



武汉大学学报(信息科学版)

Geomatics and Information Science of Wuhan University

ISSN 1671-8860, CN 42-1676/TN

《武汉大学学报(信息科学版)》网络首发论文

题目: 通用 EIV 平差模型的线性化估计算法
作者: 曾文宪, 刘泽邦, 方兴, 李玉兵
DOI: 10.13203/j.whugis20200243
收稿日期: 2020-05-24
网络首发日期: 2021-01-12
引用格式: 曾文宪, 刘泽邦, 方兴, 李玉兵. 通用 EIV 平差模型的线性化估计算法. 武汉大学学报(信息科学版). <https://doi.org/10.13203/j.whugis20200243>



网络首发: 在编辑部工作流程中, 稿件从录用到出版要经历录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿等阶段。录用定稿指内容已经确定, 且通过同行评议、主编终审同意刊用的稿件。排版定稿指录用定稿按照期刊特定版式(包括网络呈现版式)排版后的稿件, 可暂不确定出版年、卷、期和页码。整期汇编定稿指出版年、卷、期、页码均已确定的印刷或数字出版的整期汇编稿件。录用定稿网络首发稿件内容必须符合《出版管理条例》和《期刊出版管理规定》的有关规定; 学术研究成果具有创新性、科学性和先进性, 符合编辑部对刊文的录用要求, 不存在学术不端行为及其他侵权行为; 稿件内容应基本符合国家有关书刊编辑、出版的技术标准, 正确使用和统一规范语言文字、符号、数字、外文字母、法定计量单位及地图标注等。为确保录用定稿网络首发的严肃性, 录用定稿一经发布, 不得修改论文题目、作者、机构名称和学术内容, 只可基于编辑规范进行少量文字的修改。

出版确认: 纸质期刊编辑部通过与《中国学术期刊(光盘版)》电子杂志社有限公司签约, 在《中国学术期刊(网络版)》出版传播平台上创办与纸质期刊内容一致的网络版, 以单篇或整期出版形式, 在印刷出版之前刊发论文的录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿。因为《中国学术期刊(网络版)》是国家新闻出版广电总局批准的网络连续型出版物(ISSN 2096-4188, CN 11-6037/Z), 所以签约期刊的网络版上网络首发论文视为正式出版。

DOI: 10.13203/j.whugis20200243

通用 EIV 平差模型的线性化估计算法

曾文宪¹ 刘泽邦² 方兴¹ 李玉兵³

1 武汉大学测绘学院, 湖北 武汉, 430079

2 国防科技大学电子科学学院, 湖南 长沙, 410073

3 济南房产测绘研究院, 山东 济南, 250001

摘要: 通用 EIV 模型将 EIV 模型扩展到了最一般化的形式, 其加权整体最小二乘算法同时顾及了观测向量、观测向量的系数矩阵和参数的系数矩阵中的随机误差。本文将非线性的通用 EIV 函数模型展开, 并将二阶项纳入模型的常数项, 从而将通用 EIV 模型表示为线性形式的高斯-赫尔默特模型, 推导出了通用 EIV 模型的线性化整体最小二乘算法和近似精度估计公式。通过模拟数据和实例进行了评估和分析, 该算法与通用 EIV 模型的 WTLS 算法估计结果一致, 验证了该算法的正确性和可行性。当模型含大量估计量时, 通用 EIV 模型的线性化估计算法显著提升了计算效率, 收敛速度更快。

关键词: 通用 EIV 模型; 整体最小二乘估计; 高次项余项; 非线性平差

中图分类号: P207 文献标识码: A

经典平差模型和最小二乘估计理论^[1]在大地测量等众多科学研究和工程领域中应用非常广泛, 其中, 高斯-马尔科夫模型 (Gauss-Markov, GM) 模型最为常用, 而高斯-赫尔默特模型 (Gauss-Helmert Model, GHM) 可视为经典平差模型的一般通用形式。实际应用中, 坐标转换、回归模型、数字地面模型和大地测量反演等许多平差模型的系数矩阵包含随机的观测数据, 从而 GM 模型扩展为随机系数矩阵的 EIV (Errors-in-Variables) 平差模型^[2]。Adcock^[3]首次提出了同时顾及观测向量和系数矩阵中随机误差的整体最小二乘估计 (total least squares, TLS)。

