引文格式: 鲁铁定,徐华卿,贺小星,等.等价条件闭合差最小范数分量的GNSS坐标时间序列噪声估计[J].武汉大学学报(信息科学版),2023,48(8):1331-1339.DOI:10.13203/j.whugis20210108

Citation: LU Tieding, XU Huaqing, HE Xiaoxing, et al. GNSS Coordinate Time Series Noise Estimation Based on Minimum Norm Component of Closure Error Under Equivalent Conditions[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2023, 48(8):1331-1339.DOI:10.13203/j.whugis20210108

等价条件闭合差最小范数分量的GNSS坐标时间序列噪声估计

鲁铁定[1] 徐华卿[1] 贺小星[2] 卢立果[1] 周世健[3]

1 东华理工大学测绘工程学院,江西 南昌,330013

2 江西理工大学土木与测绘工程学院,江西 赣州,341000

3 南昌航空大学,江西 南昌,330063

摘 要: 为了精确高效地求解全球导航卫星系统(global navigation satellite system,GNSS)坐标时间序列噪声分量,结合等价条件平差模型以及最小范数二次无偏估计法,提出等价条件闭合差最小范数分量估计方法。首先,采用等价条件闭合差构造二次型方差估计公式,结合不变性、无偏性、最小范数准则等条件,导出基于等价条件闭合差的方差-协方差分量最小范数估计公式;然后,采用最小二乘方差分量估计(least-squares variance component estimation,LS-VCE)法、最小范数二次无偏估计法(minimum norm quadratic unbiased estimate,MINQUE)验证所提方法的正确性及有效性。通过模拟时间序列和北美GNSS站坐标时间序列的噪声估计结果发现,所提方法与LS-VCE法和MINQUE法的估计效果一致,但计算时间相较于LS-VCE法减少了70%以上。

关键词: 等价条件平差模型;闭合差;最小范数分量;GNSS坐标时间序列;噪声估计

中图分类号: P228;P207 **文献标识码:** A **收稿日期:** 2021-01-05

DOI: 10.13203/j.whugis20210108 **文章编号:** 1671-8860(2023)08-1331-09

GNSS Coordinate Time Series Noise Estimation Based on Minimum Norm Component of Closure Error Under Equivalent Conditions

LU Tieding[1] *XU Huaqing*[1] *HE Xiaoxing*[2] *LU Liguo*[1] *ZHOU Shijian*[3]

1 School of Surveying and Mapping Engineering, East China University of Technology, Nanchang 330013, China

2 School of Civil and Surveying and Mapping Engineering, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou 341000, China

3 Nanchang Hangkong University, Nanchang 330063, China

Abstract: Objectives: In order to solve the problem of the accuracy and efficiency of the noise component of the global navigation satellite system (GNSS) coordinate time series, combined with the equivalent conditional adjustment model and the minimum norm quadratic unbiased estimation method, an equivalent conditional closure error minimum norm component estimation method is proposed. **Methods:** First, we use the equivalent conditional closure error to construct the quadratic variance estimation formula, and combine the conditions of invariance, unbiasedness, and minimum norm criterion to derive the minimum norm estimation formula of the variance-covariance component based on the equivalent conditional closure error. Second, least-squares variance component estimation(LS-VCE) method, minimum norm quadratic unbiased estimate (MINQUE) method and our proposed method are used to calculate the noise amplitude of simulated time series and North American GNSS station coordinate time series respectively, and the calculation time of our method and LS-VCE method are calculated. **Results and Conclusions:** The estima-

基金项目: 国家自然科学基金(42061077,42064001,42104023);江西省自然科学基金(20202BAB214029);江西理工大学高层次人才科研启动项目(2021205200100564)。

第一作者: 鲁铁定,博士,教授,研究方向为测量数据处理、GNSS导航定位。tdlu@whu.edu.cn

通讯作者: 徐华卿,硕士。897949040@qq.com

tion effect of the MINQUE method is consistent, and its calculation time decreases over 70% of the LS-VCE method, which verifies the correctness and the effectiveness of the proposed method.

Key words: equivalent conditional adjustment model; closure error; minimum norm component; GNSS coordinate time series; noise estimation

现代大地测量可实现连续、动态观测,以全球导航卫星系统(global navigation satellite system,GNSS)为主的卫星导航定位基准站网近年来发展飞速,为大地测量的应用领域提供了高精度的空间基准基础设施[1]。GNSS坐标时间序列可以为地壳形变监测、参考框架建立等研究提供基础数据,因此被广泛应用于大地测量学及地球动力学研究[2]。由于受电离层误差、多路径效应、地理环境等多种因素的影响,GNSS坐标时间序列中包含信号和误差(噪声)两部分[2-3],采用有效方法估计出噪声中各个分量的振幅,从而建立有效的噪声模型,进而精确地估计速度、周期项等运动参数,有助于地壳形变监测以及构建参考框架。目前时间序列噪声估计普遍采用方差-协方差分量估计法[4],近年来国内外学者针对方差-协方差分量估计问题进行了大量的研究,一种是以平差结果作为输入变量的方法,例如最小二乘方差分量估计法(least-squares variance component estimation,LS-VCE)[5-9]、Helmert法[10-12]、极大似然方差协方差分量估计法(maximum likelihood variance covariance estimation,MLE-VCE)[13-14]、最小范数二次无偏估计法(minimum norm quadratic unbiased estimate,MINQUE)[15-19]、最优不变二次无偏估计法(best invariant quadratic unbiased estimation,BIQUE)[20]、等效残差法[21-22]等;另一种是以等价条件闭合差为输入量的解析型VCE方法,例如等价条件闭合差方差分量估计法(variance-covariance component estimation based on equivalent condition misclosure, VCE-ECM)[23-25]。

