



引文格式:马越原,曾安敏,许扬胤.圆走航模式下海底控制点对称差分定位模型及分析[J].武汉大学学报(信息科学版), 2024, 49(7):1155-1165. DOI:10.13203/j.whugis20210087

Citation: MA Yueyuan, ZENG Anmin, XU Yangyin. Symmetric Difference Positioning Model and Analysis of Sailing Circle Mode of Seafloor Control Points[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2024, 49(7): 1155-1165. DOI: 10.13203/j.whugis20210087

# 圆走航模式下海底控制点对称差分 定位模型及分析

马越原<sup>1,2</sup> 曾安敏<sup>3,4</sup> 许扬胤<sup>3,4</sup>

1 北京跟踪与通信技术研究所,北京,100094

2 智慧地球实验室,北京,100094

3 地理信息工程国家重点实验室,陕西 西安,710054

4 西安测绘研究所,陕西 西安,710054

**摘要:**削弱声学定位过程中系统误差对海底控制点坐标精度的影响是建设高精度海底控制网过程中亟待解决的关键问题。首先,分析了非差和历元间差分两种定位模型;其次,由于声速在海水中的变化受长周期误差和短周期误差的影响,声速变化引起的系统误差同样可认为具有周期性变化的特征,因此,构建了对称差分定位函数模型。模拟仿真和实测数据分析结果表明,当观测时长为系统误差变化周期的偶数倍时,对称差分定位模型可以有效削弱系统误差对定位结果的影响,但是当观测时长不足系统误差变化周期的偶数倍时,该模型将不再适用。

**关键词:**声学定位;海底控制点;系统误差;圆走航;对称差分;定位模型

中图分类号:P229

文献标识码:A

收稿日期:2022-06-22

DOI:10.13203/j.whugis20210087

文章编号:1671-8860(2024)07-1155-11

## Symmetric Difference Positioning Model and Analysis of Sailing Circle Mode of Seafloor Control Points

MA Yueyuan<sup>1,2</sup> ZENG Anmin<sup>3,4</sup> XU Yangyin<sup>3,4</sup>

1 Beijing Institute of Tracking and Telecommunication Technology, Beijing 100094, China

2 Key Laboratory of Smart Earth, Beijing 100094, China

3 State Key Laboratory of Geo-Information Engineering, Xi'an 710054, China

4 Xi'an Research Institute of Surveying and Mapping, Xi'an 710054, China

**Abstract: Objectives:** The critical problem to be solved in the construction of a high-precision seafloor control network is to reduce the influence of systematic errors on the coordinate accuracy of seafloor control points during acoustic positioning. **Methods:** First, we analyze two positioning models: Non-difference and difference between epochs. Second, due to the change of sound velocity in seawater is affected by the long period term error and the short period term error, the system error caused by the shift in sound velocity in the measurement also has the characteristics of periodic change. **Results and Conclusions:** Based on this premise, a symmetric epoch differential positioning model was constructed. The results of simulation analysis and measured data analysis show that when the observation duration is an even multiple of the system error variation period, the symmetric differential positioning model can effectively reduce the influence of the system error on the positioning results. Still, when the observation duration is not an even multiple of the system error variation period, the model is no longer applicable.

**Key words:** acoustic positioning; seafloor control points; systematic error; sailing circle mode; symmetric difference; positioning model

基金项目:国家自然科学基金(41931076,41874016);国家重点研发计划(2020YFB0505801)。

第一作者:马越原,博士,主要研究方向为海洋大地测量。mayueyuanie@163.com

随着中国对海洋开发利用、海洋资源勘探、海洋工程建设、海洋环境监测、海洋权益保护、海洋军事防务等海洋活动越来越活跃,海洋定位、导航和授时的需求也越来越迫切。海底大地基准网是中国空间基准的重要组成部分,是陆地基准网在海底的延伸<sup>[1-3]</sup>,是一组布放在海底具有精确位置的声学应答器作为控制点,可为水下定位导航提供基准<sup>[4-8]</sup>。

高精度确定海底应答器(控制点)是海底大地基准网建设最关键的一个环节,影响海底应答器坐标精度的主要因素有换能器相对于全球导航卫星系统天线的偏移参数测量误差、测量船的航迹位置误差、声线弯曲和声速随时空变化的不确定性引起的系统误差等<sup>[9-10]</sup>。换能器的偏移参数的测量误差会对海底应答器坐标测定产生系统性的影响<sup>[6]</sup>,可用全站仪等精密测量设备预先测定,也可将换能器的偏移参数作为待估参数与坐标参数一同解算,但由于其垂直分量与海底控制点坐标的高程分量强相关,将其作为待估参数与坐标一起解算会导致误差方程病态。有学者提出样本搜索法,首先搜索最佳的偏移参数的垂直分量并固定,然后将偏移参数的水平分量作为待估参数与坐标参数一起解算,可明显提升解算效果<sup>[11]</sup>;还有学者提出对偏移参数附加先验信息,利用贝叶斯估计将偏移参数与坐标参数一同解算,不仅可以避免因强相关导致的观测方程不适定问题,同时也提升了偏移参数的解算精度<sup>[12]</sup>。

测量船测量航迹体现了观测方程的几何强度<sup>[13-14]</sup>,大量实验分析和理论研究表明,以 $\sqrt{2}$ 倍水深值为半径的圆走航可以得到最优的三维坐标分量精度,以1倍水深为半径的圆走航可以得到最优的水平分量精度,在海底控制点正上方进行观测可以得到最优的垂直分量精度,所以最优几何构型是半径为 $\sqrt{2}$ 倍水深的圆形观测加上长度为圆直径的十字交叉观测,可以有效削弱系统误差的影响<sup>[15-20]</sup>。为了削弱声速偏差引起的系统误差对定位的影响,有学者提出了历元间差分定位模型,该模型可以削弱观测值中相近的系统误差<sup>[21]</sup>;有学者利用空间内插法和经验正交函数法或者神经网络学习方法构造声速场信息得到先验声速值<sup>[16,22]</sup>,在此基础上进行声线改正或进行模型参数化补偿<sup>[23-26]</sup>;还有学者考虑将系统误差参数模型化与坐标参数一同解算<sup>[27-28]</sup>,都是削弱系统误差影响较好的方法。

圆走航模式是海底控制点位置标校最常用的航迹模式,为了进一步研究削弱该走航模式下系统误差对海底控制点定位精度的影响,从控制点定位函数模型入手,考虑到声速在海水中受潮汐等长周期误差、内波等短周期误差的影响,在宏观条件下由声速变化引起的系统误差可认为也呈现周期性变化的特点,当测量船作圆走航一周时,观测量在对称位置上所受的系统误差影响也应基本相同。据此,本文提出了一种位置对称的差分定位模型来削弱系统误差的影响,利用模拟仿真数据和实测数据分析验证了此模型的定位效能,并给出了新模型的应用条件。

