



引文格式:李绕波,袁希平,甘淑,等.点面特征约束下利用对偶四元素描述的点云配准模型求解方法[J].武汉大学学报(信息科学版),2023,48(9):1546-1554.DOI:10.13203/j.whugis20210184

Citation:LI Raobo, YUAN Xiping, GAN Shu, et al.A Method for Solving Point Cloud Registration Models Using Dual Quaternion Descriptions of Point-Planar Feature Constraints[J].Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2023, 48(9): 1546-1554.DOI:10.13203/j.whugis20210184

点面特征约束下利用对偶四元素描述的点云配准模型求解方法

李绕波¹ 袁希平^{2,3} 甘淑^{1,2} 毕瑞¹ 高莎¹ 胡琳¹

1 昆明理工大学国土资源工程学院,云南 昆明,650093

2 云南省高校高原山区空间信息测绘技术应用工程研究中心,云南 昆明,650093

3 滇西应用技术大学工程学院,云南 大理,671009

摘要:点云数据的高精度配准是保证空间物体表面三维数据完整性的关键,针对相邻测站点云数据存在位置、姿态和尺度差异的问题,提出一种在点面特征约束下利用对偶四元素描述的点云配准模型求解方法。首先,利用对偶四元素表示空间相似变换的旋转矩阵和平移向量,在此基础上顾及尺度因子,依据点在平面内和点在平面外分别所构建的向量与平面的法向量之间存在垂直和平行的空间拓扑关系,并以此作为空间相似变换的约束条件,基于最小二乘准则构建平差模型;然后,引入 Levenberg-Marquardt 法解算平差模型,以避免平差处理中可能由初始值的不恰当性,或由雅克比矩阵所构建的实对称矩阵接近奇异时而导致迭代不收敛;最后,通过两组实验与现有方法进行对比分析,实验结果表明,所提方法能有效实现点云配准。因此,点面特征约束下顾及尺度因子且利用对偶四元素实现空间相似变换的方法具有较强的实用价值。

关键词:测量;点云配准;对偶四元素;点面特征;尺度因子

中图分类号:P237

文献标识码:A

收稿日期:2021-04-14

DOI:10.13203/j.whugis20210184

文章编号:1671-8860(2023)09-1546-09

A Method for Solving Point Cloud Registration Models Using Dual Quaternion Descriptions of Point-Planar Feature Constraints

LI Raobo¹ YUAN Xiping^{2,3} GAN Shu^{1,2} BI Rui¹ GAO Sha¹ HU Lin¹

1 Faculty of Land Resources and Engineering, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China

2 Yunnan Provincial Plateau Mountain Survey Technique Application Engineering Research Center, Kunming 650093, China

3 College of Engineering, West Yunnan University of Applied Sciences, Dali 671009, China

Abstract: Objectives: The high-precision registration of point cloud data is the key to ensure the integrity of 3D data on the surface of spatial objects. To address the problem that there are differences in position, attitude and scale of cloud data from neighboring stations, a method is proposed to solve the registration model of point cloud described by the dual quaternion under the constraints of point-planar feature. **Methods:** First, the rotation matrix and translation vector of the spatially similar transformation are represented by the dual quaternion, based on which the scale factor is taken into account and the vertical and parallel spatial topological relationships exist between the vectors constructed by the points in the plane and the points out of the plane respectively and the normal vectors of the plane, and this is used as the constraint of the spatially similar transformation to construct the parity model based on the least squares criterion. Then the Levenberg-Marquardt method is introduced to solve the level-difference model to avoid the

基金项目:国家自然科学基金(41861054)。

第一作者:李绕波,博士生,主要从事地面三维激光扫描数据处理。923965722@qq.com

通讯作者:甘淑,教授。n1480@qq.com

possible non-convergence of the iterations in the level-difference treatment due to the inappropriateness of the initial values or due to the fact that the real symmetric matrix constructed by the Jacobi matrix is close to singularity. **Result:** Two sets of experiments are compared and analyzed with the existing methods, and the experimental results show that the proposed method can effectively achieve point cloud registration. **Conclusions:** Therefore, the method that takes into account the scale factor under the point-planar feature constraint and uses the dual quaternion to realize the spatial similarity transformation has a strong practical value.

Key words: measurement; point cloud registration; dual quaternion; point and surface features; scale factor

激光雷达 (light detection and ranging, LiDAR) 技术的高效性和高精度性使其成为城市三维空间信息获取的重要手段,然而受到 LiDAR 设备有效视野和城市空间构造的限制^[1-3],为了获得目标物体完整的三维信息,通常需要利用配准算法实现将不同视角扫描的点云数据在同一基准下进行描述。点云配准算法的实质是通过相邻测站的几何特征解算出实现空间相似变换的 7 个参数:1 个尺度因子 λ , 3 个坐标旋转角度 α 、 β 和 γ , 3 个坐标平移量 Δx 、 Δy 和 Δz 。

根据选择配准基元的不同,现有点云配准算法主要分为基于同名特征点^[4-8]、基于同名特征线^[9-12]、基于同名特征面约束的点云配准算法^[13-16]。而目前多数点云配准算法都是采用同名特征点作为配准的约束条件,但只选择点作为配准条件时,在某些条件下点云数据可能存在空洞和遮挡,因此难以在相邻测站中采集到精确的同名点,导致基于同名特征点配准的效果并不理想。相比于仅依赖同名特征点,同名特征线和面受到采样密度的影响较小,能够有效减小点的不精确性带来的配准误差。因此,有学者提出将线和面单独或点线面两两组合作为配准基元实现点云配准,并进行了相关的实验研究。张良等^[17]基于点、线的相似不变性实现航空影像与机载 LiDAR 点云自动配准,该方法在完成粗配准的基础上,利用点、线相似不变性在两个数据集中的线配准基元搜索匹配直线对,基于扩展共线方程模型实现精配准。但其旋转矩阵是用欧拉角进行表示,当初始值提供的不够准确时,会出现迭代不收敛现象。Yuan 等^[18]提出了一种激光雷达扫描匹配的算法,该方法首先采用模糊聚类算法先分割点云;然后对每个部分进行加权最小二乘法线性拟合,选出满足线性分布的线段,以计算两次扫描之间的旋转矩阵;最后通过匹配点计算平移向量。由于旋转矩阵和平移向量是分别计算的,其数学逻辑并不严密,存在一定的误差。王永波等^[3]利用点到直线距离为零作为配准基