收稿日期: 2020-05-24

基金项目: 国家自然科学基金 (41674002, 41774009); 湖北省自然科学基金 (2018CFB578)。

第一作者: 曾文宪, 博士, 主要从事测量数据处理理论与应用的研究。wxzeng@sgg.whu.edu.cn

通讯作者: 刘泽邦, 硕士。lzb13142350585@163.com

TLS 的非线性特性致其受制于计算机技术的发展,直到 20 世纪 80 年代初, Golub and Loan^[4] 将整体最小二乘方法引入数值分析领域,提出了著名的奇异值分解算法后, TLS 开始广泛应用于各专业领域,并取得了丰富的理论研究成果。Van Huffel 和 Vandewalle^[2]对 TLS 估计进行了改进和扩展。文献[5]研究了基于 Newton—Gauss 迭代法的 WTLS 算法,该算法假设权矩阵为特殊情况;文献[6-7]研究了在任意权矩阵的一般情况下的加权 TLS (weighted total least squares, WTLS) 算法。文献[8-12]研究了附有等式和不等式约束的 WTLS 算法。文献[13-14]研究了稳健 WTLS 算法。

通过对 EIV 模型形式进行变换,文献[15]首次提出了 partial—EIV 模型,提高了系数矩阵仅含部分随机量情况下的计算效率。从模型的一般性出发,文献[16-17]将 EIV 模型扩展至通用 EIV 模型,即将经典平差的 GHM 模型的观测向量的系数矩阵和参数向量的系数矩阵由固定矩阵推广到随机矩阵,涵括了随机系数矩阵的各类情况。文献[16-17]推导了通用 EIV 模型任意权矩阵情况下的一般性的 WTLS 算法,算法具有一般性。

通用 EIV 模型的非线性决定了该算法在估计量较多时计算量大。本文利用非线性平差原理,将通用 EIV 模型展开后的二阶项纳入平差方程的常数项,从而将其转化为经典 GHM 模型形式,推导出了通用 EIV 模型的线性化整体最小二乘 (Linearized total least squares, LTLS) 算法。相对于通用 EIV 模型的 WTLS 算法,LTLS 算法提高了模型计算效率,提高了参数初始值与最优值相差较大情况下的迭代的收敛速度。

1 通用 EIV 平差模型及其 WTLS 估计^[16]

1.1 通用 EIV 平差模型

高斯—赫尔默特模型 (GHM) 的形式为:

$$A(y + v) + BX + w = 0 \quad (1)$$

式中, y 和 v 分别表示 $n \times 1$ 的观测值向量和观测值改正数向量; X 表示 $u \times 1$ 的参数向量; A 表示 $f \times n$ 的观测值向量所对应的系数矩阵; B 表示 $f \times u$ 的参数向量所对应的系数矩阵; w 表示 $f \times 1$ 的常数向量;在经典平差函数模型的定义中, A 和 B 矩阵均不含随机误差为固定矩阵。

当参数的系数矩阵 B 含随机误差,如坐标转换模型、回归模型等,模型 (1) 扩展为经典 EIV 模型。当观测向量系数矩阵 A 和参数向量的系数矩阵 B 均含随机误差,模型 (1) 扩展为更为一般的通用 EIV 平差模型^[16]:

$$(A + V_A)(y + v_y) + (B + V_B)X + w = 0 \quad (2)$$

式中, A 和 V_A 分别表示 $f \times n$ 的观测值向量所对应的系数矩阵及其改正数矩阵; B 和 V_B 分别表示 $f \times u$ 的参数向量所对应的系数矩阵及其改正数矩阵;其他符号与模型 (1) 相同。 A 、