## 1 声学定位模型

在声学定位过程中,如果第 $i$ 次测量声波从换能器到海底应答器(控制点)的单向传播时间为 $t_i$ ,水声时延测距观测值为 $\rho_i$ ,换能器的三维坐标为 $x_i$ ,应答器的三维坐标为 $x$ ,那么观测方程可以表示为<sup>[18,21]</sup>:

$$\rho_i = f(x_i, x) + \delta\rho_{v,i} + \delta\rho_{t,i} + \epsilon_i \quad (1)$$

式中, $f(x_i, x)$ 表示第 $i$ 次测量时换能器与海底应答器之间的几何距离; $\delta\rho_{v,i}$ 表示由声速不确定性引起的系统误差,在单点定位的情况下,误差影响可达18 cm<sup>[9]</sup>; $\delta\rho_{t,i}$ 表示由换能器和海底应答器固有的测时偏差引起的系统误差,按照现有的固件工艺,这部分的误差影响仅为毫米级,可以忽略不计; $\epsilon_i$ 表示随机误差,有文献指出,这部分误差影响约为1 cm<sup>[29]</sup>。所以,式(1)可以表示为:

$$\rho_i = f(x_i, x) + \delta\rho_{v,i} + \epsilon_i \quad (2)$$

为了便于分析系统误差在不同方向上影响,采用当地水平坐标系(北东天坐标系)。其中, $n$ 表示北向分量, $e$ 表示东向分量, $u$ 表示天顶分量。

### 1.1 非差定位模型

设 $x_0 = [n_0 \ e_0 \ u_0]^T$ 表示海底应答器三维坐标向量的初始值,在 $x = x_0$ 处对式(2)线性化展开可得:

$$\rho_i = \frac{\partial f(x_i, x)}{\partial x} \Big|_{x=x_0} dx + f(x_i, x_0) + \delta\rho_{v,i} + \epsilon_i \quad (3)$$

式中, $dx = [dn \ de \ du]^T$ 为海底应答器坐标的改正数; $\frac{\partial f(x_i, x)}{\partial x} \Big|_{x=x_0}$ 为 $f(x_i, x)$ 相对于海底应答器三维坐标分量的偏导数,其表达式为:

$$\left. \frac{\partial f(x_i, x)}{\partial x} \right|_{x=x_0} = \begin{bmatrix} \frac{n_i - n_0}{f(x_i, x_0)} \\ \frac{e_i - e_0}{f(x_i, x_0)} \\ \frac{u_i - u_0}{f(x_i, x_0)} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{i,n} \\ a_{i,e} \\ a_{i,u} \end{bmatrix}^T \quad (4)$$

式中,

$$f(x_i, x_0) = \sqrt{(n_i - n_0)^2 + (e_i - e_0)^2 + (u_i - u_0)^2} \quad (5)$$

根据式(3)~式(5)可得误差方程为:

$$V = A d\hat{x} - L \quad (6)$$

式中,  $L = [l_1 \ l_2 \ \dots \ l_n]^T$ , 其中,  $l_i = \rho_i - f(x_i, x_0)$ 。

值得强调的是, 测量船在以海底应答器为中心圆走航时, 式(6)中设计矩阵  $A$  的垂直分量  $a_u$  几乎为一常值, 而由声速变化引起的系统误差  $\delta\rho_{v,i}$  会被垂直分量吸收, 导致垂直分量的解算精度不高。图 1 所示为圆走航示意图, 其中,  $r$  为圆走航半径,  $\beta$  为圆走航测量半径与水平方向的夹角,  $h$  为水深,  $\gamma$  为声学测线与垂线方向的夹角。

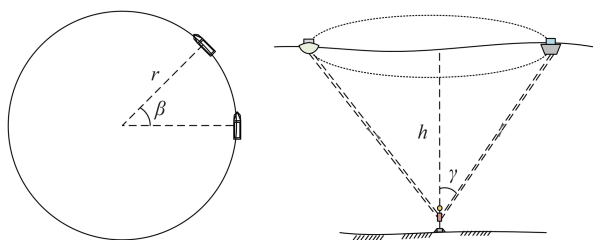


图 1 圆走航示意图

Fig. 1 Sailing Circle Diagram

基于最小二乘准则  $V^T P V = \min$ ,  $d\hat{x}$  可以表示为:

$$d\hat{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P L \quad (7)$$

式中,  $P$  为观测权矩阵。

海底应答器坐标各分量的点位精度

$$A_{II} = \begin{bmatrix} \sin \gamma (\cos \beta_2 - \cos \beta_1) & \sin \gamma (\sin \beta_2 - \sin \beta_1) & 0 \\ \sin \gamma (\cos \beta_3 - \cos \beta_2) & \sin \gamma (\sin \beta_3 - \sin \beta_2) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sin \gamma (\cos \beta_n - \cos \beta_{n-1}) & \sin \gamma (\sin \beta_n - \sin \beta_{n-1}) & 0 \end{bmatrix}_{(n-1) \times 3} \quad (13)$$

需要指出的是, 圆走航模式下, 虽然非差模型的权矩阵  $P_I$  为单位阵, 但是对观测值进行差分后, 新的差分模型观测值之间将不再是独立的, 其权矩阵也将不再是对角阵, 根据相关平差理论<sup>[30]</sup>, 新的权矩阵  $P_{II}$  为:

$$P_{II} = (B P_I B^T)^{-1} \quad (14)$$

式中,  $B$  为非差模型到历元间差分模型的转换

$[\hat{\sigma}_n \ \hat{\sigma}_e \ \hat{\sigma}_u]^T$  的计算公式为:

$$\begin{bmatrix} \hat{\sigma}_n \\ \hat{\sigma}_e \\ \hat{\sigma}_u \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{V^T P V}{n-3}} (A^T P A)^{-1} \quad (8)$$

为了便于参数化优化分析, 如图 1 所示几何关系, 非差定位模型的设计矩阵  $A$  可用  $A_I$  表示, 其表达式为:

$$A_I = \begin{bmatrix} \sin \gamma \cos \beta_1 & \sin \gamma \sin \beta_1 & \cos \gamma \\ \sin \gamma \cos \beta_2 & \sin \gamma \sin \beta_2 & \cos \gamma \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sin \gamma \cos \beta_n & \sin \gamma \sin \beta_n & \cos \gamma \end{bmatrix}_{n \times 3} \quad (9)$$

由于在圆走航模式下, 非差定位模型观测值之间相互独立且等精度, 可认为其权矩阵  $P_I$  为单位阵, 则非差定位模型的法矩阵  $N_I$  为:

$$N_I = A_I^T P_I A_I = \begin{bmatrix} \sin^2 \gamma \sum_{i=1}^n \cos^2 \beta_i & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 \gamma \sum_{i=1}^n \sin^2 \beta_i & 0 \\ 0 & 0 & n \cos^2 \gamma \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad (10)$$

