

引文格式:周建彬,贲进,王蕊,等.四孔六边形全球离散格网一致瓦片层次结构编码运算[J].武汉大学学报(信息科学版),2023,48(4):639-646.DOI:10.13203/j.whugis20200530



Citation: ZHOU Jianbin, BEN Jin, WANG Rui, et al. Encoding and Operation for the Aperture-4 Hexagonal Discrete Global Grids on Uniform Tiles[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2023, 48(4):639-646.DOI:10.13203/j.whugis20200530

四孔六边形全球离散格网一致瓦片层次 结构编码运算

周建彬¹ 贲进¹ 王蕊¹ 郑明阳¹

¹ 信息工程大学地理空间信息学院,河南 郑州,450000

摘要:全球离散格网系统是支持多源地球空间信息融合处理的有效解决方案,格网系统单元层次关系及全球统一编码运算是研究难点。首先,根据四孔六边形剖分特点,提出封闭二十面体表面的一致瓦片层次结构;然后,利用复进制数建立一致瓦片层次结构的编码数学模型,并等价设计全球统一编码运算、编码邻近查询、编码与地理坐标转换等算法;最后,设计了格网层次结构验证和编码运算效率测试实验。实验结果表明,一致瓦片层次结构的编码与地理坐标转换平均效率分别约是同类成果的2.74、1.73倍,编码邻近查询平均效率约是其7.46倍,且随着格网层次升高,效率优势更显著;与同类成果相比,所提方案瓦片具有一致性,且数量更少,算法复杂度低;层次结构的原理简明易懂,计算机执行效率高,可为多源对地观测数据统一组织管理、处理分析提供理论和技术支撑。

关键词:四孔六边形;一致瓦片;全球离散格网;编码运算

中图分类号:P208

文献标识码:A

收稿日期:2021-10-09

DOI:10.13203/j.whugis20200530

文章编号:1671-8860(2023)04-0639-08

Encoding and Operation for the Aperture-4 Hexagonal Discrete Global Grids on Uniform Tiles

ZHOU Jianbin¹ BEN Jin¹ WANG Rui¹ ZHENG Mingyang¹

¹ Institute of Geographical Spatial Information, Information Engineering University, Zhengzhou 450000, China

Abstract: Objectives: Discrete global grid systems are the preferred data models supporting multisource geospatial information fusion. Hexagonal grids have become more popular in many applications due to their geometric characteristics within uniform adjacent. Methods: We design a uniform tiles hierarchy on the surface of the icosahedron according to the characteristics of the aperture-4 hexagonal discrete global grids, using complex numbers to build a unified coding and operation model. We also design algorithms including inter-operating between geographic coordinates and codes, querying neighborhood codes. Results: The experimental results show that interoperation between geographic coordinates and codes efficiency of the proposed algorithm is approximately 2.74 and 1.73 times that of the traditional algorithm respectively, and that neighborhood codes query efficiency of the proposed algorithm is approximately 7.46 times that of the traditional algorithm. As the grid level rises, the advantages of the proposed algorithm become more obvious. Conclusions: The results of this paper are expected to provide theoretical and technical supports for the unified organization, management, processing and analysis of multi-source earth observation data.

Key words: aperture-4 hexagon; uniform tiles; discrete global grid; coding operation

近年来,地球空间数据的应用越来越广泛,这些数据的规模、形态、基准等存在较大差异,导

基金项目:国家自然科学基金(41671410)。

第一作者:周建彬,硕士生,主要从事全球离散格网方面的研究。ZhouDGGS0901@139.com

通讯作者:贲进,博士,教授。benj@lreis.ac.cn

致数据集之间的汇聚、处理和挖掘异常困难,迫切需要建立以空间位置为主键的数据关联新模式,以更好地支持空间数据融合与互操作^[1]。全球离散格网系统(discrete global grid systems,DGGS)采用特定方法将地球均匀离散化,形成无缝无叠的多分辨率格网层次结构,采用单元地址编码代替传统地理坐标参与数据操作^[2-3]。它具有离散性、层次性和全局连续性的特征,可解决传统平面模型在全球空间数据管理与多尺度操作上的数据断裂、几何变形和拓扑不一致等问题^[4],有助于从多源、异构地球大数据中挖掘知识。