文献[21-22]发现LS-VCE法可以导出MINQUE法的方差-协方差分量估计公式,具有无偏性;文献[24-25]发现基于等价条件平差模型的VCE-ECM法以等价条件闭合差作为基本输入量,减少了平差值求解或残差的计算;文献[4]指出在时间序列噪声估计的效果方面相较于MLE-VCE方法、LS-VEC方法,MINQUE方法为最优的噪声方差分量估计方法。鉴于此,本文采用等价条件闭合差构造二次型方差估计量,结合最小范数无偏估计,导出了基于等价条件闭合差最小范数分量估计方法(简称MINQUE-ECM法)。通过模拟的时间序列数据以及北美实测的GNSS站坐标时间序列对所提方法进行验证,分析其正确性和有效性。

1 等价条件平差模型

设概括条件平差模型为[23-24]:

$$\begin{bmatrix} \underset{c\times n}{\boldsymbol{A}} \\ \underset{s\times n}{0} \end{bmatrix} \underset{n\times 1}{\boldsymbol{V}} + \begin{bmatrix} \underset{c\times u}{\boldsymbol{B}} \\ \underset{s\times u}{\boldsymbol{C}} \end{bmatrix} \underset{u\times 1}{\boldsymbol{x}} - \begin{bmatrix} \underset{c\times 1}{\boldsymbol{W}} \\ \underset{s\times 1}{\boldsymbol{Z}} \end{bmatrix} = \underset{(c+s)\times 1}{0}, \underset{n\times n}{\boldsymbol{D}_L} \tag{1}$$

式中,$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$均为行满秩系数矩阵;$\boldsymbol{W}$为具有参数的条件方程闭合差;$\boldsymbol{Z}$为限制条件方程闭合差;$\boldsymbol{D}_L$为观测值$L$的方差阵;$\boldsymbol{V}$、$\boldsymbol{x}$分别为待求的残差与参数向量;$c$、$s$分别为条件方程的个数和限制条件方程个数;$n$、$u$分别为观测数和参数个数。平差模型自由度$r=(c+s)-u$。

令矩阵$\bar{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}]$,利用正交投影矩阵$\boldsymbol{H}$消去参数向量,即[23-24]:

$$\begin{cases} \underset{r\times(c+s)}{\boldsymbol{H}} \underset{(c+s)\times u}{\bar{\boldsymbol{B}}} = \underset{r\times u}{0} \\ \underset{r\times(c+s)}{\boldsymbol{H}} = \begin{bmatrix} -\underset{r\times u}{\bar{\boldsymbol{B}}_r} \underset{u\times u}{\bar{\boldsymbol{B}}_u^{-1}} & \underset{r\times r}{\boldsymbol{I}} \end{bmatrix} \end{cases} \tag{2}$$

式中,$\boldsymbol{H}$称为零空间算子;$\bar{\boldsymbol{B}}_u$、$\bar{\boldsymbol{B}}_r$分别为$\bar{\boldsymbol{B}}$的上u行与下r行分块矩阵,即$\bar{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}=\left[\bar{\boldsymbol{B}}_u^{\mathrm{T}} \quad \bar{\boldsymbol{B}}_r^{\mathrm{T}}\right]$;$\boldsymbol{I}$为单位矩阵。式(1)等式两边均左乘$\boldsymbol{H}$,可将式(1)概括平差模型化为等价的条件平差模型[23-24]:

$$\underset{r\times n}{\bar{\boldsymbol{A}}} \underset{n\times 1}{\boldsymbol{V}} - \underset{r\times 1}{\bar{\boldsymbol{W}}} = \underset{r\times 1}{0}, \quad \underset{n\times n}{\boldsymbol{D}_L} \tag{3}$$

式中,$\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{H}_c\boldsymbol{A}$,$\bar{\boldsymbol{W}}=\boldsymbol{H}_c\boldsymbol{W}+\boldsymbol{H}_s\boldsymbol{Z}$称为等价条件闭合差,其中$\boldsymbol{H}_c$、$\boldsymbol{H}_s$为$\boldsymbol{H}$的左$c$列与右$s$列分块矩阵,即$\boldsymbol{H}=[\boldsymbol{H}_c \quad \boldsymbol{H}_s]$。

2 等价条件闭合差的最小范数分量估计

根据文献[10],设观测误差向量$\boldsymbol{\Delta}$具有如下形式:

$$\underset{n\times 1}{\boldsymbol{\Delta}} = \underset{n\times n_1}{\boldsymbol{F}_1} \underset{n_1\times 1}{\boldsymbol{\xi}_1} + \underset{n\times n_2}{\boldsymbol{F}_2} \underset{n_2\times 1}{\boldsymbol{\xi}_2} + \cdots + \underset{n\times n_m}{\boldsymbol{F}_m} \underset{n_m\times 1}{\boldsymbol{\xi}_m} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{\xi} \tag{4}$$

式中,$\boldsymbol{F}=[\boldsymbol{F}_1 \ \boldsymbol{F}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{F}_m]$;$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\xi}_m^{\mathrm{T}}]$表示随机误差向量;$\boldsymbol{F}_i$为已知的$n\times n_i$系数矩阵,$n_i$为$\boldsymbol{\xi}_i$的维度。$E(\boldsymbol{\xi}_i)=0$,$E(\ )$为均值。$D(\boldsymbol{\xi}_i)=$

$\sigma_{0_i}^2 E_i (i=1,2,\cdots,m)$, $D(\boldsymbol{\xi}_i,\boldsymbol{\xi}_j)=0(i\neq j)$, 由此可得:

$$D(L)=D(\boldsymbol{\Delta})=\sum_{i=1}^{m}F_i D(\boldsymbol{\xi}_i)F_i^{\mathrm{T}}=\sum_{i=1}^{m}\sigma_{0_i}^2 F_i F_i^{\mathrm{T}}=\sum_{i=1}^{m}\sigma_{0_i}^2\boldsymbol{Q}_i \tag{5}$$

$$\boldsymbol{Q}_i=F_i F_i^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

设

$$\underset{m\times 1}{\boldsymbol{\theta}}=\begin{bmatrix}\sigma_{0_1}^2 & \sigma_{0_2}^2 & \cdots & \sigma_{0_m}^2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\theta_1 & \theta_2 & \cdots & \theta_m\end{bmatrix} \tag{7}$$