## 1.2 历元间差分定位模型

从式(2)和式(3)中可以看出, 系统误差参数  $\delta\rho_{v,i}$  的系数为 1, 如果不对系统误差参数附加确定的约束条件, 方程秩亏, 无法正常解算<sup>[6,20]</sup>。文献[21]指出, 相邻历元的观测环境基本一致, 所受到系统误差的影响基本相同, 即:

$$\delta\rho_{v,i} \approx \delta\rho_{v,i+1} \quad (11)$$

根据历元间差分理论, 第  $i, i+1$  次的差分观测方程可表示为:

$$\Delta\rho_{i+1,i} = \rho_{i+1} - \rho_i \quad (12)$$

则历元间差分模型的设计矩阵  $A_{II}$  可以表示为:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}_{(n-1) \times n} \quad (15)$$

则历元间差分定位模型的法矩阵  $N_{II}$  为:

$$N_{II} = A_{II}^T P_{II} A_{II} \quad (16)$$

## 2 圆走航模式下对称差分定位模型

众所周知,声速在海洋环境中的变化是极其复杂的。在不考虑微观环境影响声速变化的前提下,宏观环境下声速的变化具有周期性,主要体现在潮汐的影响带来的长周期误差和内波影响带来的短周期误差。因此,本文认为声速变化引起的系统误差参数 $\delta\rho_v$ 是一个具有周期性变化的参数<sup>[10,19-21,28-29]</sup>。基于这一假设前提,当圆走航测量一周的时间恰好等于系统参数误差 $\delta\rho_v$ 的变化周期时,对称历元上的观测值所受系统误差的影响基本相同,即 $\delta\rho_{v,i} \approx \delta\rho_{v,i+n/2}$ 。因此,本文构建了一种对称差分定位模型。

与历元间差分模型同理,第 $i, i+n/2$ 次的差

$$N_{\text{III}} = A_{\text{III}}^T P_{\text{III}} A_{\text{III}} = \begin{bmatrix} 2 \sin^2 \gamma \sum_{i=1}^{n/2} \cos^2 \beta_i & 2 \sin^2 \gamma \sum_{i=1}^{n/2} \sin \beta_i \cos \beta_i & 0 \\ 2 \sin^2 \gamma \sum_{i=1}^{n/2} \sin \beta_i \cos \beta_i & 2 \sin^2 \gamma \sum_{i=1}^{n/2} \sin^2 \beta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad (20)$$

经推导,有 $\sum_{i=1}^{n/2} \sin \beta_i \cos \beta_i = 0$ ,所以,式(20)

中的 $N_{\text{III}}$ 矩阵可表示为:

$$N_{\text{III}} = \begin{bmatrix} 2 \sin^2 \gamma \sum_{i=1}^{n/2} \cos^2 \beta_i & 0 & 0 \\ 0 & 2 \sin^2 \gamma \sum_{i=1}^{n/2} \sin^2 \beta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad (21)$$

## 3 算例与分析

### 3.1 模拟算例分析

为了验证对称历元差分模型的有效性,本文进行了如下仿真实验1:模拟海域水深3 000 m,测量船以应答器在海面的投影为中心进行半径为3 000 m的圆走航,即半径等于水深,测量船速缓慢且平缓。可认为 $\delta\rho_v$ 按式(22)进行周期性变化<sup>[10,19-21,28-29]</sup>:

$$\delta\rho_v = c_1 + c_2 \sin\left(2\pi \frac{t-t_0}{T_w}\right) + c_3 \sin\left(2\pi \frac{t-t_0}{T_D}\right) + c_4 \left(1 - e^{-\frac{1}{2} \frac{\|x-x'\|^2}{(2km)^2}}\right) \quad (22)$$

式中,等号右边第一项为随机性误差;第二项和第三项分别为短周期和长周期误差;第四项是测区影响误差。其中,短周期项的周期 $T_w$ 为几十分

分观测方程可表示为:

$$\Delta\rho_{i+n/2,i} = \rho_{i+n/2} - \rho_i \quad (17)$$

因为在对称历元上,有 $\beta_{i+n/2} = \pi + \beta_i$ ,则对称差分模型的设计矩阵 $A_{\text{III}}$ 可以表示为:

$$A_{\text{III}} = \begin{bmatrix} -2 \sin \gamma \cos \beta_1 & -2 \sin \gamma \sin \beta_1 & 0 \\ -2 \sin \gamma \cos \beta_2 & -2 \sin \gamma \sin \beta_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -2 \sin \gamma \cos \beta_{n/2} & -2 \sin \gamma \sin \beta_{n/2} & 0 \end{bmatrix}_{\frac{n}{2} \times 3} \quad (18)$$

差分后,其权矩阵 $P_{\text{III}}$ 为:

$$P_{\text{III}} = \frac{1}{2} I_{(n/2) \times (n/2)} \quad (19)$$

式中, $I$ 为单位阵。

则对称历元差分模型的法矩阵 $N_{\text{III}}$ 为:

钟到几个小时不等,振幅约0.12 m;长周期项的周期 $T_D$ 为12 h,振幅约0.2 m。因此,令 $c_1 = 0.1$ , $c_2 = 0.12$ , $c_3 = 0.2$ , $c_4 = 0.02$ , $T_w = 20$ , $T_D = 12$ ;  $t_0$ 是初始时刻, $t$ 是任意时刻; $x$ 是 $t$ 时刻声学换能器的三维坐标, $x'$ 是海底应答器的三维坐标。在测量船的三维坐标中加入误差,水平方向误差满足均值为0、标准差为0.05 m的高斯分布,垂直方向误差满足均值为0、方差为0.1 m的高斯分布。

图2给出了随机性误差、短周期误差、长周期误差、测区影响误差等各类分项系统误差的大小和趋势。图3给出了有内波影响和无内波影响情况下总的系统误差的大小和趋势。

本文一共进行两次仿真实验,第1次仿真实

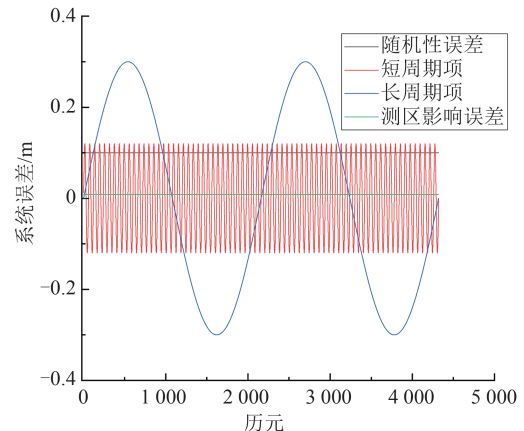


图2 各类系统误差

Fig. 2 All Kinds of System Errors



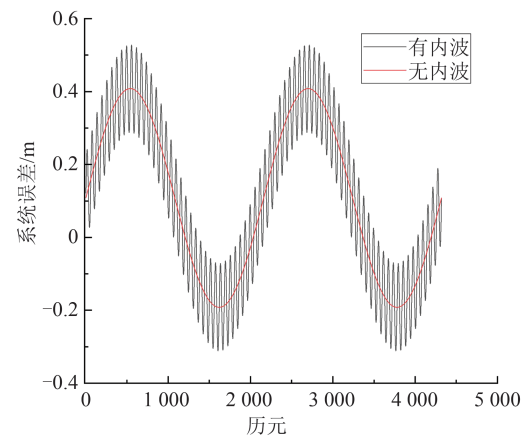


图 3 总的系统误差  
Fig. 3 Total System Errors

验的采样数为 4 320,即采样时长恰好为系统误差  $\delta\rho_v$  的一个周期。表 1 给出了非差定位、历元间差分和对称历元差分定位模型的法矩阵  $N$  和协因数矩阵  $N^{-1}$ ,表 2 给出了不同定位模型计算的残差统计值,其中,RMS(root mean square)表示均方根。表 3 给出了不同定位模型计算的坐标各分量精度统计;图 4 给出了不同定位模型在北(north, N)、东(east, E)、天顶(up, U)方向的设计矩阵系数,图 5 给出了不同定位模型计算的残差值。