六边形格网一致相邻且拓扑关系一致,单元最接近圆且采样效率和角分辨率最高^[5],这些优点也可延续至球面^[5],使得六边形格网有利于空间数据处理,受到学术界的广泛关注。但六边形不具备自相似性,单元隶属关系唯一的层次结构很难建立。而且在多面体表面进行六边形递归剖分,不可避免会产生单元跨多个面的情况,增加了建立全球连续、完整多分辨率数学模型的难度。文献[6]在环境监测与评估项目(environmental monitoring and assessment program,EMAP)中采用六边形等积全球离散格网,但只针对多面体的单个面开展研究,没能实现全球统一建模与编码;文献[7]提出了多分辨率三孔等积六边形格网(icosahedral snyder equal-area aperture 3 hexagonal grid, ISEA3H),在改进广义平衡三进制^[8](generalized balanced ternary,GBT)的基础上建立了二十面体上的唯一编码方案;加拿大Pyxis Innovation公司基于ISEA3H格网特点提出了Pyxis编码方案^[9];文献[10]为Pyxis设计了编码运算和傅里叶变换算法;文献[11]建立了ISEA3H编码方案的严密数学模型,但二十面体上的瓦片是两种类型,且数量较多,导致跨面运算需考虑多种情况。四孔六边形格网系统不同层次的单元方向固定,且能与四叉树编码和二进制运算建立关联,有利于计算机高效实现。文献[12]组合四孔剖分的两种类型,提出六边形四元平衡结构(hexagonal quaternary balanced structure,HQBS),并借助正二十面体扩展至球面。但HQBS层次关系比较复杂,且编码运算过程中会出现正则化倒退重算的情况,运算效率不高^[11]。为了建立简明层次关系,文献[13]借助复进制数设计了六边形格点四叉树(hexagon lattice quad tree,HLQT)层次编码方案,克服了HQBS单元中心和顶点混合编码的不

足,显著提高了编码索引效率。但HLQT将全球划分为12个顶点瓦片和20个面瓦片^[14],导致瓦片边界处理情况仍然复杂。文献[15]将六边形格网与二十面体菱形结构结合,设计了菱形块与四孔六边形格网的二进制编码,可用于战场环境数据的实时可视化,但并未深入研究编码索引、数据组织等问题;文献[16]基于隔层和邻层单元层次关系设计了六边形格点对称树(hexagon lattice symmetry tree,HLST)格网编码方案,但该方案局限于平面,未扩展至全球。

综上所述,六边形全球离散格网系统研究意义重大且更具挑战性,现有成果还存在方案较复杂、全球难扩展、效率需提高等不足,因此,本文结合四孔六边形剖分的特点,提出封闭二十面体表面的一致瓦片层次结构及其编码数学模型,等价设计全球统一编码运算、邻近查询、编码转换等算法。

1 层次剖分及编码

层次递归剖分是生成多分辨率格网、设计编码方案的基础。本文将无限平面上的四孔六边形格网分为A、B两种类型,规定A类型单元剖分至下一层得到1个A类型和12个B类型子单元,B类型单元剖分至下一层只得到1个A类型子格网,如图1所示。

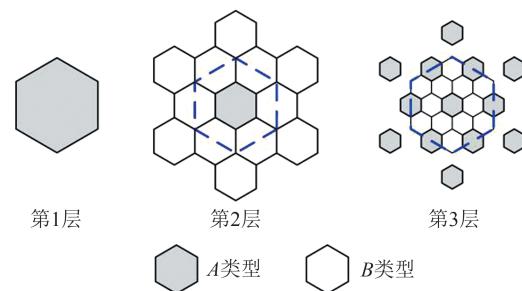


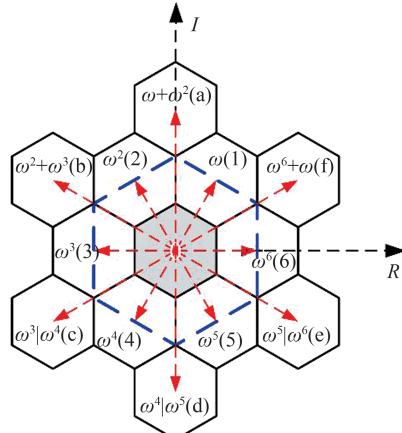
图1 层次剖分示意图

Fig.1 Diagram of Hierarchical Refinement

按照上述规定生成的多分辨率格网具有以下特点:(1)相邻层次单元面积比为4:1,与四孔径定义一致^[3];(2)从第2层开始,A类型单元在逻辑和物理上均隶属于上层父单元,而B类型单元逻辑隶属于上层A类型父单元,物理隶属于上上层A类型父单元。因此,A类型单元和B类型单元分别在邻层和隔层具有逻辑和物理隶属一致性,有利于六边形格网在全球多分辨率数据聚合等处理时减少采样误差,提高计算精度。

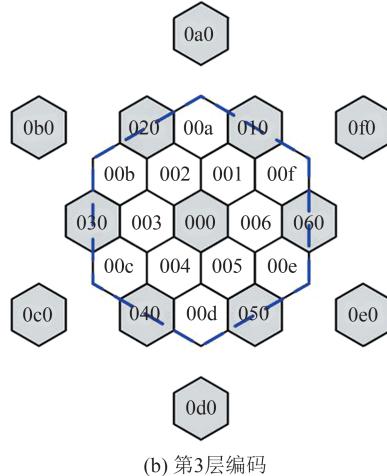
将第1层单元中心定位于复平面原点,复进

制数 $\omega = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 表示与实数轴 R 夹角为 $\frac{\pi}{3}$ 的向量, 则第 2 层单元中心可表示为集合 $D = \{0, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega^6, \omega + \omega^2, \omega^2 + \omega^3, \omega^3 + \omega^4, \omega^4 + \omega^5, \omega^5 + \omega^6, \omega^6 + \omega\}$, 对应等效编码十六进制码元集合 $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, a, b, c, d, e, f\}$,