且设 $\underset{m\times 1}{\boldsymbol{\theta}}$ 的任意线性函数为:

$$\boldsymbol{\Omega}=\alpha_1\sigma_{0_1}^2+\alpha_2\sigma_{0_2}^2\cdots+\alpha_m\sigma_{0_m}^2=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\sigma_{0_m}^2=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta} \tag{8}$$

式中,α 为线性系数。令:

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}}=\bar{W}^{\mathrm{T}}M\bar{W} \tag{9}$$

式中,$\bar{W}=H_c W+H_s Z$,称为等价条件闭合差;$\bar{W}^{\mathrm{T}}M\bar{W}$ 为等价条件闭合差的二次型;$\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ 为 $\boldsymbol{\Omega}$ 的估计量;$\boldsymbol{M}$ 为待定的对称矩阵。$\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ 具有不变性、无偏性且符合最小范数条件[10]。不变性是指二次估计 $\bar{W}^{\mathrm{T}}M\bar{W}$ 与未知参数 $\boldsymbol{X}$ 的选择无关,其中:

$$\begin{cases}W=AL+BX^0+A_0\\ Z=CX^0+C_0\\ \bar{W}=-H_c(AL+BX^0+A_0)-H_s(CX^0+C_0)\end{cases} \tag{10}$$

式中,L、X^0 都为观测值与参数的真值,为常数,因此 $\bar{W}^{\mathrm{T}}M\bar{W}$ 具有不变性。根据文献[10],估计量 $\bar{W}^{\mathrm{T}}M\bar{W}$ 满足无偏性的条件为:

$$\mathrm{tr}(MC)=\alpha_i \tag{11}$$

式中,$i=1,2,\cdots,m$;$C=\bar{A}\boldsymbol{Q}_i\bar{A}^{\mathrm{T}}$。

根据统计分析,假设随机变量 $\underset{n_i\times 1}{\boldsymbol{\xi}_i}$ 的估计值是已知的,则 $\sigma_{0_i}^2$ 的理论估计值应为:

$$\sigma_{0_i}^2=\frac{\boldsymbol{\xi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_i}{n_i} \tag{12}$$

则 $\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}$ 的理论估值为:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}&=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\sigma_{0_i}^2=(\frac{\alpha_1}{n_1})\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+(\frac{\alpha_m}{n_m})\boldsymbol{\xi}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_m=\\ &\begin{bmatrix}\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{\xi}_m^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\alpha_1}{n_1}E_1 & & & \\ & \frac{\alpha_2}{n_2}E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\alpha_m}{n_m}E_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\xi}_1\\ \boldsymbol{\xi}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\xi}_m\end{bmatrix}=\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{\xi}\end{aligned} \tag{13}$$

$$\boldsymbol{R}=\mathrm{diag}\begin{bmatrix}\frac{\alpha_1}{n_1}E_1 & \frac{\alpha_2}{n_2}E_2 & \cdots & \frac{\alpha_m}{n_m}E_m\end{bmatrix} \tag{14}$$

$\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}$ 的实际估值为:

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}}=\bar{W}^{\mathrm{T}}M\bar{W}=(\bar{A}\boldsymbol{\Delta})^{\mathrm{T}}M(\bar{A}\boldsymbol{\Delta})=\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{T}}\bar{A}^{\mathrm{T}}M\bar{A}\boldsymbol{\Delta} \tag{15}$$

令 $\bar{A}^{\mathrm{T}}M\bar{A}=M_1$,则:

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}}=\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{T}}M_1\boldsymbol{\Delta}=\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}M_1F\boldsymbol{\xi} \tag{16}$$

由式(13)和式(16)可知,$\boldsymbol{\Omega}$ 的实际估值与理论估值之差为:

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}}-\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}M_1F\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(F^{\mathrm{T}}M_1F-\boldsymbol{R})\boldsymbol{\xi} \tag{17}$$

选择其欧氏范数为最小,即适当地选择某一矩阵 M_1,使得:

$$\left\|F^{\mathrm{T}}M_1F-\boldsymbol{R}\right\|^2=\min \tag{18}$$

因此,根据文献[10],最小范数条件 $\left\|F^{\mathrm{T}}M_1F-\boldsymbol{R}\right\|^2=\min$ 等价于:

$$\mathrm{tr}(M_1\boldsymbol{Q}M_1\boldsymbol{Q})=\min \tag{19}$$

令 $C=\bar{A}\boldsymbol{Q}_i\bar{A}^{\mathrm{T}}$,则式(19)为:

$$\mathrm{tr}(\bar{A}^{\mathrm{T}}M\bar{A}\boldsymbol{Q}\bar{A}^{\mathrm{T}}M\bar{A}\boldsymbol{Q})=\mathrm{tr}(\bar{A}\boldsymbol{Q}\bar{A}^{\mathrm{T}}M\bar{A}\boldsymbol{Q}\bar{A}^{\mathrm{T}}M)=\mathrm{tr}(CMCM)=\min \tag{20}$$

因此,若矩阵 M 是下述极值问题的解,且满足:

$$\begin{cases}\mathrm{tr}(M_1\boldsymbol{Q}M_1\boldsymbol{Q})=\min\\ \mathrm{tr}(M\bar{A}\boldsymbol{Q}_i\bar{A}^{\mathrm{T}})=\mathrm{tr}(MC)=\alpha_i\end{cases} \tag{21}$$