表 1 不同定位模型计算的矩阵  $N$ 、 $N^{-1}$ (仿真实验 1)  
Tab. 1  $N$ ,  $N^{-1}$  Calculated by Different Positioning Models (Simulated Experiment 1)

定位模型	$N$			$N^{-1}$		
非差	1 080			0.001		
	0.000	1 080		0.000	0.001	
	0.000	0.000	2 160	0.000	0.000	0.001
历元间差分	1 080			0.001		
	-0.000	1 080		0.000	0.001	
	-0.000	0.001	0.000	0.491	-1.225	$1.337\times10^6$
对称历元差分	1 080			0.001		
	-0.001	1 080		0.000	0.001	
	0.000	0.001	0.000	-0.533	1.831	$2.647\times10^6$

表 2 不同定位模型的残差统计(仿真实验 1)/m  
Tab. 2 Residual Statistics by Different Positioning Models (Simulated Experiment 1)/m

定位模型	最大值	最小值	RMS
非差	0.420	-0.420	0.229
历元间差分	0.015	-0.015	0.009
对称历元差分	-0.000	0.000	0.000

1)从表 1 和图 4 可以看出,圆走航模式下,非差定位模型设计矩阵的 E、N 方向数值分别呈正

表 3 不同定位模型的定位精度统计(仿真实验 1)/m  
Tab. 3 Statistics of Positioning Accuracy of Different Positioning Models (Simulated Experiment 1)/m

定位模型	$m_0$	$m_e$	$m_n$	$m_u$
非差	0.229	0.007	0.007	0.005
历元间差分	0.229	0.007	0.007	262.4
对称历元差分	0.000	0.000	0.000	0.000

弦、余弦变化,振幅约为 0.7,U 方向数值几乎为一常数,约为 -0.7,法矩阵  $N$  的主对角线元素值为 1 080、1 080、2 160,其协因数矩阵  $N^{-1}$  的主对角线元素值为 0.001、0.001、0.001,表明了非差定位模型的观测几何结构较好;历元间差分定位模型设计矩阵的 E、N 方向数值分别呈余弦、正弦变化,但是振幅很小,约为 0.001,U 方向数值约为 0,法矩阵  $N$  的主对角线元素值为 1 080、1 080、0.000,其协因数矩阵  $N^{-1}$  的主对角线元素值为 0.001、0.001 和  $1.337\times10^6$ ;对称历元差分模型的设计矩阵 E、N 方向数值走势与非差定位模型一致,历元数为非差定位模型的一半,振幅为其两倍,约 1.41,U 方向数值也几乎为 0,法矩阵  $N$  的主对角线元素值为 1 080、1 080 和 0.000,其协因数矩阵  $N^{-1}$  的主对角线元素值为 0.001、0.001 和  $2.647\times10^6$ ,这说明三种模型在水平方向上的几何构型均较好,其水平精度衰减因子基本一致,但历元间差分定位模型和对称历元差分定位模型的观测几何构型在垂直方向上明显减弱,这是因为差分模型下,设计矩阵垂直分量系数接近于零,导致法矩阵  $N$  奇异,使得垂直分量解算结果不可靠。

2)从表 2 和图 5 可以看出,非差定位模型解算的残差最大值达到 0.420 m,其 RMS 值为 0.229 m;历元间差分定位模型解算的残差值最大仅为 0.015 m,其 RMS 值为 0.009 m;而对称历元差分定位模型解算的残差及 RMS 值均为一个接近 0 的值。历元间差分模型虽然相较于非差模型消除了绝大部分系统误差,但相较于对称历元差分模型仍然残余了约 1 cm 的系统误差,这说明对称历元差分模型更能有效地消除系统误差。

3)从表 3 中坐标参数的精度看,非差定位模型的水平分量精度为 0.007 m,历元间差分定位模型的水平分量精度也为 0.007 m,而垂直分量精度为 262.4 m,说明历元间差分定位模型没有改变水平分量的计算精度,而导致垂直分量精度异常,这是因为差分后,相邻历元声学换能器的位置变化小,使得设计矩阵中垂直分量几乎都被