(a) 单元中心的复进制数表达

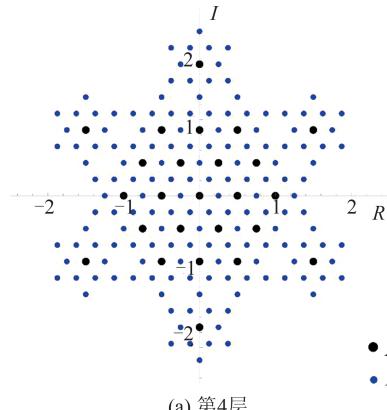
如图 2(a) 所示。根据剖分规则, A 类型单元的子单元直接在编码末尾添加集合 C 的码元即可, 而 B 类型单元的子单元直接在末尾添加 0 码元即可, 如图 2(b) 所示。根据复进制数理论, 递归计算出第 4~5 层的单元中心, 如图 3 所示。



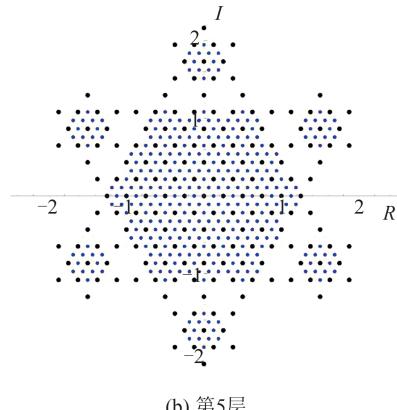
(b) 第3层编码

图 2 复进制数编码示意图

Fig.2 Schematic Diagram of Complex Number Encoding



(a) 第4层



(b) 第5层

图 3 第 4~5 层单元中心在复平面的表达

Fig.3 Expression of Cells' Center on the Complex Plane at Levels 4-5

2 一致瓦片层次结构

借助正多面体将平面格网映射至全球是建立全球离散格网的重要方法。正二十面体面数最多且每个面都是三角形, 具有格网变形小、易于与六边形耦合的优点。封闭正二十面体表面与球面拓扑等价^[17], 因此正二十面体表面编码运算与球面编码运算在拓扑关系上等价^[14]。二十面体上初始剖分形成的单元称为“瓦片”, 例如文献[7, 10-11, 14]将二十面体初始剖分为 12 个顶点瓦片和 20 个面瓦片。为避免出现不同类型的瓦片, 简化跨瓦片处理的情况, 本文提出一致瓦

片结构。如图 4 所示, 每个瓦片大小相同且均以二十面体顶点为中心, 采用十六进制 0~b 标识。每个瓦片可看作初始 A 类型单元, 按照§1 方式进行剖分并建立复平面坐标系(见图 2(a)), 使得每个瓦片的内部编码几乎一致, 称其为一致瓦片六边形层次结构(hexagon hierarchy on uniform tiles, HHUT)。格网分辨率每提高一个层次, 单元编码就增加一个十六进制码元, 第 28 层平均单元面积约 7 cm^2 , 足够满足高精度计算分析需求。为便于全球统一标识, 设计 HHUT 十六进制编码规则如下:(1)前 2 位 R_1, R_2 作为保留位, 均以 0 标识;(2)第 3 位 E 标识格网要素类型, 0 标识单元中心,

1标识单元顶点,2标识单元边界;(3)第4位T标识瓦片编码, $T=\{0,1,\dots,b\}$;(4)第5位至第 $n+4$ 位(C_1,C_2,\dots,C_n ,其中n为格网层次)标识每一层子单元编码, $C_i\in\{0,1,2,3,4,5,6,a,b,c,d,e,f\}$ 。