元,以单位四元素描述点云空间变换的基本算子,提出在点线特征约束下的 Plücker 直线坐标描述的配准模型。但该方法计算出的旋转矩阵仅以单位四元素进行描述,旋转矩阵与平移向量的描述元素之间无内在约束,会存在误差。王永波等^[19]利用线状特征作为配准基元,根据四元素与旋转矩阵的数学关系解算旋转矩阵,而平移向量和尺度因子则是在旋转矩阵已知的基础上进行求解,误差的传递和积累导致配准质量不佳。

旋转矩阵与平移向量分开计算会导致坐标变换时产生不连续性,对偶四元素描述空间变化比四元素具有更严密的逻辑关系,是四元素的进一步的发展^[20]。对偶四元素可以直观地表示空间方位、空间向量间的旋转和平移等关系^[21]。王永波等^[22]将线状特征作为点云配准的基元,以对偶四元素为基础,根据 Plücker 直线坐标与对偶四元素之间的互转关系,提出一种 Plücker 直线无初始值非迭代解法的点云配准算法,但其未考虑尺度因子,限制了应用领域。盛庆红等^[1]利用对偶四元素表示 Plücker 直线的螺旋运动,根据同名直线配准后重合的几何拓扑关系为约束,用最小二乘法解算配准参数,该方法同时解决了 Plücker 直线的旋转与平移,但在建立约束方程时同样未考虑尺度因子。

本文根据点在平面内与点在平面外分别所构向量与平面法向量具有垂直与平行的空间拓扑关系,因此选择点与平面的特征作为点云的配准基元,利用对偶四元素实现空间相似变换基本算子的描述,提出一种在点面特征约束下利用对偶四元素描述的点云配准模型求解方法。

1 综合点面特征约束与对偶四元素描述的点云配准模型构建

1.1 对偶四元素及其空间变换模型

对偶四元素也可称为单位对偶四元素,是由四元素和对偶数发展来的,其定义为^[23]:

$$\hat{s} = \dot{q} + \gamma \dot{p} = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3]^T + \gamma [p_0 \ p_1 \ p_2 \ p_3]^T \quad (1)$$

式中, \dot{q} 和 \dot{p} 都是四元素; \dot{q} 为对偶四元素 \hat{s} 的实部; \dot{p} 为对偶四元素 \hat{s} 的对偶部; γ 为 \hat{s} 对偶算符, 满足 $\gamma^2 = 0$, 且 $\gamma \neq 0$ 。

对偶四元素满足两条基本的性质: 单位性和正交性, 其形式为:

$$\begin{cases} q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \\ p_0 q_0 + p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

根据四元素的乘积性质, 旋转矩阵 R 可用对偶四元素的实部进行表示; 平移四元素 \dot{T} 可以用对偶四元素的实部和对偶部共同表示:

$$\begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = W(\dot{q})^T M(\dot{q}), \dot{T} = W(\dot{q})^T \dot{p} \quad (3)$$

$$\begin{cases} R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \\ T = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(q_0 p_1 - q_1 p_0 + q_2 p_3 - q_3 p_2) \\ 2(q_0 p_2 - q_1 p_3 - q_2 p_0 + q_3 p_1) \\ 2(q_0 p_3 + q_1 p_2 - q_2 p_1 - q_3 p_0) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4)$$

1.2 空间拓扑关系分析与顾及尺度因子的模型优化

如图1所示, 在基准点云所处三维空间中存在一平面 Γ , 点 p_a 和 p_b 分别为平面外与平面内的任意两点。

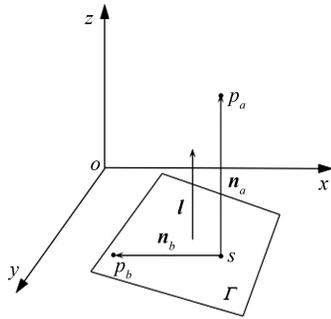


图1 点与平面的几何特征

Fig. 1 Geometric Characteristics of Points and Planes

s 为 p_a 在平面 Γ 上的投影点, 则 s 与 p_a 所构向量为 n_a , s 与 p_b 所构向量为 n_b , l 为平面 Γ 的法向量。由空间向量解析几何知识可知, 两向量平行其叉积为零, 两向量垂直其点积为零, 则可将平面的法向量 l 与向量 n_a 和 n_b 的空间拓扑关系分别表示为:

$$\begin{cases} n_a \times l = 0 \\ n_b \cdot l = 0 \end{cases} \quad (5)$$

式中,

$$W(\dot{q}) = \begin{bmatrix} q_0 I - K(q) & q \\ -q^T & q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & q_3 & -q_2 & q_1 \\ -q_3 & q_0 & q_1 & q_2 \\ q_2 & -q_1 & q_0 & q_3 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 & q_0 \end{bmatrix};$$

$$M(\dot{q}) = \begin{bmatrix} q_0 I + K(q) & q \\ -q^T & q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & -q_3 & q_2 & q_1 \\ q_3 & q_0 & -q_1 & q_2 \\ -q_2 & q_1 & q_0 & q_3 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 & q_0 \end{bmatrix};$$

$K(q)$ 为反对称矩阵。

\dot{T} 是平移向量 T 的平移四元素, 且 $\dot{T} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix}$ 。根据式(1)和式(3), 可将旋转矩阵 R 和平移向量 T 具体表达为:

式中, “ \cdot ”表示向量的点乘。

为了实现点云的空间相似变换, 在待配准点云中选择 p_a 的同名特征点 q_a , 由于平面内任意一条直线的方向向量都与该平面的法向量垂直, 所以在待配准点云中选择与 Γ 同名特征面上的任意一点 q_b 。顾及到尺度因子 λ , 将式(5)改为:

$$\begin{cases} s(\lambda q_a R + T) \times l = 0 \\ s(\lambda q_b R + T) \cdot l = 0 \end{cases} \quad (6)$$