则二次型 $\bar{W}^{\mathrm{T}}M\bar{W}$ 为 $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\sigma_{0_i}^2$ 的最小二乘无偏估计,构建条件极值拉格朗日函数如下:

$$\Phi(M)=2\mathrm{tr}(CMCM)-4\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(\mathrm{tr}(MC_i)-\alpha_i) \tag{22}$$

式中,λ_i 对应于式(11)的 m 个联系数。对 $\Phi(M)$ 求一阶偏导数,即:

$$\frac{\partial\Phi(M)}{\partial M}=0 \tag{23}$$

得到:

$$\frac{\partial\Phi(M)}{\partial M}=CMC-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i C_i=0 \tag{24}$$

因此,MINQUE可归结为下列方程的解:

$$\begin{cases} \boldsymbol{CMC} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{C}_i = 0 \\ \mathrm{tr}(\boldsymbol{MC}_i) = \alpha_i \end{cases} \tag{25}$$

由式(24)得:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{C}^{-1}\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{C}_i\right)\boldsymbol{C}^{-1} \tag{26}$$

将式(26)代入式(11)得:

$$\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{C}^{-1}\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{C}_i\right)\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}_j\right) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \,\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}_j) = \alpha_j \tag{27}$$

即

$$\underset{m\times m}{\boldsymbol{S}}\ \underset{m\times 1}{\boldsymbol{\lambda}} = \underset{m\times 1}{\boldsymbol{\alpha}} \tag{28}$$

当$\boldsymbol{S}$满秩时,则联系数$\boldsymbol{\lambda}$的解为$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{S}^{-1}\alpha$,系数矩阵$\boldsymbol{S}$的表达式为:

$$\boldsymbol{S} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}_j) = \begin{bmatrix} \mathrm{tr}(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}_1) & \mathrm{tr}(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}_2) & \cdots & \mathrm{tr}(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}_m) \\ \mathrm{tr}(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}_1) & \mathrm{tr}(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}_2) & \cdots & \mathrm{tr}(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{tr}(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}_m\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}_1) & \mathrm{tr}(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}_m\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}_2) & \cdots & \mathrm{tr}(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}_m\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}_m) \end{bmatrix} \tag{29}$$

由于:

$$\alpha^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \bar{\boldsymbol{W}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{W}} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \bar{\boldsymbol{W}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{C}^{-1}\bar{\boldsymbol{W}} = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_m] \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{W}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}^{-1}\bar{\boldsymbol{W}} \\ \bar{\boldsymbol{W}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{C}^{-1}\bar{\boldsymbol{W}} \\ \vdots \\ \bar{\boldsymbol{W}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}_m\boldsymbol{C}^{-1}\bar{\boldsymbol{W}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_{\theta} \tag{30}$$

$$\boldsymbol{W}_{\theta} = \left[\bar{\boldsymbol{W}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}^{-1}\bar{\boldsymbol{W}} \quad \bar{\boldsymbol{W}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{C}^{-1}\bar{\boldsymbol{W}} \quad \cdots \quad \bar{\boldsymbol{W}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}_m\boldsymbol{C}^{-1}\bar{\boldsymbol{W}}\right]^{\mathrm{T}} \tag{31}$$

将式(29)代入式(30),即得$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{W}_{\theta}$,因此单位权方差分量的估值$\hat{\theta}$为:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{W}_{\theta} \tag{32}$$

结合上述推导过程以及文献[18]中相关结论,表明MINQUE-ECM法与采用条件平差模型的MINQUE法具有相似的运算公式,进一步证明本文方法的正确性,因此式(29)、式(31)和式(32)为等价条件闭合差的方差-协方差最小范数分量估计方法的计算公式。

3 实例验算结果及分析

3.1 GNSS站坐标时间序列建模

GNSS单站、单分量坐标时间序列函数模型以及随机模型分别为:

$$y(t_i) = a + bt_i + c\sin(2\pi t_i) + d\cos(2\pi t_i) + e\sin(4\pi t_i) + f\cos(4\pi t_i) + v_i \tag{33}$$

$$D_y = \sigma_{\mathrm{WN}}^2\boldsymbol{Q}_{\mathrm{WN}} + \sigma_{\mathrm{FN}}^2\boldsymbol{Q}_{\mathrm{FN}} \tag{34}$$

式中,t_i为观测时间,单位为年;a表示测站时间序列的起始位置;b表示测站运动的线性速度;c、d表示测站周年项运动的振幅;e、f表示半周年运动的振幅;v_i表示噪声;WN表示高斯白噪声(white Gaussian noise),单位为mm;FN表示闪烁噪声(flicker noise),单位为$\mathrm{mm/a^{-0.25}}$;σ_{WN}、σ_{FN}为所求噪声分量的大小,即噪声振幅;$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{WN}}$为白噪声的协因数矩阵;$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{FN}}$为闪烁噪声的协因数矩阵。根据文献[26-27],闪烁噪声的协因数矩阵可由转换矩阵$\boldsymbol{T}$与$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{WN}}$转换而成,其具体形式为:

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{FN}} = \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{WN}}\boldsymbol{T} \tag{35}$$

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{WN}} = \boldsymbol{I} \tag{36}$$

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \varphi_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \varphi_1 & \varphi_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \varphi_2 & \varphi_1 & \varphi_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n-1} & \varphi_{n-2} & \varphi_{n-3} & \cdots & \varphi_0 \end{bmatrix} \tag{37}$$

式中,$\varphi_n = \dfrac{\dfrac{-k}{2}\left(1-\dfrac{k}{2}\right)\cdots\left(n-1-\dfrac{k}{2}\right)}{n!}$; $\varphi_0 = 1$;k为谱指数,对于闪烁噪声$k = -1$。

3.2 模拟数据实验结果分析

为了验证LS-VCE、MINQUE以及MINQUE-ECM法对GNSS站坐标时间序列中噪声振幅估计的正确性,需要知道实验数据中噪声分量的方差。因此,本文首先基于模拟数据对上述3种方法进行实验分析。