第2层瓦片结构及编码(缺前3位)如图4所示,实际编码应在编码前添加000,如305的实际编码为000305,编码000a01030标识位于a号瓦片的第5层单元。

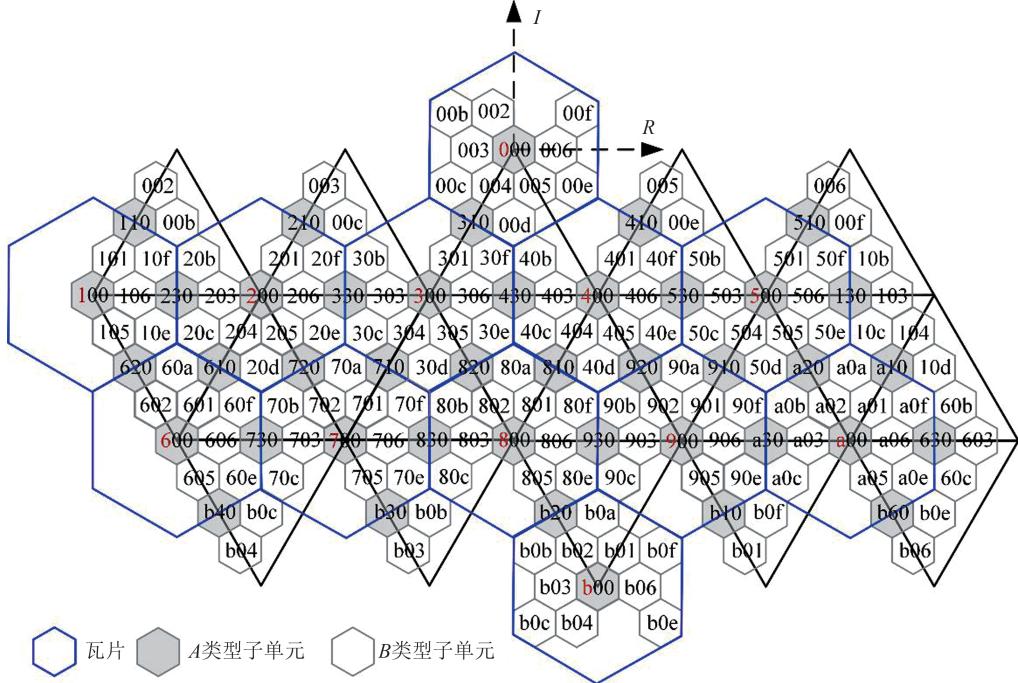


图4二十面体一致瓦片六边形层次结构($n=2$)

Fig.4 HHUT on the Icosahedron at Level 2

3 球面空间编码查询

3.1 邻近查询

六边形只有6个不同方向边邻近单元,查询时只需加上第n层各方向的单位编码 $0000\underbrace{0\dots 0}_n i$ ($i=1,2,3,4,5,6$)即可^[16]。考虑到

本文方案A类型子单元有13个,因此部分单元邻近查询时不需每个方向都采用编码加法运算,只需改变末尾位码元。针对某一编码 $000T\dots C_{n-1}C_n$,编码邻近查询算法步骤如下:(1)若 $C_n=0$ 且 $C_{n-1}=0$,则6个方向的邻近单元均通过改变末尾位得到,如编码300(见图4);(2)若 $C_n=0$ 且 $C_{n-1}\neq 0$,则4个方向的邻近单元通过改变末尾位得到,其余2个方向加法运算,如编码330(见图4);(3)若 $C_n=\{1,2,3,4,5,6\}$,则5个方向的邻近单元通过改变末尾位得到,其余1个方向加法运算,如编码304(见图4);(4)若 $C_n=\{a,b,c,d,e,f\}$,则2个方向的邻近单元通过改变末尾位得到,其余4个方向加法运算,如编码30e(见图4)。

3.2 层次查询

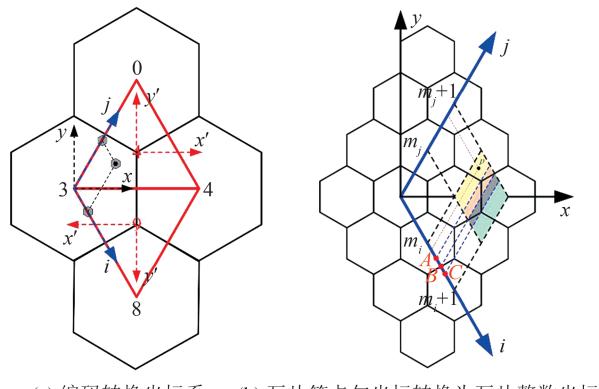
层次查询主要包括查找父单元及子单元编

码。由层次剖分规律可知,A、B类型的父单元直接将该编码去掉末尾位即可得到。A类型的子单元在该编码末尾位添加码元集合 $\{0,1,2,3,4,5,6,a,b,c,d,e,f\}$,B类型的子单元只需在该编码末尾添加码元0。

4 球面空间编码与地理坐标转换

4.1 地理坐标转换至编码

现有地理空间数据位置以地理坐标(经纬度)记录为主,研究地理坐标快速转换为格网编码是保证数据进入格网系统的关键。以图4中0、3、4、8号瓦片及其关联的三角面为例,如图5(a)所示,定义在三角面上的坐标系称为投影坐标系(坐标轴分别是 x' 、 y');定义在瓦片上的坐标系有两个,分别称为瓦片笛卡尔坐标系(坐标轴分别是 x 、 y)和瓦片整数坐标系(坐标轴分别是 i 、 j)。地理坐标转换至编码算法步骤如下:(1)将经纬坐标映射(如Snyder投影^[18])至二十面体三角面,得到投影坐标(x' 、 y');(2)将三角面的投影坐标通过平移转换至对应瓦片的笛卡尔坐标(x , y);(3)将瓦片笛卡尔坐标转换为瓦片整数坐标(i , j);(4)根据瓦片整



(a) 编码转换坐标系 (b) 瓦片笛卡尔坐标转换为瓦片整数坐标

图 5 地理坐标转换至编码坐标系定义

Fig.5 Definition of the Coordinate System that Converts the Latitude and Longitude to the Code