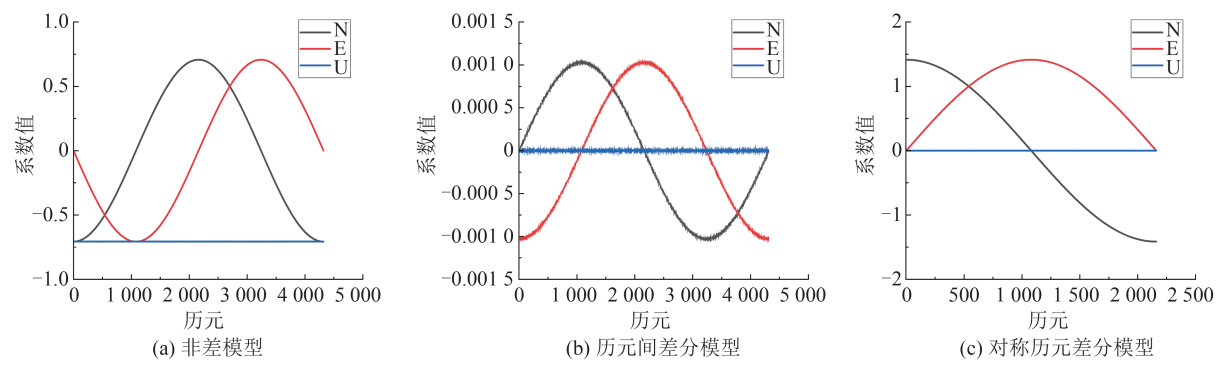


图4 设计矩阵

Fig. 4 Design Matrix

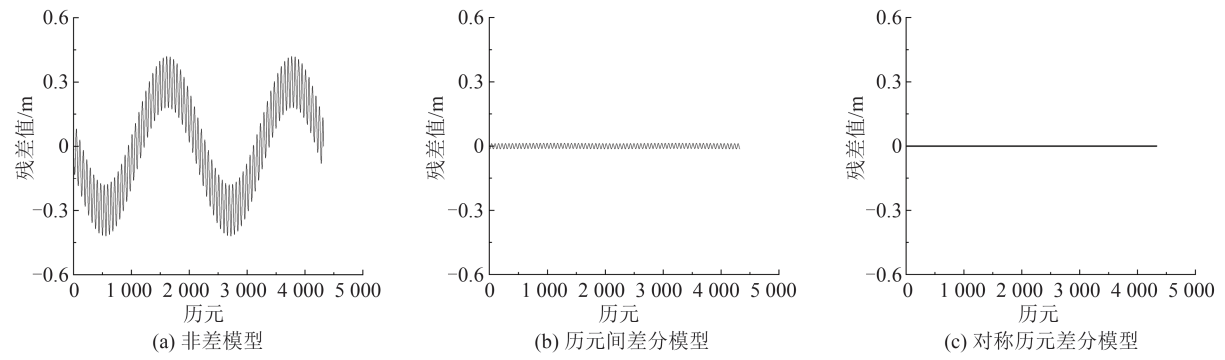


图5 不同模型计算的残差值(仿真实验1)

Fig. 5 Residuals Calculated by Different Models (Simulated Experiment 1)

差去,设计矩阵病态;对称历元差分定位模型在差分后水平分量的精度为一个接近0的小数,这说明对称差分定位模型较历元间差分模型更能有效消除系统误差的影响,此时垂直分量的精度也几乎为0,虽然垂直分量可估而且从数值上看解算精度非常理想,但从法矩阵 $N$ 的值可以知道在解算时观测方程的条件数很大,其垂直分量的解算结果是否可靠还需进一步分析。

仿真实验2的采样数为720,即采样时长为系统误差 $\delta\rho_v$ 周期的1/6。表4给出了非差定位、历元间差分和对称历元差分定位模型的法矩阵 $N$ 和协因数矩阵 $N^{-1}$ ;表5给出了不同定位模型计算的残差统计值;表6给出了不同定位模型计算的坐标各分量精度统计;图6给出了不同定位模型计算的残差值。

1)由表4可以看出,非差定位模型的法矩阵 $N$ 主对角线元素的值为180.0、180.0、360.0,其协因数矩阵 $N^{-1}$ 的主对角线元素仅为0.006、0.006、0.003;历元间差分定位模型法矩阵 $N$ 的主对角线元素值为180.0、180.0、0.000,其协因数矩阵 $N^{-1}$ 的主对角线元素值为0.006、0.006、 $8.107\times10^6$ ;而对称历元差分定位模型法矩阵 $N$ 的主对角线元素值为180.0、180.0、0.000,其协因数矩阵 $N^{-1}$ 的主对角线元素值为0.006、0.006、 $1.729\times10^7$ ,此时同

表4 不同定位模型计算的矩阵 $N$ 、 $N^{-1}$ (仿真实验2)

Tab. 4  $N$ ,  $N^{-1}$  Calculated by Different Positioning Models (Simulated Experiment 2)

定位模型	$N$			$N^{-1}$		
非差	180.0			0.006		
	0.000	180.0		0.000	0.006	
	0.000	0.000	360.0	0.000	0.000	0.003
历元间差分	180.0			0.006		
	0.000	180.0		0.000	0.006	
	-0.000	0.000	0.000	10.68	-2.588	$8.107\times10^6$
对称历元差分	180.0			0.006		
	0.000	180.0		0.000	0.006	
	0.000	0.000	0.000	-14.60	-3.690	$1.729\times10^7$

表5 不同定位模型的残差统计(仿真实验2)/m

Tab. 5 Residual Statistics by Different Positioning Models (Simulated Experiment 2)/m

定位模型	最大值	最小值	RMS
非差	0.212	-0.196	0.094
历元间差分	0.013	-0.013	0.009
对称历元差分	0.044	-0.152	0.057

样可以说明历元间差分定位模型和对称历元差分定位模型在差分后不影响水平分量的估计,而在估计垂直分量时可能会使得垂直分量的结果异常。这说明3种模型在水平方向上的几何观测强度基本一致,但历元间差分定位模型和对称历元差分定位模型的观测几何构型在垂直方向上

表 6 不同定位模型的定位精度统计(仿真实验 2)/m

Tab. 6 Statistics of Positioning Accuracy of Different Positioning Models (Simulated Experiment 2)/m

定位模型	$m_0$	$m_e$	$m_n$	$m_u$
非差	0.094	0.007	0.007	0.007
历元间差分	0.094	0.007	0.007	226.7
对称历元差分	0.041	0.003	0.003	169.2

明显减弱。

2)从表 5 中可以看出,非差定位模型解算的

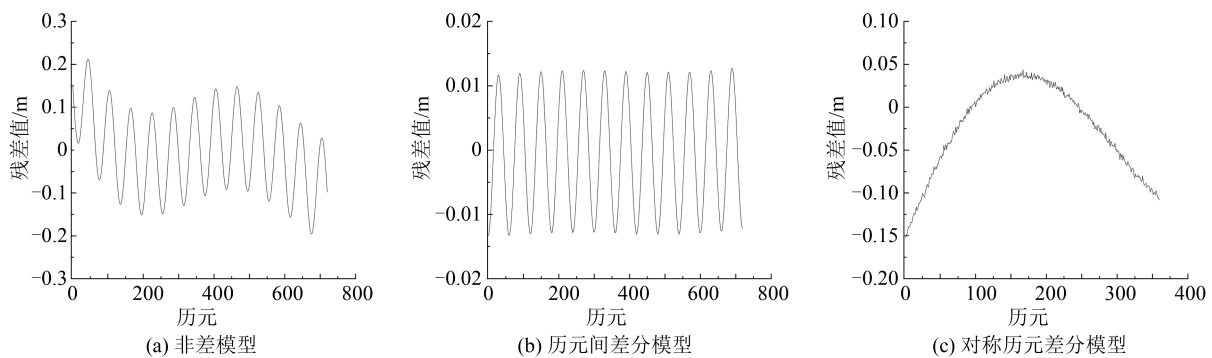


图 6 不同模型计算的残差值(仿真实验 2)

Fig. 6 Residuals Calculated by Different Models (Simulated Experiment 2)

3)从表 6 中可以看出,非差定位模型、历元间差分定位模型和对称历元差分定位模型的单位权中误差分别为 0.094 m、0.094 m、0.041 m,这说明历元间差分定位模型虽然有效削弱了系统误差,但是可能增加了随机误差,导致单位权中误差较大;其中历元间差分定位模型和对称历元差分定位模型的水平方向内符合精度分别为 0.007 m 和 0.003 m,但是垂直分量内符合精度分别达到了 226.7 m 和 169.2 m,再一次说明圆形测量模式下进行差分会减弱观测方程在垂直分量上的几何构型。