为使模拟时间序列数据尽可能地接近真实的GNSS站坐标时间序列,本文采用CHUN、HLAR、TAIN 3个站所提供的相关参数,噪声模型选择白噪声和闪烁噪声,具体模拟步骤如下:

1)利用中国大陆构造环境监测网络(crustal movement observation network of China ,CMONOC)中国地震GNSS数据产品服务平台(http://www.cgps.ac.cn))提供的CHUN、 HLAR、TAIN 测站北(north,N)、东(east,E)、竖直(up,U)方向的运动参数,表1、表2、表3分别为3个测站N、E、U方向的测站起始位置(a)、速度(b)、周年项运动(c、d)、半周年项运动(e、f)的运动参数取值。

表1　北方向运动参数

Tab. 1　North Direction Motion Parameters

站点	a	b	c	d	e	f
CHUN	44.80	−12.17	−0.09	0.25	−0.02	−0.26
HLAR	31.70	−11.28	−0.46	0.08	−0.12	−0.11
TAIN	31.70	−11.32	−0.18	−0.01	−0.04	−0.04

表2　东方向运动参数

Tab. 2　East Direction Motion Parameters

站点	a	b	c	d	e	f
CHUN	−104.00	26.85	−0.03	0.57	−0.38	−0.09
HLAR	−74.10	26.02	−0.38	0.44	−0.32	0.17
TAIN	−89.60	31.58	−0.43	0.54	−0.03	0.06

表3　竖直方向运动参数

Tab. 3　Vertical Direction Motion Parameters

站点	a	b	c	d	e	f
CHUN	−0.80	−0.31	1.18	2.45	1.17	−0.60
HLAR	−27.70	1.18	−3.05	−1.79	0.48	−0.41
TAIN	−6.50	0.92	−3.75	1.22	1.20	−0.54

2)文献[28]发现白噪声+闪烁噪声为中国区域最佳噪声模型,因此本文选用的噪声模型为白噪声和闪烁噪声,其中采用基于快速傅里叶变换(fast Fourier transform,FFT)的FIR(finite impulse response)滤波对闪烁噪声进行模拟。表4为白噪声以及闪烁噪声的振幅取值,即噪声的标准差。

表4　模拟数据噪声振幅(噪声标准差)

Tab. 4　Analog Data Noise Amplitude (Noise Standard Deviation)

站点	WN/mm	FN/(mm·a$^{0.25}$)
CHUN_N	0.500 6	0.377 0
CHUN_E	0.998 2	0.736 1
CHUN_U	1.398 3	0.819 4
HLAR_N	0.602 2	0.496 8
HLAR_E	1.200 3	0.704 1
HLAR_U	1.797 0	1.112 8
TAIN_N	0.801 8	0.410 4
TAIN_E	0.700 0	0.480 7
TAIN_U	1.403 2	0.187 3

3)选取2007—2017年10 a的时间将模拟出来的噪声数据和CHUN、HLAR、TAIN测站的运动参数根据式(31)模拟出3个测站3个方向共9组数据。其中,SCHUN、SHLAR 、STAIN表示模拟出的3个测站类别。各测站单方向的数据由6个运动参数以及白噪声和闪烁噪声叠加组成,SCHUN站、SHLAR站的采样点数均为3 527,STAIN站的采样点数为3 551,采样间隔为1 d,并采用LS-VCE、MINQUE、MINQUE-ECM对3个测站进行噪声振幅估计,每个测站单方向按上述方案进行了50次模拟,将50次实验结果的平均值作为噪声标准差的估计值,并统计其中误差。表5、表6、表7分别展示了利用LS-VCE、MINQUE、MINQUE-ECM计算3个测站3个方向的噪声振幅,表8展示了MINQUE-ECM与MINQUE法估计结果差值。

表5　LS-VCE对模拟数据的估计结果

Tab. 5　LS-VCE Estimation Results of Simulation Data

站点	N方向		E方向		U方向	
	WN/mm	FN/(mm·a$^{0.25}$)	WN/mm	FN/(mm·a$^{0.25}$)	WN/mm	FN/(mm·a$^{0.25}$)
SCHUN	0.509 9±0.008 0	0.491 4±0.029 0	1.019 8±0.015 0	0.975 5±0.057 4	1.417 0±0.025 9	1.076 7±0.092 0
SHLAR	0.616 6±0.009 8	0.638 9±0.049 3	1.217 9±0.019 2	0.919 8±0.072 1	1.823 9±0.026 3	1.452 9±0.113 5
STAIN	0.808 8±0.011 4	0.543 0±0.046 3	0.713 3±0.011 3	0.628 7±0.042 6	1.402 7±0.019 4	0.307 4±0.144 0

表6　MINQUE对模拟数据的估计结果

Tab. 6　MINQUE Estimation Results of Simulated Data

站点	N方向		E方向		U方向	
	WN/mm	FN/(mm·a$^{0.25}$)	WN/mm	FN/(mm·a$^{0.25}$)	WN/mm	FN/(mm·a$^{0.25}$)
SCHUN	0.509 9±0.008 5	0.491 4±0.029 4	1.019 8±0.015 8	0.975 5±0.057 4	1.417 0±0.025 9	1.076 7±0.092 0
SHLAR	0.616 6±0.009 8	0.638 9±0.049 3	1.217 9±0.019 2	0.919 8±0.072 1	1.823 9±0.026 3	1.452 9±0.113 5
STAIN	0.808 8±0.011 4	0.543 0±0.046 3	0.713 3±0.011 3	0.628 7±0.042 6	1.402 7±0.019 4	0.307 4±0.144 0