数坐标计算坐标轴上的格网编码;(5)将整数坐标轴上的格网编码相加得到最终编码。

步骤(3)中以图 5(a)中的 3 号瓦片(i, j 均为正值)为例,设 $p(x, y)$ 是 3 号瓦片坐标系下一点,将瓦片坐标分解至整数坐标轴上,得到 i, j 轴上的浮点坐标 $p(i_x, j_y)$,计算如下:

$$\begin{cases} i_x = x - \frac{1}{\sqrt{3}}y \\ j_y = x + \frac{2}{\sqrt{3}}y \end{cases} \quad (1)$$

如图 5(b)所示, m_i, m_j 分别是 i_x, j_y 取整后的值,则该点在 i 轴上的小数部分为 $r_i = i_x - m_i$, 在 j 轴上的小数部分为 $r_j = j_y - m_j$, 通过小数部分的位置,最终求得该点的整数坐标 i, j , 则小数部分 $m_{iA} = 1/3$, $m_{iB} = 1/2$, $m_{iC} = 2/3$, 可得整数坐标如下:

若 $r_i < 1/3$, 则:

$$\begin{cases} i = m_i \\ j = \begin{cases} m_j, r_j < \frac{1}{2}r_i + \frac{1}{2} \\ m_j + 1, \text{ 其他} \end{cases} \end{cases} \quad (2)$$

若 $1/3 \leq r_i < 1/2$, 则:

$$\begin{cases} i = \begin{cases} m_i + 1, r_j < 2r_i \text{ 且 } 1 - r_i \leq r_j \\ m_i, \text{ 其他} \end{cases} \\ j = \begin{cases} m_j, r_j < 1 - r_i \\ m_j + 1, \text{ 其他} \end{cases} \end{cases} \quad (3)$$

若 $1/2 \leq r_i < 2/3$, 则:

$$\begin{cases} i = \begin{cases} m_i, r_j < 1 - r_i \text{ 且 } 2r_i - 1 < r_j \\ m_i + 1, \text{ 其他} \end{cases} \\ j = \begin{cases} m_j, r_j < 1 - r_i \\ m_j + 1, \text{ 其他} \end{cases} \end{cases} \quad (4)$$

若 $2/3 \leq r_i < 1$, 则:

$$\begin{cases} i = m_i + 1 \\ j = \begin{cases} m_j, r_j < \frac{1}{2}r_i \\ m_j + 1, \text{ 其他} \end{cases} \end{cases} \quad (5)$$

4.2 编码转换至地理坐标

设层次 n 下的某一单元中心编码为 $000T \dots C_{n-1}C_n$, 编码转换至经纬度算法的步骤如下:(1)将编码转换成瓦片笛卡尔坐标 (x, y) ;(2)将瓦片笛卡尔坐标通过平移转换成三角面投影坐标 (x', y') ;(3)将三角面投影坐标映射(如逆 Snyder 投影)至球面, 得到地理坐标。在步骤(1)中, 由于编码本质上是复进制数, 可将编码的各层码元还原为复进制数, 根据层次缩放后再累加, 最终得到单元中心的复进制坐标, 而复进制坐标系和瓦片笛卡尔坐标系完全重合。瓦片笛卡尔坐标 (x, y) 计算如下:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2^i} \sum_{i=1}^n C_{i_x} \\ y = \frac{1}{2^i} \sum_{i=1}^n C_{i_y} \end{cases} \quad (6)$$

式中, C_{i_x}, C_{i_y} 分别表示码元 C_i 对应的复进制数坐标实数和虚数分量。

5 实验与分析

5.1 一致瓦片层次结构验证与可视化

本文首先实现 HHUT 的多层次表达, 给定格网层次 n , 生成该层次下的全球格网数据并可视化, 具体过程如下:(1)给定格网层次 n , 得到每个瓦片中心编码 $000T \underbrace{0 \dots 0}_n$; (2)按照文献[19]中区域格网索引算法获得每个瓦片中心周围 k 环的单元编码, 其中 k 取在该层次下查找的格网足以覆盖整个瓦片的值; (3)剔除每个瓦片多余的单元编码, 并将编码转换为经纬度数据文件可视化表达。

各瓦片格网可视化时赋予不同的颜色, 结果如图 6 所示。该过程不仅可生成四孔六边形全球离散格网系统, 还验证了本文邻近查询算法以及编码与地理坐标互相转换算法的正确性。

5.2 编码运算效率测试与分析

全球离散格网系统的编码运算效率直接影响数据处理, 在数据量庞大特别是针对全球数据处理时, 原子操作效率较小的提高会对系统整体计算效率产生重大影响。为验证 HHUT 编码运算的效率, 设计了对比实验。