### 3.2 实测算例分析

为了检验分析,本文采用一次海试数据进行分析。测区海域平均水深约 3 000 m,在海底布设一个应答器作为海底控制点,测量船以应答器在海面的投影点作为圆心、半径约为 0.5 倍水深做圆走航测量一周,受外界的影响,实际航迹并不是标准圆,如图 7 所示。本次测量共耗时 1.5 h,共测得 684 个水声测距数据。

表 7 给出了非差定位、历元间差分和对称历元差分定位模型的法矩阵  $N$  和协因数矩阵  $N^{-1}$ ,表 8 给出了不同定位模型计算的残差统计值,表 9 给出了不同定位模型计算的坐标各分量精度统计;图 8 给出了不同定位模型设计矩阵系数;图 9

残差最大值为 0.212 m,其 RMS 值为 0.094 m;历元间差分定位模型解算的残差最大值仅为 0.013 m,其 RMS 值为 0.009 m;对称历元差分定位模型的残差最大值为 0.152 m,其 RMS 值为 0.057 m。这说明历元间差分定位模型相较于非差历元差分定位模型消除了绝大部分系统误差,但是对称历元差分定位模型并没有有效削弱系统误差的影响,这说明了当采样时长不足系统误差周期的偶数倍时,对称历元差分定位模型削弱系统误差的效果不及历元间差分定位模型。

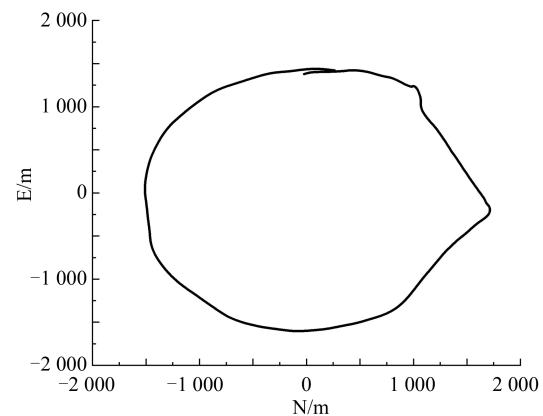


图 7 测量轨迹

Fig. 7 Survey Ship Trajectory

给出了不同定位模型计算的残差值。

1)从表 7 中可以看出,非差定位模型的法矩阵  $N$  主对角线元素的值为 272.6、270.4 和 2 193,其协因数矩阵  $N^{-1}$  的主对角线元素仅为 0.004、0.004 和 0.000;历元间差分定位模型的法矩阵  $N$  的主对角线元素值为 268.9、269.0 和 0.203,其协因数矩阵  $N^{-1}$  的主对角线元素值为 0.004、0.006、7.941;而对称历元差分定位模型法矩阵  $N$  的主对角线元素值为 266.3、267.3、0.124,其协因数矩阵  $N^{-1}$  的主对角线元素值为 0.004、0.009、20.11。这充分说明观测值在作差分之后定位模型的几何结构显著减弱。

表7 不同定位模型计算的矩阵 $N$ 、 $N^{-1}$ (实测算例)  
Tab. 7  $N$ ,  $N^{-1}$  by Different Positioning Models (True Example)

定位模型	$N$			$N^{-1}$		
非差	272.6			0.004		
	21.03	270.4		0.000	0.004	
	78.53	40.49	2 193	0.000	0.000	0.000
历元间差分	268.9			0.004		
	19.67	269.0		-0.001	0.006	
	-0.663	4.445	0.203	0.029	-0.133	7.941
对称历元差分	266.3			0.004		
	19.75	267.3		-0.002	0.009	
	-0.703	4.332	0.124	0.078	-0.332	20.11

2)从表8中可以看出,非差定位模型解算得到的残差最大值为0.645 m,其RMS值为0.264 m;历元间差分模型解算的残差最大值为0.274 m,其RMS值为0.075 m;对称历元差分模型解算的残差最大值为0.561 m,其RMS值为

0.249 m。  
表8 不同定位模型的残差统计(实测算例)/m  
Tab. 8 Residual Statistical by Different Positioning Models (True Example)/m

定位模型	最大值	最小值	RMS
非差	0.645	-0.540	0.264
历元间差分	0.274	-0.264	0.075
对称历元差分	0.538	-0.561	0.249

表9 不同定位模型的定位精度统计(实测算例)/m  
Tab. 9 Statistical of Positioning Accuracy of Different Positioning Models (True Example)/m

定位模型	$m_0$	$m_e$	$m_n$	$m_u$
非差	0.264	0.016	0.016	0.006
历元间差分	0.251	0.016	0.019	0.706
对称历元差分	0.177	0.011	0.017	0.792

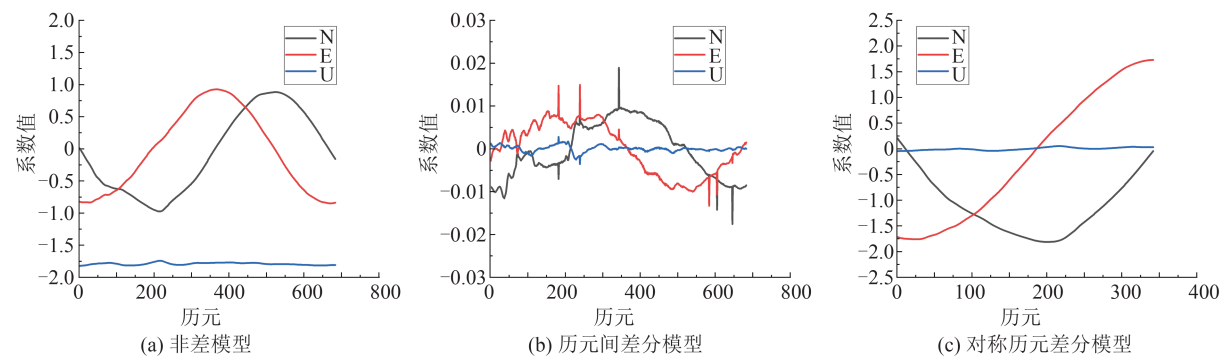


图8 设计矩阵(实测算例)  
Fig. 8 Design Matrix (True Example)

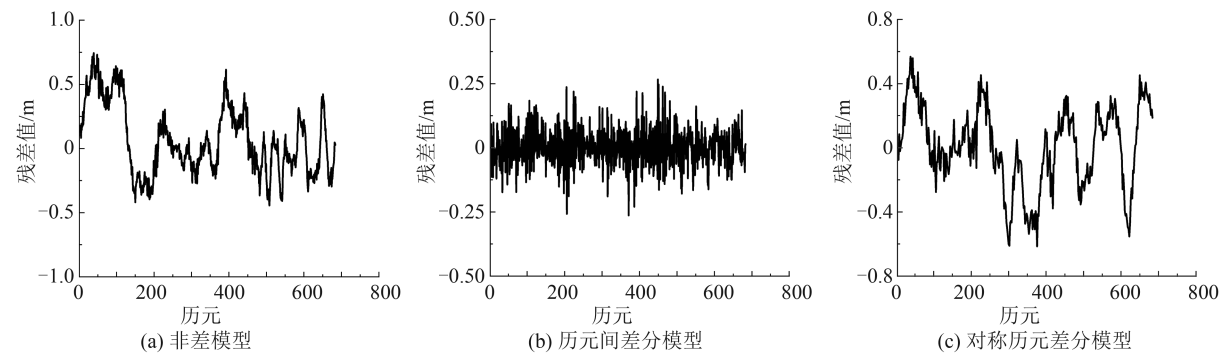


图9 不同模型计算的残差值(实测算例)  
Fig. 9 Residuals Calculated by Different Models (True Example)