根据配准后同名特征相等作为约束条件, 基于最小二乘准则构建相应的目标函数, 即可通过相应的方法来解算旋转矩阵、平移向量和尺度因子。

1.3 模型空间变换参数求解

由于三维空间向量的表达式具有多样性, 为了准确解算出空间相似变换参数, 空间向量通常要进行单位化。其中 $s = (x_s, y_s, z_s)$, $q_a = (x_a, y_a, z_a)$, $q_b = (x_b, y_b, z_b)$, $n = \frac{(l_x, l_y, l_z)}{\|l\|}$, 代入式(6)并展开得:

$$\begin{cases} n_{y1} n_z - n_{z1} n_y = 0 \\ n_{z1} n_x - n_{x1} n_z = 0 \\ n_{x1} n_y - n_{y1} n_x = 0 \\ n_{x2} n_x + n_{y2} n_y + n_{z2} n_z = 0 \end{cases} \quad (7)$$

式中,

$$n_1 = \frac{\lambda x_a R + T - x_s, \lambda y_a R + T - y_s, \lambda z_a R + T - z_s}{\sqrt{(\lambda x_a R + T - x_s)^2 + (\lambda y_a R + T - y_s)^2 + (\lambda z_a R + T - z_s)^2}}$$

$$n_2 = \frac{\lambda x_b R + T - x_s, \lambda y_b R + T - y_s, \lambda z_b R + T - z_s}{\sqrt{(\lambda x_b R + T - x_s)^2 + (\lambda y_b R + T - y_s)^2 + (\lambda z_b R + T - z_s)^2}}$$

将式(2)与式(7)联列为一个总方程,可得:

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{X}) = n_{y1}n_z - n_{z1}n_y = 0 \\ f_2(\mathbf{X}) = n_{z1}n_x - n_{x1}n_z = 0 \\ f_3(\mathbf{X}) = n_{x1}n_y - n_{y1}n_x = 0 \\ f_4(\mathbf{X}) = n_{x2}n_x + n_{y2}n_y + n_{z2}n_z = 0 \\ f_5(\mathbf{X}) = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 - 1 = 0 \\ f_6(\mathbf{X}) = p_0q_0 + p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

式中, $\mathbf{X} = (q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3 \ p_0 \ p_1 \ p_2 \ p_3 \ \lambda)$ 。式(8)是多元非线性方程组,根据最小二乘准则,需使:

$$\arg \min_{\mathbf{X}} F(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 (f_i(\mathbf{X}))^2 = \frac{1}{2} \mathbf{f}(\mathbf{X})^T \mathbf{f}(\mathbf{X}) \quad (9)$$

现将式(4)代入 $\mathbf{f}(\mathbf{X})$,对 \dot{q}, \dot{p} 和 λ 按照泰勒

级数展开取一次项,可得:

$$\begin{cases} f_1 = f_{10} + a_{11}d_{q_0} + a_{12}d_{q_1} + a_{13}d_{q_2} + a_{14}d_{q_3} + a_{15}d_{p_0} + a_{16}d_{p_1} + a_{17}d_{p_2} + a_{18}d_{p_3} + a_{19}d_{\lambda} \\ f_2 = f_{20} + a_{21}d_{q_0} + a_{22}d_{q_1} + a_{23}d_{q_2} + a_{24}d_{q_3} + a_{25}d_{p_0} + a_{26}d_{p_1} + a_{27}d_{p_2} + a_{28}d_{p_3} + a_{29}d_{\lambda} \\ f_3 = f_{30} + a_{31}d_{q_0} + a_{32}d_{q_1} + a_{33}d_{q_2} + a_{34}d_{q_3} + a_{35}d_{p_0} + a_{36}d_{p_1} + a_{37}d_{p_2} + a_{38}d_{p_3} + a_{39}d_{\lambda} \\ f_4 = f_{40} + a_{41}d_{q_0} + a_{42}d_{q_1} + a_{43}d_{q_2} + a_{44}d_{q_3} + a_{45}d_{p_0} + a_{46}d_{p_1} + a_{47}d_{p_2} + a_{48}d_{p_3} + a_{49}d_{\lambda} \\ f_5 = f_{50} + a_{51}d_{q_0} + a_{52}d_{q_1} + a_{53}d_{q_2} + a_{54}d_{q_3} + a_{55}d_{p_0} + a_{56}d_{p_1} + a_{57}d_{p_2} + a_{58}d_{p_3} + a_{59}d_{\lambda} \\ f_6 = f_{60} + a_{61}d_{q_0} + a_{62}d_{q_1} + a_{63}d_{q_2} + a_{64}d_{q_3} + a_{65}d_{p_0} + a_{66}d_{p_1} + a_{67}d_{p_2} + a_{68}d_{p_3} + a_{69}d_{\lambda} \end{cases} \quad (10)$$

式中,

$$a_{1i} = \frac{1}{m_1} \left(n_y \left(\frac{\partial \Delta_{z1}}{\partial q_{i-1}} m_1 - \frac{1}{2} \Delta_{z1} m_1^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial m_1}{\partial q_{i-1}} \right) - n_z \left(\frac{\partial \Delta_{y1}}{\partial q_{i-1}} m_1 - \frac{1}{2} \Delta_{y1} m_1^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial m_1}{\partial q_{i-1}} \right) \right)$$

$$a_{1j} = \frac{1}{m_1} \left(n_y \left(\frac{\partial \Delta_{z1}}{\partial p_{j-5}} m_1 - \frac{1}{2} \Delta_{z1} m_1^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial m_1}{\partial p_{j-5}} \right) - n_z \left(\frac{\partial \Delta_{y1}}{\partial p_{j-5}} m_1 - \frac{1}{2} \Delta_{y1} m_1^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial m_1}{\partial p_{j-5}} \right) \right)$$

$$a_{19} = \frac{1}{m_1} \left(n_y \left(\frac{\partial \Delta_{z1}}{\partial \lambda} m_1 - \frac{1}{2} \Delta_{z1} m_1^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial m_1}{\partial \lambda} \right) - n_z \left(\frac{\partial \Delta_{y1}}{\partial \lambda} m_1 - \frac{1}{2} \Delta_{y1} m_1^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial m_1}{\partial \lambda} \right) \right)$$

$$a_{2i} = \frac{1}{m_1} \left(n_z \left(\frac{\partial \Delta_{x1}}{\partial q_{i-1}} m_1 - \frac{1}{2} \Delta_{x1} m_1^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial m_1}{\partial q_{i-1}} \right) - n_x \left(\frac{\partial \Delta_{z1}}{\partial q_{i-1}} m_1 - \frac{1}{2} \Delta_{z1} m_1^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial m_1}{\partial q_{i-1}} \right) \right)$$