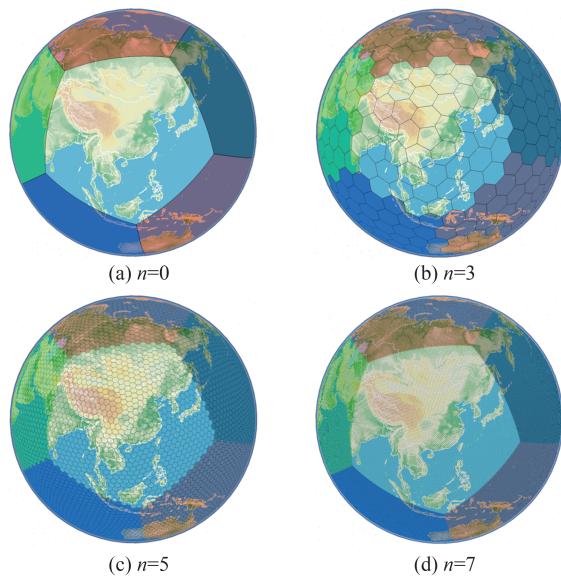


图6 HHUT全球多层次可视化表达
Fig.6 Global Multi-level Visualization of the HHUT

现有四孔六边形全球离散格网系统中,HLQT相对其他同类型成果具有较大优势,因此本文选择HLQT作为对比对象,针对基本编码运算即地理坐标转换成编码、编码转换成地理坐标、邻近查询设计了效率对比实验。经纬度坐标全球均匀遍历,遍历步长 0.2° ,共计162万个点。首先将经纬度转换成编码,再将得到的编码转换成经纬度同时邻近查询。为保证实验客观公正,本文将实验效率进行归一化处理,得到每次操作平均所需时间,效率比是HHUT与HLQT方案时间比的倒数,每组运行10次,取平均值,全部程序均编译为Release版本,在同一台计算机上执行,配置为:Intel Core i7-8700@3.20 GHz六核,8 GB RAM,WDC 480 GB SSD;操作系统为Windows 7旗舰版64位SP1;开发工具为Microsoft Visual C++ Enterprise 2017-版本15.9.20。实验结果如表1所示。

表1 实验效率对比结果
Tab.1 Comparison of Experimental Efficiency

层次	经纬度转换至编码			编码转换至经纬度			邻近查询		
	HLQT/ μs	HHUT/ μs	效率比	HLQT/ μs	HHUT/ μs	效率比	HLQT/ μs	HHUT/ μs	效率比
15	1.844 7	0.779 4	2.37	1.289 5	0.779 6	1.65	2.369 0	0.385 7	6.14
16	1.937 2	0.786 9	2.46	1.312 9	0.792 1	1.64	2.576 8	0.403 5	6.39
17	2.016 9	0.804 1	2.51	1.332 5	0.805 0	1.66	2.825 9	0.432 1	6.54
18	2.121 8	0.809 2	2.62	1.352 4	0.815 8	1.66	3.061 5	0.441 6	6.93
19	2.205 6	0.828 1	2.66	1.389 3	0.814 3	1.71	3.310 2	0.477 5	6.93
20	2.310 2	0.837 6	2.76	1.424 1	0.820 3	1.74	3.472 1	0.476 2	7.29
21	2.379 1	0.854 2	2.79	1.434 2	0.825 1	1.74	3.898 6	0.501 5	7.77
22	2.502 0	0.869 8	2.88	1.445 0	0.822 6	1.76	4.131 2	0.515 3	8.02
23	2.605 1	0.888 3	2.93	1.466 9	0.825 3	1.78	4.440 7	0.542 2	8.19
24	2.719 0	0.900 4	3.02	1.491 3	0.827 6	1.80	4.769 0	0.536 2	8.89
25	2.849 2	0.916 6	3.11	1.571 3	0.831 4	1.89	5.077 3	0.567 9	8.94

图7展示了经纬度转换至编码效率对比,图8展示了编码转换至经纬度效率对比,图9展示了邻近查询效率对比。由图7~9和表1可知:(1)本文提出的封闭二十面体上的一致瓦片结构HHUT共有12个,而HLQT分为12个顶点瓦片和20个面瓦片,结构更复杂,瓦片跨面计算频繁。(2)HHUT经纬度转换为编码的效率在各层次均高于HLQT,平均效率约是其2.74倍,且随着层次升高,效率比逐渐增大。这是因为HHUT瓦片数目较少,且坐标转换只涉及平移操作,而HLQT瓦片较多且在顶点瓦片时涉及旋转操作;HLQT编码加法运算效率随层次升高下降显著,因此整体效率随着层次升

高,效率比逐渐增大。(3)HHUT编码转换为经纬度的效率在各层次均高于HLQT,平均效率约是其1.73倍,且随着层次升高,效率比逐渐增大。这是因为HLQT每一层码元都需参与计算,而本文方案码元不存在连续非0的情况,且只在非0时参与计算,因此层次越高,效率比越高。(4)HHUT编码邻近查询的效率在各层次均高于HLQT,平均效率约是其7.46倍,且随着层次升高,效率比逐渐增大。这是因为HHUT本质上是十二叉树结构,部分单元邻近索引直接改变末尾位即可,而HLQT邻近索引依赖编码加法运算,且其编码加法运算随层次升高效率下降明显。