B 和 y 均为随机量，通用 EIV 的随机模型可以表示为：

$$L = \begin{bmatrix} \text{vec}(A) \\ \text{vec}(B) \\ y \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} \text{vec}(V_A) \\ \text{vec}(V_B) \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_A \\ v_B \\ v_y \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$D(L) = \delta_0^2 P^{-1} = \delta_0^2 Q = \delta_0^2 \begin{bmatrix} Q_A & Q_{AB} & Q_{Ay} \\ Q_{BA} & Q_B & Q_{By} \\ Q_{yA} & Q_{yB} & Q_y \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中， $\text{vec}(\cdot)$ 表示将矩阵按列向量化， L 和 v 分别表示 $k \times 1$ 的观测数据向量及其改正数向量，包括了 A 矩阵、 B 矩阵和 y 矩阵中所有的观测值及其改正数，其中 $k = fn + fu + n$ ； P 、 Q 和 $D(L)$ 分别表示 L 向量的权矩阵、协因数矩阵和方差协方差阵； δ_0^2 表示单位权方差。

1.2 WTLS 估计

根据整体最小二乘准则，通用 EIV 平差模型的求解可转化为以下最优化估计问题^[16]：

$$\begin{aligned} \text{平差原则} &: v^T P v = \min \\ \text{限制条件} &: (A + V_A)(y + v_y) + (B + V_B)X + w = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

相应的目标函数为：

$$\phi(v, \lambda, X) = v^T P v + 2\lambda^T (Ay + Av_y + V_A v_y + BX + V_B X + w) \quad (6)$$

再将目标函数对待估计量分别求偏导并令其等于 0，得到如下非线性方程组：

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial X} = B^T \hat{\lambda} + \hat{V}_B^T \hat{\lambda} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial v} = P \hat{v} + \hat{C}^T \hat{\lambda} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = Ay + B\hat{X} + \hat{C}\hat{v} + w = 0 \quad (9)$$

式中， $C = [y^T \otimes I_f \quad X^T \otimes I_f \quad A + V_A]$ ，变量上加尖号表示模型的估计量。

根据 (7)、(8)、(9) 三式可以导出：

$$\hat{v} = -Q \hat{C}^T \hat{Q}_c^{-1} (Ay + B\hat{X} + w) \quad (10)$$

$$\hat{X} = -[(B^T + \hat{V}_B^T) \hat{Q}_c^{-1} B]^{-1} (B^T + \hat{V}_B^T) \hat{Q}_c^{-1} (Ay + w) \quad (11)$$

式中， $\hat{Q}_c = \hat{C} Q C^T$ 。

以通用 EIV 模型 (2) 的最小二乘解作为初始值，根据式 (10) 和 (11) 进行迭代计算即可得到其 WTLS 的最优解。

2 通用 EIV 模型的线性化估计算法 LTLS

通用 EIV 模型是非线性模型，系数矩阵和观测向量均为随机量，WTLS 算法的计算量随着待估量个数增多将迅速增加。我们将式 (2) 展开，利用非线性函数平差原理^[18]将二阶项作为模型误差纳入方程的常数项，从而将其转化为线性 GHM 模型，最终推导出通用 EIV 模型的 LTLS 算法。

令 $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \mathbf{x}$ ，将通用 EIV 模型 (2) 展开得：

$$(\mathbf{yV}_A + \mathbf{X}_0\mathbf{V}_B + \mathbf{A}\mathbf{v}_y) + \mathbf{B}\mathbf{x} + (\mathbf{w} + \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{B}\mathbf{X}_0 + \mathbf{V}_A\mathbf{v}_y + \mathbf{V}_B\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (12)$$

上式可表示为：

$$\begin{aligned} & [(\mathbf{y}^T \otimes \mathbf{I}_f) \text{vec}(\mathbf{V}_A) + (\mathbf{X}_0^T \otimes \mathbf{I}_f) \text{vec}(\mathbf{V}_B) + \mathbf{A}\mathbf{v}_y] + \mathbf{B}\mathbf{x} + \\ & (\mathbf{w} + \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{B}\mathbf{X}_0 + \mathbf{V}_A\mathbf{v}_y + \mathbf{V}_B\mathbf{x}) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (13)$$