这说明了历元间差分模型相较于非差定位模型消除了绝大部分系统误差,但是对称历元差分模型并没有有效削弱误差的影响,造成这样结果的原因可能是由于观测时长太短,不足系统误差周期的偶数倍。  
3)从表9中可以看出,非差定位模型的单位权中误差为0.264 m,E、N、U各分量点位精度分

别为0.016 m、0.016 m和0.006 m;历元间差分模型的单位权中误差为0.251 m,各分量点位精度分别为0.016 m、0.019 m和0.706 m;对称历元差分模型的单位权中误差0.177 m,各分量点位精度分别为0.011 m、0.017 m和0.792 m。3种定位模型在水平分量的内符合精度一致,这是因为测量航迹为圆形,影响水平方向的误差对称的缘



故,这也是对称历元差分模型单位权中误差更小的原因;垂直分量的内符合精度分别为0.006 m、0.706 m和0.792 m,这说明圆形测量模式下,在差分之后,垂直分量估计的结果会出现异常。

4)对比图8和图4,实测数据和模拟数据计算的设计矩阵变化趋势基本一致,实测数据的设计矩阵元素都具有明显的细小波动,这主要是由于测量船的控制原因,其测量轨迹并不是一个规则的圆,而仿真模拟数据的测量轨迹为规则的圆。

5)从图9中可以看出,3种定位模型的残差序列均存在明显的周期现象,说明仍然存在周期性系统误差的影响,这与仿真算例的结论有明显出入,说明在实际测量时,影响最终结果的因素要比仿真算例中考虑的干扰因素要复杂得多。此外,受目前实测数据的约束,无法完全达到仿真算例中的条件,若有条件能使得测量周期足够长时,采用对称历元差分模型或可进一步削弱系统误差的影响。

## 4 结 语

本文在声速变化引起的系统误差参数具有一定周期性的前提下,提出了一种对称历元差分定位模型。在圆走航模式下,以非差分定位模型的定位精度作为参考,系统分析了历元间差分定位模型和对称历元差分定位模型对海底控制点的定位效能,通过模拟仿真分析和实测数据分析得到如下结论:

1)当观测时长为系统误差变化周期的偶数倍时,在圆走航模式下,从参数可估性来看,历元间差分能够消除大部分的系统误差,但是只能较为准确地估计出平面位置参数,垂直分量参数估计出现异常。对称差分模型相较于历元间差分模型能够更好地消除系统误差,虽然对称差分此时能够估计出坐标的三维参数,但是从法矩阵 $N$ 的值可以知道在估计时观测方程的条件数很大,其垂直分量的估计结果可能不可靠。

2)当观测时长不为系统误差变化周期的偶数倍时,对称差分模型削弱系统误差的能力明显弱于历元间差分模型,此时,对称差分定位模型不再适合用来削弱系统误差。

3)对称差分模型在理论上虽然能够较好地削弱系统误差的影响,但是其应用条件十分严格,必须要求观测时间为系统误差变化周期的偶数倍,因此,实际工程应用价值较低。此外,由于圆走航模式对于垂直分量的估计精度都不太理

想,因此若要准确估计垂直分量,可采用交叉走航观测来支撑垂向定位信息<sup>[30]</sup>,或者直接采用海底压力计进行测量,可得厘米级垂直分量精度<sup>[6-7,31-33]</sup>。

## 参 考 文 献

- [1] Ning Jinsheng, Wang Hua, Cheng Pengfei, et al. System Construction and Its Progress of China Geodetic Coordinate System 2000[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2015, 40(5): 569-573. (宁津生, 王华, 程鹏飞, 等. 2000国家大地坐标系框架体系建设及其进展[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2015, 40(5): 569-573.)
- [2] Yang Yuanxi. 2000 China Geodetic Coordinate System[J]. *Chinese Science Bulletin*, 2009, 54(16): 2271-2276. (杨元喜. 2000中国大地坐标系[J]. 科学通报, 2009, 54(16): 2271-2276.)
- [3] Wu Fumei, Liu Guangming, Wei Ziqing. Velocity Field Model of CGCS2000 Based on Euler Vector of Local Area[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2012, 37(4): 432-435. (吴富梅, 刘光明, 魏子卿. 利用局域欧拉矢量法建立CGCS2000速度场模型[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2012, 37(4): 432-435.)
- [4] Yang Y, Qin X. Resilient Observation Models for Seafloor Geodetic Positioning[J]. *Journal of Geodesy*, 2021, 95(7): 1-13.
- [5] Liu Jingnan, Zhao Jianhu, Ma Jinye. Concept of Constructing the Underwater PNT Network with the Abilities of Communication, Navigation and Remote Sensing in the Deep Sea[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2022, 47(10): 1523-1534. (刘经南, 赵建虎, 马金叶. 通导遥一体化深远海PNT基准及服务网络构想[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2022, 47(10): 1523-1534.)
- [6] Yang Yuanxi, Liu Yanxiong, Sun Dajun, et al. Seafloor Geodetic Network Establishment and Key Technologies[J]. *Scientia Sinica (Terrae)*, 2020, 50(7): 936-945. (杨元喜, 刘焱雄, 孙大军, 等. 海底大地基准网建设及其关键技术[J]. 中国科学: 地球科学, 2020, 50(7): 936-945.)
- [7] Liu Jingnan, Chen Guanxu, Zhao Jianhu, et al. Development and Trends of Marine Space-Time Frame Network[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2019, 44(1): 17-37. (刘经南, 陈冠旭, 赵建虎, 等. 海洋时空基准网的进展与趋势[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2019, 44(1): 17-37.)
- [8] Li Linyang, Lü Zhiping, Cui Yang. Summary of the Research Progress of Seafloor Geodetic Control Net-