$$a_{2j} = \frac{1}{m_1} \left(n_z \left(\frac{\partial \Delta_{x1}}{\partial p_{j-5}} m_1 - \frac{1}{2} \Delta_{x1} m_1^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial m_1}{\partial p_{j-5}} \right) - n_x \left(\frac{\partial \Delta_{z1}}{\partial p_{j-5}} m_1 - \frac{1}{2} \Delta_{z1} m_1^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial m_1}{\partial p_{j-5}} \right) \right)$$

$$a_{29} = \frac{1}{m_1} \left(n_z \left(\frac{\partial \Delta_{x1}}{\partial \lambda} m_1 - \frac{1}{2} \Delta_{x1} m_1^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial m_1}{\partial \lambda} \right) - n_x \left(\frac{\partial \Delta_{z1}}{\partial \lambda} m_1 - \frac{1}{2} \Delta_{z1} m_1^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial m_1}{\partial \lambda} \right) \right)$$

$$a_{3i} = \frac{1}{m_1} \left(n_x \left(\frac{\partial \Delta_{y1}}{\partial q_{i-1}} m_1 - \frac{1}{2} \Delta_{y1} m_1^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial m_1}{\partial q_{i-1}} \right) - n_y \left(\frac{\partial \Delta_{x1}}{\partial q_{i-1}} m_1 - \frac{1}{2} \Delta_{x1} m_1^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial m_1}{\partial q_{i-1}} \right) \right)$$

$$a_{3j} = \frac{1}{m_1} \left(n_x \left(\frac{\partial \Delta_{y1}}{\partial p_{j-5}} m_1 - \frac{1}{2} \Delta_{y1} m_1^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial m_1}{\partial p_{j-5}} \right) - n_y \left(\frac{\partial \Delta_{x1}}{\partial p_{j-5}} m_1 - \frac{1}{2} \Delta_{x1} m_1^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial m_1}{\partial p_{j-5}} \right) \right)$$

$$a_{39} = \frac{1}{m_1} \left(n_x \left(\frac{\partial \Delta_{y1}}{\partial \lambda} m_1 - \frac{1}{2} \Delta_{y1} m_1^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial m_1}{\partial \lambda} \right) - n_y \left(\frac{\partial \Delta_{x1}}{\partial \lambda} m_1 - \frac{1}{2} \Delta_{x1} m_1^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial m_1}{\partial \lambda} \right) \right)$$

$$a_{4i} = \frac{1}{m_2} \left(n_x \left(\frac{\partial \Delta_{x2}}{\partial q_{i-1}} m_2 - \frac{1}{2} \Delta_{x2} m_2^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial m_2}{\partial q_{i-1}} \right) + n_y \left(\frac{\partial \Delta_{y2}}{\partial q_{i-1}} m_2 - \frac{1}{2} \Delta_{y2} m_2^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial m_2}{\partial q_{i-1}} \right) + n_z \left(\frac{\partial \Delta_{z2}}{\partial q_{i-1}} m_2 - \frac{1}{2} \Delta_{z2} m_2^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial m_2}{\partial q_{i-1}} \right) \right)$$

$$a_{4j} = \frac{1}{m_2} \left(n_x \left(\frac{\partial \Delta_{x2}}{\partial p_{j-5}} m_2 - \frac{1}{2} \Delta_{x2} m_2^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial m_2}{\partial p_{j-5}} \right) + n_y \left(\frac{\partial \Delta_{y2}}{\partial p_{j-5}} m_2 - \frac{1}{2} \Delta_{y2} m_2^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial m_2}{\partial p_{j-5}} \right) + n_z \left(\frac{\partial \Delta_{z2}}{\partial p_{j-5}} m_2 - \frac{1}{2} \Delta_{z2} m_2^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial m_2}{\partial p_{j-5}} \right) \right)$$

$$a_{49} = \frac{1}{m_2} \left(n_x \left(\frac{\partial \Delta_{x2}}{\partial \lambda} m_2 - \frac{1}{2} \Delta_{x2} m_2^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial m_2}{\partial \lambda} \right) + n_y \left(\frac{\partial \Delta_{y2}}{\partial \lambda} m_2 - \frac{1}{2} \Delta_{y2} m_2^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial m_2}{\partial \lambda} \right) + n_z \left(\frac{\partial \Delta_{z2}}{\partial \lambda} m_2 - \frac{1}{2} \Delta_{z2} m_2^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial m_2}{\partial \lambda} \right) \right)$$

$$a_{51} = 2q_0, a_{52} = 2q_1, a_{53} = 2q_2, a_{54} = 2q_3, a_{55} = a_{56} = a_{57} = a_{58} = a_{59} = 0$$

$$a_{61} = p_0, a_{62} = p_1, a_{63} = p_2, a_{64} = p_3, a_{65} = q_0, a_{66} = q_1, a_{67} = q_2, a_{68} = q_3, a_{69} = 0$$

其中,

$$\begin{aligned}\Delta_{x1} &= \lambda(x_a r_{11} + y_a r_{12} + z_a r_{13}) + t_x - x_s \\ \Delta_{x2} &= \lambda(x_b r_{11} + y_b r_{12} + z_b r_{13}) + t_x - x_s \\ \Delta_{y1} &= \lambda(x_a r_{21} + y_a r_{22} + z_a r_{23}) + t_y - y_s \\ \Delta_{y2} &= \lambda(x_b r_{21} + y_b r_{22} + z_b r_{23}) + t_y - y_s \\ \Delta_{z1} &= \lambda(x_a r_{31} + y_a r_{32} + z_a r_{33}) + t_z - z_s \\ \Delta_{z2} &= \lambda(x_b r_{31} + y_b r_{32} + z_b r_{33}) + t_z - z_s \\ m_1 &= n_{x1}^2 + n_{y1}^2 + n_{z1}^2, m_2 = n_{x2}^2 + n_{y2}^2 + n_{z2}^2 \\ i &= 1, 2, 3, 4; j = 5, 6, 7, 8\end{aligned}$$