则通用 EIV 模型的线性化形式为：

$$\mathbf{A}_l\mathbf{v}_l + \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{w}_l = \mathbf{0} \quad (14)$$

式中， $\mathbf{A}_l = [\mathbf{y}^T \otimes \mathbf{I}_f \quad \mathbf{X}_0^T \otimes \mathbf{I}_f \quad \mathbf{A}]$ ； $\mathbf{v}_l = \begin{bmatrix} \text{vec}(\mathbf{V}_A) \\ \text{vec}(\mathbf{V}_B) \\ \mathbf{v}_y \end{bmatrix}$ ； $\mathbf{w}_l = \mathbf{w} + \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{B}\mathbf{X}_0 + \mathbf{V}_A\mathbf{v}_y + \mathbf{V}_B\mathbf{x}$

\mathbf{w}_l 为模型的常数项，即将式 (2) 展开后的二阶项 $\mathbf{V}_A\mathbf{v}_y + \mathbf{V}_B\mathbf{x}$ 作为模型误差纳入常数项。

由 (14) 可知，线性化后的通用 EIV 模型与高斯—赫尔默特模型一致，可以用最小二乘法得到观测向量和参数解：

$$\hat{\mathbf{x}} = -\hat{N}_{bb}^{-1} \mathbf{B}^T \hat{N}_{aa}^{-1} \mathbf{w}_l \quad (15)$$

$$\hat{\mathbf{v}}_l = -\mathbf{Q} \hat{A}_l \hat{N}_{aa}^{-1} (\mathbf{B} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{w}_l) \quad (16)$$

式 (15) 和式 (16) 中， $N_{aa} = \mathbf{A}_l \mathbf{Q} \mathbf{A}_l^T$ ， $N_{bb} = \mathbf{B}^T \mathbf{N}_{aa}^{-1} \mathbf{B}$ ， \mathbf{Q} 为观测值向量的协因数阵。

根据式 (15) 和式 (16)，导出通用 EIV 模型的 LTLS 算法步骤如下：

1) 将实际模型表示为通用 EIV 模型 (2)，将观测数据代入得到 \mathbf{A} 、 \mathbf{y} 、 \mathbf{B} 矩阵，并且给出观测向量（包括观测值向量，参数向量和对应的系数矩阵）的协因数阵 \mathbf{Q} 。

2) 计算通用 EIV 模型的最小二乘解作为初始参数解：

$$\hat{\mathbf{X}}^0 = -(\mathbf{B}^T (\mathbf{A} \mathbf{Q}_y \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T (\mathbf{A} \mathbf{Q}_y \mathbf{A}^T)^{-1}$$

观测值向量改正数初始值取 $\mathbf{0}$ 。

3) 采用式 (15) 和式 (16) 进行迭代计算，每次迭代将上一次估计值作为初始值带入新的

迭代过程，直到前后两次估计值之差小于设定的阈值。

高斯-赫尔默特模型按泰勒级数展开仅包含常数项、一阶项和二阶项（三阶及以上项全部为零），我们将二阶项纳入线性化后的常数项，而并非经典线性化中的予以舍弃，这种方法极大的减弱了线性化引起的模型误差。因此，在同样以最小二乘（Least Squares, LS）解作为初值的情况下，GHM 模型线性化的 LTLS 解与 WTLS 解的收敛性一致，实例结果也证实了线性化 LTLS 算法的适用性。此外，根据文献[19]中 EIV 模型 LS 解偏差的研究结果，当前测量技术手段和观测精度条件下，以有偏的 LS 估计值作为初值，能够保证整体最小二乘迭代计算收敛，除非出现极为特殊的网结构等导致 LS 初始值严重偏离最优值的极端情况。