表7 MINQUE-ECM对模拟数据的估计结果

Tab. 7 MINQUE-ECM Estimation Results of Simulated Data

站点	N方向		E方向		U方向	
	WN/mm	FN/(mm•$a^{0.25}$)	WN/mm	FN/(mm•$a^{0.25}$)	WN/mm	FN/(mm•$a^{0.25}$)
SCHUN	0.509 9±0.008 5	0.491 3±0.029 4	1.019 9±0.015 9	0.975 0±0.057 6	1.417 0±0.025 9	1.076 0±0.092 0
SHLAR	0.616 6±0.009 8	0.638 7±0.049 3	1.217 9±0.019 2	0.919 2±0.071 9	1.824 0±0.026 2	1.452 2±0.113 5
STAIN	0.808 8±0.011 4	0.543 0±0.046 3	0.713 3±0.011 3	0.628 7±0.042 6	1.402 7±0.019 4	0.307 6±0.143 8

表8 MINQUE-ECM与MINQUE法估计结果差值

Tab. 8 Difference Between MINQUE-ECM and MINQUE Method

站点	N方向		E方向		U方向	
	WN/mm	FN/mm•$a^{0.25}$	WN/mm	FN/mm•$a^{0.25}$	WN/mm	FN/mm•$a^{0.25}$
SCHUN	0	−0.000 1	0.000 1	−0.000 5	0	−0.000 7
SHLAR	0	−0.000 2	0	−0.000 6	0.000 1	−0.000 7
STAIN	0	0	0	0	0	0.000 2

由表5~8可知,LS-VCE法和MINQUE法对于仿真数据的白噪声的估计效果较好,其误差在N、E方向大部分保持在0.01 mm左右,在U方向保持在0.02 mm左右。对闪烁噪声的估计较差,其误差保持在0.02~0.15 mm/$a^{-0.25}$之间。LS-VCE法和MINQUE法所估计的白噪声和闪烁噪声的振幅完全相同,本文所采用的MINQUE-ECM法对于白噪声和闪烁噪声的估计结果相比其他两种方法只在小数点后4位存在差异。因此,根据上述分析可表明MINQUE-ECM法与LS-VCE法、MINQUE法具有一致的估计结果,说明了本文方法对于噪声振幅估计结果的正确性。

3.3 北美实测数据实验结果分析

为进一步验证本文方法与LS-VCE法、MINQUE法估计结果的一致性,也为使数据更贴合于实际,本文选用SOPAC(Scripps Orbit and Permanent Array Center)提供的2007—2017年共10 a的北美13个GNSS基准站数据(http://garner.ucsd.edu/pub/timeseries/measures/ats/WesternNorthAmerica/),该序列采用主成分分析方法进行共模误差(common mode error,CME)滤波处理[29-31],以消除共模误差对噪声估计的影响。采用上述3种方法对这些数据进行噪声分量的振幅估计,表9为N、E、U 3个方向的中误差σ_{WN}、σ_{FN}的估计结果。

表9 噪声振幅三方向估计结果

Tab. 9 Three-Directional Estimation Results of Noise Amplitude

站点	N方向						E方向						U方向					
	LS-VCE		MINQUE		MINQUE-ECM		LS-VCE		MINQUE		MINQUE-ECM		LS-VCE		MINQUE		MINQUE-ECM	
	WN	FN	WN	FN	WN	FN	WN	FN	WN	FN	WN	FN	WN	FN	WN	FN	WN	FN
AB01	3.02	3.84	3.02	3.84	3.02	3.84	2.70	3.29	2.70	3.29	2.70	3.29	6.87	9.04	6.87	9.04	6.87	9.04
AB02	2.41	3.58	2.41	3.58	2.41	3.58	2.35	3.26	2.35	3.26	2.35	3.26	5.94	8.61	5.94	8.61	5.94	8.61
AC06	2.35	3.11	2.35	3.11	2.35	3.11	2.54	2.78	2.54	2.78	2.54	2.78	6.00	8.44	6.00	8.44	6.00	8.44
AC07	7.69	10.88	7.69	10.88	7.69	10.88	8.28	12.49	8.28	12.49	8.28	12.50	22.28	35.10	22.28	35.10	22.28	35.10
AC08	3.08	3.75	3.08	3.75	3.08	3.75	3.83	5.39	3.83	5.39	3.83	5.39	8.47	10.88	8.47	10.88	8.47	10.88
AC09	4.06	7.15	4.06	7.15	4.06	7.15	2.66	4.44	2.66	4.44	2.66	4.44	4.78	7.22	4.78	7.22	4.78	7.22
AC31	1.81	2.65	1.81	2.65	1.81	2.65	2.22	3.31	2.22	3.31	2.22	3.31	7.27	10.50	7.27	10.50	7.27	10.50
AC32	4.06	7.32	4.06	7.32	4.06	7.32	3.42	5.75	3.42	5.75	3.42	5.75	7.92	13.12	7.92	13.12	7.92	13.12
BALD	1.66	2.75	1.66	2.75	1.66	2.74	1.30	1.12	1.30	1.12	1.30	1.12	4.27	5.14	4.27	5.14	4.27	5.13
BAMO	0.68	0.60	0.68	0.60	0.68	0.60	0.90	0.53	0.90	0.53	0.90	0.53	2.93	2.85	2.93	2.85	2.93	2.85
AB12	10.33	16.72	10.33	16.72	10.33	16.72	10.03	15.44	10.03	15.44	10.03	15.44	24.46	39.25	24.46	39.25	24.46	39.25
AB13	2.56	3.42	2.56	3.42	2.56	3.42	3.86	5.94	3.86	5.94	3.87	5.94	6.78	9.03	6.78	9.03	6.79	9.05
AHID	0.86	0.97	0.86	0.97	0.86	0.97	1.39	1.49	1.39	1.49	1.39	1.49	4.11	4.97	4.11	4.97	4.11	4.97