式中, $f_{10} \sim f_{60}$ 为 $(q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3 \ p_0 \ p_1 \ p_2 \ p_3 \ \lambda)$ 的初始值 X_0 代入式(8)得到 $f_1(X) \sim f_6(X)$ 的近似值; 式(10)中的 $(d_{q_0} \ d_{q_1} \ d_{q_2} \ d_{q_3} \ d_{p_0} \ d_{p_1} \ d_{p_2} \ d_{p_3} \ d_\lambda)$ 分别为 $(q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3 \ p_0 \ p_1 \ p_2 \ p_3 \ \lambda)$ 的改正数。

将式(10)表示为误差方程的矩阵形式为:

$$JH + Y = V \quad (11)$$

式中, J 为雅克比矩阵, 是 X 改正数的系数矩阵;

$$J = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} & a_{19} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} & a_{29} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{38} & a_{39} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48} & a_{49} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} & a_{58} & a_{59} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} & a_{68} & a_{69} \end{bmatrix}$$

$$H = [d_{q_0} \ d_{q_1} \ d_{q_2} \ d_{q_3} \ d_{p_0} \ d_{p_1} \ d_{p_2} \ d_{p_3} \ d_\lambda]^T$$

$$Y = [f_{10} \ f_{20} \ f_{30} \ f_{40} \ f_{50} \ f_{60}]^T$$

$$V = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ f_5 \ f_6]^T$$

本文所提点云配准模型需要计算9个参数, 包括: 对偶四元素的8个元素和1个尺度因子, 而根据式(7)一组同名特征点面可列出4个方程, 因此至少需要2组及以上的同名特征点面所列方程加入到式(8)才能准确解算出所求参数。

式(11)中, J 是 $(4n+2) \times 9$ 维矩阵, Y 和 V 是 $4n+2$ 维矩阵。为了避免可能因为初始值 X_0 的不恰当性, 或因雅克比矩阵 J 所构建的实对称矩阵 $J^T J$ 接近奇异时导致迭代不收敛, 本文采用 LM(Levenberg-Marquardt)法进行解算^[24-25]。LM法是 高斯-牛顿法和下降法的一种结合, 其迭代公式为:

$$\begin{cases} X_{k+1} = X_k + H_k \\ H_k = -[J(X_k)^T J(X_k) + \mu I]^{-1} J(X_k)^T f(X_k) \end{cases} \quad (12)$$

式中, H_k 为 X_k 第 k 次的改正数; $J(X_k) = J$ 为 X_k 第 k 次的迭代值代入矩阵 J 得到的值; I 是单位矩阵; $f(X_k)$ 为 X_k 第 k 次的迭代值代入式(8)所得残差, 也就是式(11)中矩阵 Y 的值; μ 是惩罚因子且 $\mu \geq 0$, 用于控制 $J(X_k)^T J(X_k)$ 接近奇异时算法的

特性, 该因子的作用为: $\mu > 0$, 能使协方差矩阵 $[J(X_k)^T J(X_k) + \mu I]$ 正定, 确保迭代下降方向正确; $\mu \rightarrow \infty$, 迭代退化为梯度下降法; $\mu \rightarrow 0$, 迭代退化为高斯-牛顿法。

对于 LM 法的迭代公式惩罚因子 μ 的值是其迭代收敛的关键, 而 μ 的初始值 μ_0 与 $J(X_0)^T J(X_0)$ 矩阵的元素有关, 定义为:

$$\mu_0 = \tau \max_i \{v_{ii}^0\} \quad (13)$$

式中, $\tau = 1 \times 10^{-3}$; v_{ii}^0 为 $J(X_0)^T J(X_0)$ 矩阵的对角线元素。

μ 的更新由系数 σ 来控制, σ 的定义式为:

$$\sigma = \frac{F(X_k) - F(X_k + H_k)}{L(0) - L(H_k)} \quad (14)$$

式中, $F(X_k)$ 为 X_k 代入式(9)的值; $L(H_k)$ 是 $F(X_k + H_k)$ 的近似函数; $F(X_k) - F(X_k + H_k)$ 为 $F(X_k)$ 在第 k 步的实际下降量; $L(0) - L(H_k)$ 为 $F(X_k)$ 在第 k 步的预测下降量。因此在迭代过程中:

$$\mu_{k+1} = \begin{cases} \mu_k \max\left\{\frac{1}{3}, 1 - (2\sigma - 1)^3\right\}, v_{k+1} = 2, \sigma > 0 \\ \mu_k v_k, v_{k+1} = 2v_k, \sigma \leq 0 \end{cases} \quad (15)$$

式中, v 的初始值 $v_0 = 2$, 其作用为当 $\sigma \leq 0$, 说明 $L(H_k)$ 远离 $F(X_k + H_k)$, 此时需要增大惩罚因子, 减小步长。

在迭代过程中, 当 $\|g\| = \|J(X_k)^T f(X_k)\| < \epsilon_1$, 或 $\|X_{k+1} - X_k\| < \epsilon_2 (\|X_k\| + \epsilon_2)$, 或迭代次数 $k > k_{\max}$ 满足其一, 则迭代终止。

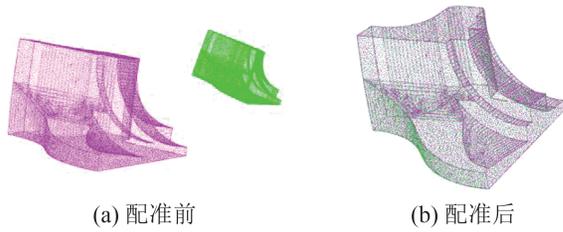
2 实验与分析

本文提出在点面特征约束下利用对偶四元素描述的点云配准模型求解方法利用 Visual Studio 2015 C++ 编程实现, 实验中设计了模拟数据实验和实测数据实验来验证分析本文所提方法的可行性和有效性。两个实验 $X_0 = (111111111)$, 实验中通过人机交互的方式提取同名特征点面, 两个实验分别提取了5组同名特征点面。

2.1 模拟数据实验

采用经典 Fandisk 模型数据进行模拟实验分析。原始点云数据作为基准点云(浅紫色), 将原始点云分别绕 X 、 Y 、 Z 轴旋转 10° 和平移 1m 、 1m 、 -1m 作为待配准点云(绿色), 且待配准点云 x 、 y 、 z 分别缩小 0.5 倍, 如图 2(a) 所示, 并根据