- work[J]. *Bulletin of Surveying and Mapping*, 2018 (1): 8-13. (李林阳, 吕志平, 崔阳. 海底大地测量控制网研究进展综述[J]. 测绘通报, 2018 (1): 8-13.)
- [9] Yamada T, Ando M, Tadokoro K, et al. Error Evaluation in Acoustic Positioning of a Single Transponder for Seafloor Crustal Deformation Measurements [J]. *Earth Planets Space*, 2002, 54: 871-881.
- [10] Osada Y, Fujimoto H, Miura S, et al. Estimation and Correction for the Effect of Sound Velocity Variation on GPS/Acoustic Seafloor Positioning: An Experiment off Hawaii Island [J]. *Earth Planets & Space*, 2003, 55(10): 17-20.
- [11] Chen Guanxu, Liu Yang, Liu Yanxiong, et al. Adjustment of Transceiver Lever Arm Offset and Sound Speed Bias for GNSS-Acoustic Positioning [J]. *Remote Sensing*, 2019, 31: 693-707.
- [12] Ma Yueyuan, Yang Yuanxi, Zeng Anmin, et al. Bayesian Estimation Model of Seafloor Control Points Based on Prior Information of Offset Parameters [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2023, 48(9): 1465-1472. (马越原, 杨元喜, 曾安敏, 等. 顾及偏移参数先验信息的海底控制点贝叶斯估计模型[J]. 武汉大学学报信息科学版, 2023, 48(9): 1465-1472.)
- [13] McIntyre M C. Design and Testing of a seafloor Geodetic System [D]. San Diego, CA: University of California, 1989.
- [14] Ma Yueyuan, Yang Yuanxi, Zeng Anmin. GNSS-A Straight-Line Survey Pattern and Trajectory Combination Optimization Analysis [J]. *Chinese Journal of Geophysics* 2022, 65 (10): 3797 - 3808. (马越原, 杨元喜, 曾安敏. GNSS-A 直线测量模式及航迹组合优化分析[J]. 地球物理学报, 2022, 65(10): 3797-3808.)
- [15] Fujita M, Ishikawa T, Mochizuki M, et al. GPS/Acoustic Seafloor Geodetic Observation: Method of Data Analysis and its Application [J]. *Earth Planets Space*, 2006, 58: 265 - 275.
- [16] Wu Yongting. Study on Theory and Method of Precise LBL Positioning and Development of Positioning Software System [D]. Wuhan: Wuhan University, 2013. (吴永亭. LBL精密定位理论方法研究及软件系统研制[D]. 武汉: 武汉大学, 2013.)
- [17] Xue Shuqiang, Yang Yuanxi. Generalized Inverse Distance Weighting Method for Spatial Interpolation [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2013, 38(12): 1435-1439. (薛树强, 杨元喜. 广义反距离加权空间推估法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2013, 38(12): 1435-1439.)
- [18] Zhao J, Zhou Y, Zhang H, et al. A New Method for Absolute Datum Transfer in Seafloor Control Network Measurement [J]. *Journal of Marine Science and Technology*, 2016, 21, 216-226.
- [19] Chen Guanxu, Liu Yang, Liu Yanxiong, et al. Improving GNSS-Acoustic Positioning by Optimizing the Ship's Track Lines and Observation Combinations [J]. *Journal of Geodesy*, 2021, 94(6): 61.
- [20] Sun Wenzhou, Zeng Anmin, Zhao Xiang. Iterative Algorithm of Seafloor Control Points Positioning Taking Reference Depth Error into Account [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2024, 49(2): 324-330. (孙文舟, 曾安敏, 赵翔. 顾及参考深度误差的海底控制点迭代算法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2024, 49(2): 324-330.)
- [21] Xu P L, Ando M, Tadokoro K. Precise Three-Dimensional Seafloor Geodetic Deformation Measurements Using Difference Techniques [J]. *Earth, Planets and Space*, 2005, 57(9): 795-808.
- [22] Wang J, Xu T, Nie W, et al. The Construction of Sound Speed Field Based on Back Propagation Neural Network in the Global Ocean [J]. *Marine Geodesy*, 2020, 43(6): 1-14.
- [23] Wang Yan, Lin Wangsheng, Liang Guolong, et al. The Influence and Revision of Ray Bending in Synchronous Underwater Acoustic Positioning System [J]. *Technical Acoustics*, 2009, 28(5): 123-124. (王燕, 林旺生, 梁国龙, 等. 声线弯曲对同步水声定位系统影响分析及修正[J]. 声学技术, 2009, 28(5): 123-124.)
- [24] Li Shengxue, Wang Zhenjie, Nie Zhixi, et al. A Self-adapting Division Ray-Tracing Method in the Long Baseline Acoustic Positioning [J]. *Marine Science Bulletin*, 2015, 34(5): 491-498. (李圣雪, 王振杰, 聂志喜, 等. 一种适用于深海长基线定位的自适应分层声线跟踪法[J]. 海洋通报, 2015, 34(5): 491-498.)
- [25] Wang Zhenjie, Li Shengxue, Nie Zhixi, et al. A Large Incidence Angle Ray-Tracing Method for Underwater Acoustic Positioning [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2016, 41(10): 1404-1408. (王振杰, 李圣雪, 聂志喜, 等. 水声定位中一种大入射角声线跟踪方法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2016, 41(10): 1404-1408)
- [26] Yang Fanlin, Xin Mingzhen, Liu Jingnan, et al. Discussion of Deep-Sea Dynamic Positioning Methods with Ultra-short Baseline Multi-beacon Constraint

- [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2023, 48(11): 1876-1883. (阳凡林, 辛明真, 刘经南, 等. 超短基线多信标约束的深海动态定位方法探讨[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2023, 48(11): 1876-1883. )
- [27] Yang F L, Lu Xiu S, Li Jia B, et al. Precise Positioning of Underwater Static Objects Without Sound Speed Profile [J]. *Marine Geodesy*, 2011, 34(2): 138-151.
- [28] Sun Wenzhou, Yin Xiaodong, Zeng Anmin, et al. Calculating the Starting Incidence Angle by Iterative Method for Positioning Seafloor Control Points [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2020, 45(10): 1588-1593. (孙文舟, 殷晓冬, 曾安敏, 等. 海底控制点定位初始入射角迭代计算方法的比较研究[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2020, 45(10): 1588-1593. )
- [29] Spiess F N, Chadwell C D, Hildebrand J A, et al. Precise GPS/Acoustic Positioning of Seafloor Reference Points for Tectonic Studies [J]. *Physics of the Earth & Planetary Interiors*, 1998, 108(2): 101-112.
- [30] Tao Benzao. Correlation Adjustment and Grouping Adjustment [J]. *Bulletin of Surveying and Mapping*, 1978(4): 10-14. (陶本藻. 相关平差与分组平差[J]. 测绘通报, 1978(4): 10-14. )
- [31] Ma Y Y, Yang Y X, Li J L, et al. Model with Systematic Error Difference Constraint for Absolute Positioning of Seafloor Geodetic Stations [J]. *Ocean Engineering*, 2024, 297: 117093.
- [32] Valérie B, Bouin M N, Stéphane C, et al. Absolute Seafloor Vertical Positioning Using Combined Pressure Gauge and Kinematic GPS Data [J]. *Journal of Geodesy*, 2010, 84(1): 65-77.
- [33] Zhao Jianhu, Zou Yajing, Wu Yongting, et al. Determination of Underwater Control Point Coordinate Based on Constraint of Water Depth [J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2016, 48(10): 137-141. (赵建虎, 邹亚靖, 吴永亭, 等. 深度约束的海底控制网点坐标确定方法[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2016, 48(10): 137-141. )