44(4): 355-362)

[21] Novák P, Kern M, Schwarz K P. Numerical Studies on the Harmonic Downward Continuation of Band-Limited Airborne Gravity[J]. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 2001, 45: 327-345

[22] Novák P, Kern M, Schwarz K P, et al. On Geoid Determination from Airborne Gravity[J]. *Journal of Geodesy*, 2003, 76: 510-522

[23] Kern M, Schwarz K P, Sneeuw N. A Study on the Combination of Satellite, Airborne and Terrestrial Gravity Data[J]. *Journal of Geodesy*, 2003, 77: 217-225

[24] Mansi A H, Capponi M, Sampietro D. Downward Continuation of Airborne Gravity Data by Means of the Change of Boundary Approach[J]. *Pure and Applied Geophysics*, 2017, 175(3): 977-988

[25] Wang Yanguo, Zhang Fengxu, Wang Zhuwen, et al. Taylor Series Iteration for Downward Continuation of Potential Fields[J]. *Oil Geophysical Prospecting*, 2011, 45(4): 657-662(王彦国,张凤旭,王祝文,等. 位场向下延拓的泰勒级数迭代法[J]. 石油地球物理勘探,2011, 45(4): 657-662)

[26] Ma G Q, Liu C, Huang D N, et al. A Stable Iterative Downward Continuation of Potential Field Data [J]. *Journal of Applied Geophysics*, 2013, 98: 205-211

[27] Zhang Chong, Huang Danian, Liu Jie. Milne Method for Downward Continuation of Gravity Field [J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2017, 60(11): 4212-4220(张冲,黄大年,刘杰. 重力场向下延拓Milne法[J]. 地球物理学报,2017, 60(11): 4212-4220)

[28] Zhang Chong, Lu Qingtian, Yan Jiayong, et al. Numerical Solutions of the Mean-Value Theorem: New Methods for Downward Continuation of Potential Fields[J]. *Geophysical Research Letters*, 2018, 45: 3461-3470

[29] Tran K V, Nguyen T N. A Novel Method for Computing the Vertical Gradients of the Potential Field: Application to Downward Continuation[J]. *Geophysical Journal International*, 2020, 220: 1316-1329

[30] Wei Z. High-Order Radial Derivatives of Harmonic Function and Gravity Anomaly[J]. *Journal of Physical Science and Application*, 2014, 4(7): 454-467

[31] Yu Jinhai, Zhu Zhuowen, Peng Fuqing. Wavelet Arithmetic of g_1-Term in Molodensky's Boundary Value Problem[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2001, 44(1): 112-119(于锦海,朱灼文,彭富清. Molodensky边值问题中解析延拓法g_1项的小波算法[J]. 地球物理学报, 2001, 44(1): 112-119)

[32] Wong L, Gore R. Accuracy of Geodesy Heights from Modified Stokes Kernels[J]. *Geophysical Journal International*, 1969, 18(1): 81-91

[33] Vaníček P, Featherstone W E. Performance of the Three Types of Stokes's Kernel in the Combined Solution for the Geoid[J]. *Journal of Geodesy*, 1998, 72(12): 684-697

[34] Wang Y M, Saleh J, Li X, et al. The US Gravimetric Geoid of 2009 (USGG2009): Model Development and Evaluation[J]. *Journal of Geodesy*, 2012, 86(3): 165-180