这些值计算出理论配准参数,图 2(b)为本文参数配准后的视觉效果,表 1 统计了理论配准参数和应用本文方法解算出的配准参数。



(a) 配准前 (b) 配准后

图 2 Fandisk 点云数据。

Fig. 2 Point Clouds of Fandisk

表 1 理论配准参数与解算出的配准参数

Tab. 1 Theoretical Values and Calculated Registration Parameters

统计项	旋转矩阵 R			平移向量		尺度因子 λ
				T/m		
理论值	0.969 8	-0.141 3	0.198 6	-3.477 4		2.000 0
	0.171 0	0.975 1	-0.141 3	-10.821 8		
	-0.173 6	0.171 0	0.969 8	1.067 1		
解算值	0.969 5	-0.141 5	0.198 2	-3.477 8		2.000 0
	0.170 6	0.975 4	-0.141 0	-10.822 1		
	-0.173 2	0.171 2	0.969 6	1.066 9		

从图 2(b)的视觉效果和表 1 可以看出,本文方法解算的配准参数与理论值基本一致,说明本文方法具有可行性。表 2 统计了配准后 5 组同名特征平面法向量的残差($\Delta n_x, \Delta n_y, \Delta n_z$)及其中误差(root mean square error, RMSE)的 $m_{\Delta n}$ 、平面距

离偏差 Δd 及其 RMSE 的 $m_{\Delta d}$ 。

表 2 同名特征平面法向量和平面距离的残差及其 RMSE

Tab. 2 Residuals of Normal and Planar Distances of Same Name Feature Plane and Their RMSE

$\Delta n_x/10^{-3}$	$\Delta n_y/10^{-3}$	$\Delta n_z/10^{-3}$	$m_{\Delta n}/10^{-3}$	$\Delta d/mm$	$m_{\Delta d}/mm$
-0.001	-0.007	0.002		0.014 5	
0.000	0.019	-0.028		0.017 2	
-0.038	0.049	0.382	0.251	0.014 9	0.015 2
0.044	0.310	-0.058		0.015 2	
0.000	-0.002	0.001		0.014 3	

表 2 的结果显示,5 组同名特征平面的法向量残差 RMSE 为 0.000 251,平面距离偏差的 RMSE 为 0.015 2 mm,表明对模拟实验数据具有较高的配准精度。

考虑到实际场景中采集到的点云数据通常会含有一定的噪声点或在选取同名特征点面时并不精确,现对待配准点云添加均值为 0、标准差为 0.001~0.01 m 的高斯噪声。由于噪声产生具有随机性,为了保证实验结果的稳定性与可靠性,在标准差相同的情况下,对待配准点云添加 200 次噪声,利用箱线图统计配准后的同名平面距离偏差和法向量残差,如图 3 所示。箱线图的最上方和最下方的线段分别表示数据的上限值和下限值,矩形内的实线表示数据的中位数,矩形的上限和下限分别表示数据的上四分位数和下四分位数,虚线为触须线,黑点表示异常值。

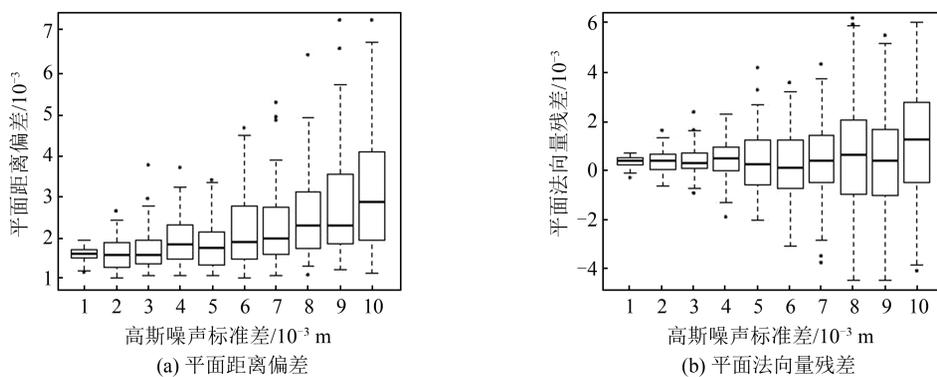


图 3 不同标准差配准后的同名平面精度

Fig. 3 Plane Accuracy of Same Name After Registration with Different Standard Deviations

从图 3 可以看出,当高斯噪声标准差逐渐增大时,平面距离偏差和法向量残差同样增大,平面距离偏差在 1~6.5 mm,平面法向量残差在 -0.004~0.006。因此可以说明本文方法在噪声干扰下仍能解算较高精度的配准参数,具有一定的鲁棒性。

2.2 实测数据实验

为了验证本文方法的实际应用,采用由武汉大学对外开放的 WHU-TLS Dataset^[26-28] 中的 Campus 数据集进行实验,并分别与文献[3]和文献[9]所提方法计算的配准参数和同名特征平面之间的差值进行对比分析。

Campus数据集是应用Riegl VZ400三维激光扫描仪采集到的点云数据,实验中选择测站2和测站3扫描的数据进行实验,其中测站2扫描的数据作为待配准点云数据(绿色),测站3扫描的数据作为基准点云数据(浅紫色),两个测站间的尺度因子为1,如图4(a)所示。图4(b)、图4(c)和图4(d)分别为本文、文献[3]与文献[9]配准后的视觉效果,不同方法计算的配准参数如表3所示。

从表3可以看出本文所提方法的计算结果与另外两种基本一致,3种方法计算的尺度因子都接近1,说明本文所提方法是可行的。从图4配准后的视觉效果同样可以看出本文所提方法具有可行性。为了更加直观地对三种配准方法的配准精度进行对比分析,表4统计了配准后5组同

名特征平面法向量的残差($\Delta n_x, \Delta n_y, \Delta n_z$)及其RMSE的 $m_{\Delta n}$ 、平面距离偏差 Δd 及其RMSE的 $m_{\Delta d}$ 。