注:WN估计值单位为mm;FN估计值单位为mm/$a^{-0.25}$。

由表9可知,本文方法对于闪烁噪声估计结果在BALD站的N方向和U方向、AC07站的E方向与LS-VCE法、MINQUE法的估计结果存在0.01 mm/a$^{-0.25}$的误差,在AB13站的U方向存在0.02 mm/a$^{-0.25}$的误差。其他估计结果均与两种方法相同,表明3种方法具有一致的估计结果,进一步验证了本文方法在时间序列的噪声振幅估计方面的正确性。大部分测站白噪声的振幅约为闪烁噪声振幅的1/2,表明时间序列的数据噪声中有色噪声为主要噪声,若只采用白噪声模型进行运动参数解算,则会导致解算出的测站运动速度偏高。对比分析N、E、U 3个方向的噪声振幅,N方向上91.6%的测站的白噪声振幅都在5 mm以内,闪烁噪声中69.2%的测站的噪声分量小于5 mm/a$^{-0.25}$,15.3%的测站的噪声振幅在5~10 mm/a$^{-0.25}$范围内,东方向的白噪声中有84.6%的测站的噪声振幅小于5 mm,闪烁噪声中61.5%的测站的噪声振幅小于5 mm/a$^{-0.25}$,因此N方向与E方向的噪声振幅相差不大,而U方向的白噪声中存在69.2%的测站的噪声振幅大于5 mm,闪烁噪声中84.6%的测站大于5 mm/a$^{-0.25}$,因此竖直方向的噪声振幅远大于水平方向,这与现有结论相同,说明结果具有参考价值。

LS-VCE法均以残差向量为输入量,而本文MINQUE-VCE法以等价条件闭合差为输入量,后者实现了平差值求解与随机模型估计分离。等价条件闭合差维数低于残差向量维数,且前者为不需求解的已知量,因此计算效率明显优于前者。MINQUE-ECM法在进行结果计算的时候,无需进行多次迭代或搜寻过程,因此MINQUE-ECM相较于LS-VCE的计算效率有所提高。为进一步验证本文方法的计算效率,选取所分析的13个测站的数据,在MATLAB 2014环境下统计LS-VCE法以及MINQUE-VCE法计算其结果所需要的时间,结果见表10。由表10可知,MINQUE-ECM的计算时间相比LS-VCE法减少了70%以上,表明本文方法在计算效率上有一定提高。

表10　运算时间/s

Tab. 10　Operation Time/s

站点	LS-VCE	MINQUE-ECM
AB01	55.12	14.99
AB02	51.88	11.75
AC06	51.69	11.57
AC07	51.78	11.34
AC08	54.02	11.71
AC09	51.85	12.66
AC31	50.78	11.59
AC32	50.50	11.22
BALD	51.01	11.16
BAMO	50.49	11.61
AB12	51.30	11.25
AB13	51.45	11.92
AHID	50.10	11.17

4　结　语

本文提出一种基于等价条件闭合差最小范数估计方法,该方法通过等价条件平差模型以及最小范数准则,采用等价条件闭合差构造二次型方差估计量,结合不变性、无偏性、最小范数准则等条件,导出了基于等价条件闭合差的方差-协方差分量最小范数估计公式,实现平差值求解与随机模型估计的分离,同时兼顾最小范数、无偏性、不变性以及等价条件闭合差的特性。通过模拟数据以及北美地区13个GNSS站坐标时间序列在白噪声和闪烁噪声模型下的噪声振幅估计结果以及运算时间,结果表明,本文MINQUE-ECM法与LS-VCE法、MINQUE法估计结果相同,验证了本文MINQUE-ECM法的正确性,相较于LS-VCE法,其计算效率更高。但本文方法针对数据量较大的方差-协方差分量估计时会出现矩阵$\boldsymbol{C}=\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{Q}_t\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}$的行列式较小,导致数值计算的不稳定性,这方面有待进一步研究。

参　考　文　献

[1] Yao Yibin, Yang Yuanxi, Sun Heping, et al. Geodesy Discipline: Progress and Perspective[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2020, 49(10): 1243-1251.(姚宜斌,杨元喜,孙和平,等. 大地测量学科发展现状与趋势[J]. 测绘学报, 2020, 49(10): 1243-1251.)

[2] Jiang Weiping, Wang Kaihua, Li Zhao, et al. Prospect and Theory of GNSS Coordinate Time Series Analysis [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2018, 43(12): 2112-2123.(姜卫平,王锴华,李昭,等. GNSS坐标时间序列分析理论与方法及展望[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2018, 43(12): 2112-2123.)

[3] Li Zhao, Jiang Weiping, Liu Hongfei, et al. Noise Model Establishment and Analysis of IGS

Refference Stattion Coordinate Time Series in Side China[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2012, 41(4): 496-503.(李昭,姜卫平,刘鸿飞,等. 中国区域IGS基准站坐标时间序列噪声模型建立与分析[J]. 测绘学报, 2012, 41(4): 496-503.)

[4] Ma Jun, Jiang Weiping, Deng Liansheng, et al. Estimation Method and Correlation Analysis for Noise in GPS Coordinate Time Series[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2018, 43(10): 1451-1457.(马俊,姜卫平,邓连生,等. GPS坐标时间序列噪声估计及相关性分析[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2018, 43(10): 1451-1457.)

[5] Teunissen P G, Amiri-Simkooei A R. Least-Squares Variance Component Estimation[J]. *Journal of Geodesy*, 2008, 82(2): 65-82.

[6] Zhao Jun, Guo Jianfeng. Auniversal Formula of Variance Component Estimation[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2013, 38(5):580-583.(赵俊,郭建锋. 方差分量估计的通用公式[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2013, 38(5):580-583.)

[7] Amiri-Simkooei A R, Tiberius C C J M, Teunissen P J G. Assessment of Noise in GPS Coordinate Time Series: Methodology and Results[J]. *Journal of Geophysical Research*, 2007, 112(B7): B07413.