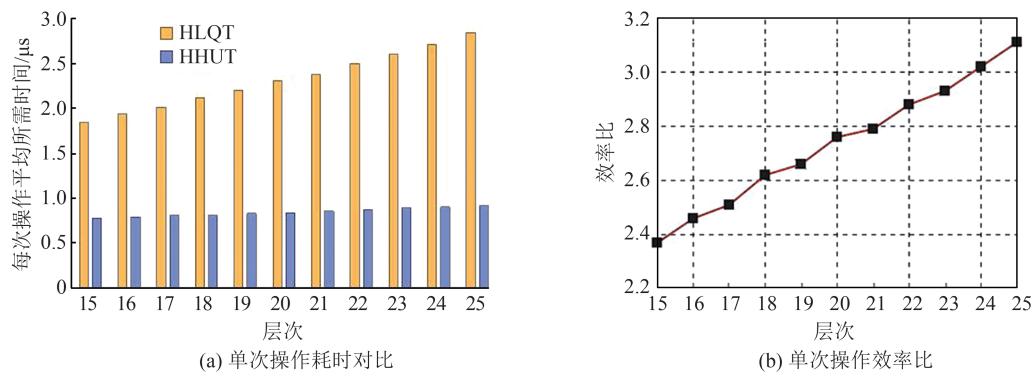


图7 经纬度转换至编码效率对比

Fig.7 Comparison of the Efficiency for Latitude and Longitude Converting to Codes

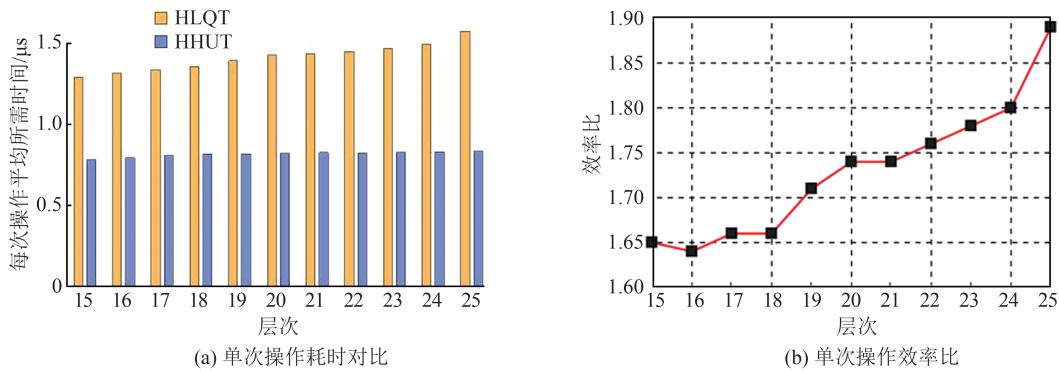


图8 编码转换至经纬度效率对比

Fig.8 Comparison of the Efficiency for Codes Converting to Latitude and Longitude

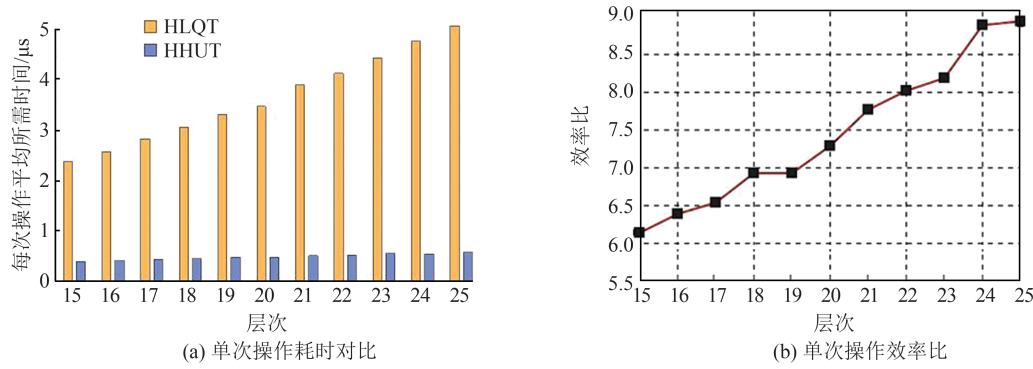


图9 邻近查询效率对比

Fig.9 Comparison of the Efficiency of Neighborhood Query

6 结语

本文根据四孔六边形剖分特点,建立邻层逻辑和隔层物理隶属的一致瓦片六边形层次结构。借助复进制数理论,提出全球统一的编码、运算方案,设计并实现地理坐标与编码互换、邻近查询等算法。与同类研究成果相比,本文方案在数学模型、算法实现、执行效率等方面均具有显著优势,有望为多源、异构数据融合处理分析提供可行方案,具有广阔的应用前景。

一致瓦片六边形层次结构与二十面体菱形

块联系紧密,可与基于菱形块的矩阵行列号快速转换,实现对地观测数据高效存储及并行处理,这是下一步研究的重点。

参 考 文 献

- [1] Zhou Chenghu, Ou Yang, Ma Ting. Progresses of Geographical Grid Systems Researches[J]. *Progress in Geography*, 2009, 28(5): 657-662. (周成虎,欧阳,马廷. 地理格网模型研究进展[J]. 地理科学进展, 2009, 28(5): 657-662.)
- [2] Li Deren. Towards Geo-spatial Information Science in Big Data Era[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica*