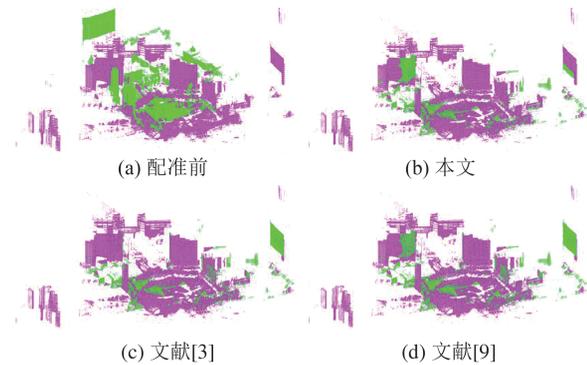


图4 Campus测站2与测站3点云数据

Fig. 4 Point Cloud Data of Station 2 and Station 3 of Campus

表3 不同方法解算的配准参数

Tab. 3 Registration Parameters Calculated by Different Methods

方法	旋转矩阵 R			平移向量 T/m	尺度因子 λ
本文	-0.208 7	0.978 3	0.000 1	10.789 8	1.000 4
	-0.978 2	-0.208 7	0.000 0	-50.956 2	
	0.000 0	0.000 0	1.000 0	-0.409 3	
文献[3]	-0.209 4	0.978 4	0.000 1	10.786 7	0.999 5
	-0.977 3	-0.208 2	0.000 0	-50.959 2	
	0.000 0	0.000 0	1.000 0	-0.408 4	
文献[9]	-0.209 1	0.977 7	0.000 0	10.788 4	0.999 9
	-0.977 9	-0.207 8	0.000 0	-50.953 5	
	0.000 0	0.000 1	1.000 0	-0.405 9	

表4 不同方法配准后同名特征平面法向量和平面距离的残差及其RMSE

Tab. 4 Residuals of Normal and Planar Distances of Same Name Feature Plane and Their RMSE After Registration by Different Methods

方法	Δn_x	Δn_y	Δn_z	$m_{\Delta n}$	$\Delta d/mm$	$m_{\Delta d}/mm$
本文	-0.001 5	0.004 2	-0.001 1	0.024 8	0.071 3	0.069 8
	-0.005 0	-0.002 1	0.004 4		0.059 8	
	0.046 6	0.011 5	0.007 6		0.055 0	
	0.001 0	0.000 9	-0.005 0		0.065 2	
	-0.000 8	0.000 3	0.000 0		0.059 8	
文献[3]	-0.001 6	0.004 3	-0.001 2	0.025 5	0.088 4	0.082 2
	-0.005 3	-0.002 6	0.004 8		0.077 4	
	0.047 7	0.012 4	0.008 3		0.069 8	
	0.001 7	0.000 4	-0.005 0		0.068 3	
	-0.000 9	0.000 5	0.000 0		0.060 9	
文献[9]	-0.001 7	0.004 5	-0.001 8	0.025 0	0.051 5	0.070 0
	-0.005 5	-0.002 3	0.005 1		0.076 6	
	0.045 6	0.014 9	0.007 9		0.056 5	
	0.001 2	0.001 9	-0.005 8		0.062 4	
	-0.000 8	0.000 3	0.000 0		0.063 1	

从表4可知,本文所提方法与文献[3]和文献[9]配准后同名特征平面法向量之间的残差中

误差和平面距离偏差的中误差相差都较小,从这两个值可以看出本文所提方法的配准精度均优

于文献[3]和文献[9]所提方法的配准精度,其中文献[3]所提方法的配准精度最差,这是因为该方法配准时将旋转参数、平移参数和尺度因子分开计算,存在一定的耦合误差。文献[9]虽然基于对偶四元数构建直线基元实现点云配准,但该方法在构建点云配准模型时仅考虑线特征,在计算旋转矩阵和平移向量时未顾及尺度因子,同样会导致一定的耦合误差,而本文所提方法在配准时选择了较易提取的同名特征平面,根据点与平面的拓扑关系选取特征点,同时顾及到尺度因子,加强了点云配准模型的几何约束。且一组同名特征点面只选取一个特征点,代入配准模型的误差也会相对较小,因此文献[9]的配准精度略低于本文方法配准精度。

通过视觉效果和配准误差说明本文所提方法具备实际应用价值。

3 结 语

本文提出一种在点面特征约束下基于对偶四元素描述的点云配准模型求解方法,首先在利用单位对偶四元素描述空间物体螺旋运动的同时顾及到了尺度因子,能完成不同尺度的点云数据配准;然后根据点在平面内与平面外所构向量与平面法向量的空间拓扑关系构建点云配准模型。

通过两个实验对比分析,本文较强的几何约束性说明点面特征约束的可行性和有效性。本文利用对偶四元素描述空间物体的相似变换,理论上,避免了单位四元素法将旋转矩阵和平移向量单独计算所导致的耦合误差,提高了配准精度,且本文引入LM法解算配准模型,无需提供较好的初始值也能实现迭代方程的快速收敛。另外,相比于仅依靠点、线两类特征,同名平面特征的提取精度更高且方便,在城市三维建模中,本文方法可基于建筑物中存在大量的平面特征实现多测站点云数据的配准。

由于本文的配准模型仅考虑了点面特征,而建筑物中同样存在大量的直线特征,下一步的工作将同时考虑点、线、面3种特征构建相应的点云配准模型,为实现更高精度和更快速度的点云配准提供有效的方法。

参 考 文 献

[1] Sheng Qinghong, Chen Shuwen, Liu Jianfeng, et al.

LiDAR Point Cloud Registration Based on Plücker Line[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2016, 45(1): 58-64. (盛庆红, 陈姝文, 柳建锋, 等. 基于Plücker直线的LiDAR点云配准法[J]. 测绘学报, 2016, 45(1): 58-64.)