[8] Zhu Z, Xie X, Zuo Z, et al. Complex Least Squares Adjustment to Improve Tree Height Inversion Problem in PolInSAR[J]. *Journal of Geodesy and Geoinformation Science*, 2019,44(1): 1-8.

[9] Amiri-Simkooei A R. Noise in Multivariate GPS Position Time-Series [J]. *Journal of Geodesy*, 2009, 83(2): 175-187.

[10] Cui Xizhang, Yu Zongchou, Tao Benzao, et al. Generalized Survey Adjustment[M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2009.(崔希璋,於宗俦,陶本藻,等. 广义测量平差[M]. 武汉:武汉大学出版社, 2009.)

[11] Koch K R. Parameter Estimation in Linear Models [M]. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 1999.

[12] Yu Zongchou. The Goneral Formulas of Helmert Type for Estimating Variance and Covarince Caomponents[J]. *Geomatics and Information of Wuhan University*, 1991, 16(2): 8-17.(於宗俦. Helmert型方差-协方差分量估计的通用公式[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 1991, 16(2): 8-17.)

[13] Yu Z C. A Universal Formula of Maximum Likelihood Estimation of Variance-Covariance Components [J]. *Journal of Geodesy*, 1996, 70(4): 233-240.

[14] Williams S D P. Error Analysis of Continuous GPS Position Time Series[J]. *Journal of Geophysical Research*, 2004, 109(B3): B03412.

[15] Wang Zhizhong, Zhu Jianjun. A Universal Formula of MINQUE of Variance Components[J]. *Journal of Central South University of Technology*, 2001, 32(4):433-436.(王志忠,朱建军. 方差分量的MINQUE通用公式[J]. 中南工业大学学报(自然科学版), 2001, 32(4):433-436.)

[16] Peng J H, Shi Y, Li S H, et al. MINQUE of Variance-Covariance Components in Linear Gauss-Markov Models [J]. *Journal of Surveying Engineering*, 2011, 137(4): 129-139.

[17] Li Guangyun. Unified Variance Components Estimation[J]. *Journal of Geomatics Science and Technology*, 1993, 10(3): 20-24.(李广云. 统一方差分量估计公式[J]. 测绘科学技术学报, 1993, 10(3): 20-24.)

[18] Sjöberg L E. Unbiased Estimation of Variance-Covariance Components with Unknowns Conditional Adjustment — MINQUE Method [J]. *Surveying and Mapping Technology* ,1985, 20(3): 44-46 (Sjöberg L E. 带有未知数条件平差的方差-协方差分量的无偏估计——MINQUE法[J]. 测绘技术, 1985, 20(3):44-46.)

[19] Ou Z Q. Estimation of Variance and Covariance Components [J]. *Bulletin Géodésique*, 1989, 63(2): 139-148.

[20] Crocetto N, Gatti M, Russo P. Simplified Formulae for the BIQUE Estimation of Variance Components in Disjunctive Observation Groups[J]. *Journal of Geodesy*, 2000, 74(6): 447-457.

[21] Li Bofeng, Shen Yunzhong, Lou Lizhi. Variance-Covariance Component Estimation Based on the Equivalent Residuals[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2010, 39(4): 349-354.(李博峰,沈云中,楼立志. 基于等效残差的方差-协方差分量估计[J]. 测绘学报, 2010, 39(4): 349-354.)

[22] Li Bofeng, Shen Yunzhong. Equivalent Residual Product Based Outlier Detection for Variance and Covariance Component Estimation [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2011, 40(1): 10-14.(李博峰,沈云中. 基于等效残差积探测粗差的方差-协方差分量估计[J]. 测绘学报, 2011, 40(1): 10-14.)

[23] Liu Zhiping, Zhu Dantong, Yu Hang, et al. Least-Square Variance-Covariance Component Estimation

Method Based on the Equivalent Conditional Adjustment Model[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2019, 48(9): 1088-1095.(刘志平, 朱丹彤, 余航, 等. 等价条件平差模型的方差-协方差分量最小二乘估计方法[J]. 测绘学报, 2019, 48(9): 1088-1095.)

[24] Liu Zhiping. Analytical Method for VCE Using Equivalent Condition Misclosure[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2013, 42(5): 648-653.(刘志平. 等价条件闭合差的方差-协方差分量估计解析法[J]. 测绘学报, 2013, 42(5): 648-653.)

[25] Liu Zhiping, Zhang Shubi. Variance-Covariance Component Estimation Method Based on Generalization Adjustment Factor[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2013, 38(8): 925-929.(刘志平, 张书毕. 方差-协方差分量估计的概括平差因子法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2013, 38(8): 925-929.)

[26] Williams S P. The Effect of Coloured Noise on the Uncertainties of Rates Estimated from Geodetic Time Series[J]. *Journal of Geodesy*, 2003, 76(9): 483-494.

[27] Williams S D P. CATS: GPS Coordinate Time Series Analysis Software[J]. *GPS Solutions*, 2008, 12(2): 147-153.

[28] Mao A L, Harrison C G A, Dixon T H. Noise in GPS Coordinate Time Series[J]. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 1999, 104(B2): 2797-2816.

[29] Dong D, Fang P, Bock Y, et al. Spatiotemporal Filtering Using Principal Component Analysis and Karhunen-Loeve Expansion Approaches for Regional GPS Network Analysis[J]. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 2006, 111(B3): 17-24.

[30] Kedar S,Bock,Y,Moore A W,et al. Solid Earth Science ESDR System[C]. AGU Fall Meeting, San Francisco, USA, 2013.

[31] He X , Montillet J P, Fernandes R, et al. Review of Current GPS Method Ologies for Producing Accurate Time Series and Their Error Sources[J]. *Journal of Geodynamics*, 2017, 106: 12-29.