- Sinica*, 2016, 45(4): 379–384. (李德仁. 展望大数据时代的地球空间信息学[J]. 测绘学报, 2016, 45(4): 379–384.)
- [3] Sahr K, White D, Kimerling A J. Geodesic Discrete Global Grid Systems [J]. *Cartography and Geographic Information Science*, 2003, 30 (2) : 121–134.
- [4] Hu Peng, Liu Peilan, Hu Hai, et al. Metric Space of Earth Information and Global GIS [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2005, 30(4): 317–321. (胡鹏, 刘沛兰, 胡海, 等. 地球信息的度量空间和Global GIS[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2005, 30(4): 317–321.)
- [5] Kimerling J A, Sahr K, White D, et al. Comparing Geometrical Properties of Global Grids [J]. *Cartography and Geographic Information Science*, 1999, 26(4): 271–288.
- [6] White D, Kimerling J A, Overton S W. Cartographic and Geometric Components of a Global Sampling Design for Environmental Monitoring [J]. *Cartography and Geographic Information Systems*, 1992, 19 (1): 5–22.
- [7] Sahr K. Location Coding on Icosahedral Aperture 3 Hexagon Discrete Global Grids [J]. *Computers, Environment and Urban Systems*, 2008, 32(3): 174–187.
- [8] Lucas D. A Multiplication in N-space [J]. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1979, 74(1): 1.
- [9] Peterson P. Close-Packed Uniformly Adjacent, Multiresolutional Overlapping Spatial Data Ordering: US20060265197[P]. 2006-11-23.
- [10] Vince A, Zheng X. Arithmetic and Fourier Transform for the PYXIS Multi-resolution Digital Earth Model [J]. *International Journal of Digital Earth*, 2009, 2(1): 59–79.
- [11] Ben Jin, Li Yalu, Zhou Chenghu, et al. Algebraic Encoding Scheme for Aperture 3 Hexagonal Discrete Global Grid System [J]. *Scientia Sinica (Terra)*, 2018, 48(3): 340–352. (贲进, 李亚路, 周成虎, 等. 三孔六边形全球离散格网系统代数编码方法[J]. 中国科学: 地球科学, 2018, 48(3): 340–352.)
- [12] Tong Xiaochong, Ben Jin. The Principle and Method of Discrete Global Grid Systems for Geospatial Information Subdivision Organization [M]. Beijing: Sino Maps Press, 2016. (童晓冲, 贲进. 空间信息剖分组织的全球离散格网理论与方法[M]. 北京: 测绘出版社, 2016.)
- [13] Wang Rui, Ben Jin, Du Lingyu, et al. Encoding and Operation for the Planar Aperture 4 Hexagon Grid System [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2018, 47(7): 1018–1025. (王蕊, 贲进, 杜灵瑀, 等. 平面四孔六边形格网系统编码运算[J]. 测绘学报, 2018, 47(7): 1018–1025.)
- [14] Wang Rui, Ben Jin, Du Lingyu, et al. Code Operation Scheme for the Icosahedral Aperture 4 Hexagonal Grid System [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2020, 45(1): 89–96. (王蕊, 贲进, 杜灵瑀, 等. 正二十面体四孔六边形格网系统编码运算[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2020, 45(1): 89–96.)
- [15] Zhang Jikai, Nie Junlan, Chen Hemin, et al. Real-Time Rendering Method for Global Hexagon Grid Based on Quad-Tree of Diamond Blocks [J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2017, 29(10): 1824–1834. (张继凯, 聂俊岚, 陈贺敏, 等. 基于菱形块四叉树的全球六边形网格实时绘制方法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2017, 29(10): 1824–1834.)
- [16] Du Lingyu, Ma Qiuhe, Ben Jin, et al. Complex Radix Number Modeling and Encoding Operation for the Planar Aperture 4 Hexagon Grid System [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2019, 48 (6): 791–800. (杜灵瑀, 马秋禾, 贲进, 等. 平面四孔六边形格网系统复进制数建模及编码运算[J]. 测绘学报, 2019, 48(6): 791–800.)
- [17] Wolfram Mathworld, Simple Polyhedron [EB/OL]. [2019-03-23] <http://mathworld.wolfram.com/SimplePolyhedron.html>.
- [18] Ben Jin, Tong Xiaochong, Zhang Yongsheng, et al. Snyder Equal-Area Map Projection for Polyhedral Globes [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2006, 31(10): 900–903. (贲进, 童晓冲, 张永生, 等. 对施奈德等积多面体投影的研究[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2006, 31(10): 900–903.)
- [19] Zhou J B, Ben J, Wang R, et al. Lattice Quad-Tree Indexing Algorithm for a Hexagonal Discrete Global Grid System [J]. *ISPRS International Journal of Geo-Information*, 2020, 9(2): 83.