- [2] Yan Li, Liu Hua, Chen Changjun, et al. A Calibration Method of Mobile Laser System Without Control Points[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2015, 40(8): 1018-1022. (闫利, 刘华, 陈长军, 等. 无地面控制点的车载激光扫描系统外标定方法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2015, 40(08): 1018-1022.)
- [3] Wang Yongbo, Wang Yunjia, Han Xinzhe, et al. A Unit Quaternion Based, Point-Linear Feature Constrained Registration Approach for Terrestrial LiDAR Point Clouds[J]. *Journal of China University of Mining & Technology*, 2018, 47(3): 671-677. (王永波, 汪云甲, 韩新哲, 等. 点线特征约束下基于单位四元数描述的LiDAR点云配准算法[J]. 中国矿业大学学报, 2018, 47(3): 671-677.)
- [4] Wang Chang, Shu Qin, Yang Yunxiu, et al. Quick Registration Algorithm of Point Clouds Using Structure Feature[J]. *Acta Optica Sinica*, 2018, 38(9): 175-182. (王畅, 舒勤, 杨秀琴, 等. 利用结构特征点云快速配准算法[J]. 光学学报, 2018, 38(9): 175-182.)
- [5] Nakamura T, Wakita S. Robust Global Scan Matching Method Using Congruence Transformation Invariant Feature Descriptors and a Geometric Constraint Between Keypoints[C]// IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics, San Diego, USA, 2014.
- [6] Jensfelt P, Kristensen S. Active Global Localization for a Mobile Robot Using Multiple Hypothesis Tracking[J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2001, 17(5): 748-760.
- [7] Guo Y L, Bennamoun M, Sohel F, et al. A Comprehensive Performance Evaluation of 3D Local Feature Descriptors[J]. *International Journal of Computer Vision*, 2016, 116(1): 66-89.
- [8] Ge X M. Automatic Markerless Registration of Point Clouds with Semantic-Keypoint-Based 4-Points Congruent Sets[J]. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 2017, 130: 344-357.
- [9] Chai Shuangwu, Yang Xiaoqin. Line Primitive Point Cloud Registration Method Based on Dual Quaternion[J]. *Acta Optica Sinica*, 2019, 39(12): 416-424. (柴双武, 杨晓琴. 基于对偶四元数构建的直线基元点云拼接方法[J]. 光学学报, 2019, 39(12): 416-424.)

- [10] Li J, Zhong R, Hu Q, et al. Feature-Based Laser Scan Matching and Its Application for Indoor Mapping[J]. *Sensors*, 2016, 16(8): 1265.
- [11] Núñez P, Vázquez M N, Toro J, et al. Natural Landmark Extraction for Mobile Robot Navigation Based on an Adaptive Curvature Estimation[J]. *Robotics and Autonomous Systems*, 2008, 56(3): 247-264.
- [12] Yang B S, Dong Z, Liang F X, et al. Automatic Registration of Large-Scale Urban Scene Point Clouds Based on Semantic Feature Points [J]. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 2016, 113: 43-58.
- [13] Zhang J, Singh S. Low-Drift and Real-Time LiDAR Odometry and Mapping[J]. *Autonomous Robots*, 2017, 41(2): 401-416.
- [14] Zheng Dehua, Yue Dongjie, Yue Jianping. Geometric Feature Constraint Based Algorithm for Building Scanning Point Cloud Registration[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2008, 37(4): 464-468. (郑德华, 岳东杰, 岳建平. 基于几何特征约束的建筑物点云配准算法[J]. 测绘学报, 2008, 37(4): 464-468.)
- [15] Zhang D, Huang T, Li G, et al. Robust Algorithm for Registration of Building Point Clouds Using Planar Patches[J]. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 2012, 138(1): 31-37.
- [16] Wang H, Wang X. 3D Registration Based on Planar Feature Segmentation and Plane Fit [J]. *Applied Mechanics and Materials*, 2012, 233: 274-277.
- [17] Zhang Liang, Ma Hongchao, Gao Guang, et al. Automatic Registration of Urban Aerial Images with Airborne LiDAR Points Based on Line-Point Similarity Invariants[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2014, 43(4): 372-379. (张良, 马洪超, 高广, 等. 点、线相似不变性的城区航空影像与机载激光雷达点云自动配准[J]. 测绘学报, 2014, 43(4): 372-379.)
- [18] Yuan X, Zhao C, Tang Z, et al. LiDAR Scan-Matching for Mobile Robot Localization from 3D Point Clouds[J]. *Information Technology Journal*, 2010, 9(1): 27-33.
- [19] Wang Yongbo, Yang Huachao, Liu Yanhua, et al. Linear-Feature-Constrained Registration of LiDAR Point Cloud via Quaternion [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2013, 38(9): 1057-1062. (王永波, 杨化超, 刘燕华, 等. 线状特征约束下基于四元数描述的LiDAR点云配准方法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2013, 38(9): 1057-1062.)
- [20] Gong Hui, Jiang Ting, Jiang Gangwu, et al. Bundle Block Adjustment of Aerial Imagery Based on Unit Dual Quaternion [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2012, 37(2): 154-159. (龚辉, 姜挺, 江刚武, 等. 利用单位对偶四元数进行航空影像区域网平差解算[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2012, 37(2): 154-159.)
- [21] Ji Ting, Sheng Qinghong, Wang Huinan, et al. Dual Quaternion of Space Resection with Single-Image [J]. *Journal of Image and Graphics*, 2012, 17(4): 494-503. (姬亭, 盛庆红, 王惠南, 等. 对偶四元数单片空间后方交会算法[J]. 中国图象图形学报, 2012, 17(4): 494-503.)
- [22] Wang Yongbo, Wang Yunjia, She Wenwen, et al. A Linear Features-Constrained, Plücker Coordinates-Based, Closed-Form Registration Approach to Terrestrial LiDAR Point Clouds [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2018, 43(9): 1376-1384. (王永波, 汪云甲, 余雯雯, 等. 直线特征约束下利用Plücker坐标描述的LiDAR点云无初值配准方法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2018, 43(9): 1376-1384.)
- [23] Sheng Qinghong, Liu Jianfeng, Yu Mengxin, et al. Aerial Triangulation Close-Range Images with Dual Quaternion [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2015, 44(5): 503-509. (盛庆红, 柳建锋, 虞梦昕, 等. 对偶四元数近景影像空中三角测量法[J]. 测绘学报, 2015, 44(5): 503-509.)
- [24] Ueda K, Yamashita N. On a Global Complexity Bound of the Levenberg-Marquardt Method [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2010, 147(3): 443-453.
- [25] Chen L, Ma Y. Shamanskii-Like Levenberg-Marquardt Method with a New Line Search for Systems of Nonlinear Equations [J]. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2020, 33(5): 1694-1707.
- [26] Dong Z, Yang B, Liu Y, et al. A Novel Binary Shape Context for 3D Local Surface Description [J]. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 2017, 130: 431-452.
- [27] Dong Z, Yang B, Liang F, et al. Hierarchical Registration of Unordered TLS Point Clouds Based on Binary Shape Context Descriptor [J]. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 2018, 144: 61-79.
- [28] Dong Z, Liang F, Yang B, et al. Registration of Large-Scale Terrestrial Laser Scanner Point Clouds: A Review and Benchmark [J]. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 2020, 163: 327-342.