参考高斯—赫尔默特模型，通用 EIV 模型（2）的 LTLS 估计结果的精度公式如下：

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_0^2 &= \frac{\mathbf{v}_l^T \mathbf{P} \mathbf{v}_l}{r} \\ \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{x}}) &= [\mathbf{B}^T (\mathbf{A}_l \mathbf{Q} \mathbf{A}_l^T)^{-1} \mathbf{B}]^{-1} \\ \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{L}}) &= \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \mathbf{A}_l^T (\mathbf{N}_A^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{Q}_x \mathbf{B}^T \mathbf{N}_A^{-1}) \mathbf{A}_l \mathbf{Q}) \\ \mathbf{D}(\hat{\mathbf{x}}) &= \hat{\delta}_0^2 \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{x}}), \mathbf{D}(\hat{\mathbf{L}}) = \hat{\delta}_0^2 \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{L}}) \end{aligned} \quad (17)$$

式中，多余观测数 $r = n - t$ ， n 为观测值个数， t 为必要观测值个数， r 与经典高斯—赫尔默特模型的多余观测数相同； $\mathbf{N}_A = \mathbf{A}_l \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}_l^T$ 。

3 LTLS 算法实例分析

本节按照 LTLS 算法解法步骤进行实验评估，对 LTLS 结果与 WTLS 算法结果进行比较，以验证 LTLS 算法的正确性、计算效率和可行性。实验一通过设计模拟数据，进行单组实验结果比较和 1000 组实验统计分析比较验证算法的正确性。实验二通过比较待估计量数目在不同量级情况下的两种算法的计算时间，验证 LTLS 算法计算效率上的优势，实验三通过实例验证算法的可行性。

3.1 实验 1

实验 1 中利用模拟数据验证算法的正确性。首先根据通用 EIV 模型（2）设计真值矩阵：定义参数向量 $\mathbf{x} = [5, 10]^T$ ，设置 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{y} 矩阵的真值，给 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{y} 矩阵分别加上服从正态分布的随机误差得到含有误差的矩阵如表 1 所示，假设 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{y} 矩阵所有元素都含有随机误差，随机误差服从标准差为 0.01, 0.02, 0.03 的正态分布，3 个矩阵之间相互独立，将迭代的阈值设为 1×10^{-8} ，分别用 LTLS 算法和 WTLS 算法进行解算。经计算得参数解及其方差协方差阵如表 2 所示，两种算法解相同，验证了 LTLS 算法的正确性。

表 1 含有随机误差的模拟矩阵数据

Tab.1 Simulation Matrix Data with Random Errors

<i>B</i>		<i>A</i>			<i>y</i>	<i>w</i>	
10.4097	17.5439	12.4699	11.0963	15.8717	11.7254	27.5430	-1425.323
18.0334	15.1713	8.8826	10.2918	2.9287	3.6657	20.7268	-852.619
18.6313	15.8552	12.3210	1.1085	6.3919	15.8085	20.8389	-1142.913
15.6705	11.8784	3.5510	12.1040	3.8665	1.2567	25.0325	-658.407

表 2 参数解 \hat{x} 估计值及其方差估计值

Tab.2 Parameter \hat{x} along with Their Mean Square Deviations

参数解/中误差	LTLS 算法	WTLS 算法
\hat{x}_1	5.012 550 72	5.012 550 72
\hat{x}_2	9.994 963 66	9.994 963 66
$\sigma_{\hat{x}_1}^2$	$4.272\ 015\ 91 \times 10^{-25}$	$4.272\ 015\ 91 \times 10^{-25}$
$\sigma_{\hat{x}_2}^2$	$7.245\ 756\ 27 \times 10^{-25}$	$7.245\ 756\ 27 \times 10^{-25}$
$\sigma_{\hat{x}_1, \hat{x}_2}$	$-5.044\ 943\ 40 \times 10^{-25}$	$-5.044\ 943\ 40 \times 10^{-25}$

在初始条件不变情况下进行 1000 次的模拟数据实验，每一次循环中采用 MATLAB 中的“normrnd”函数给真值矩阵添加服从正态分布的随机误差。有两种方法计算得到协因数阵：第一种方法首先得到 1 000 组实验的平均值再代入式 (17) 计算得到，第二种方法在 1 000 组循环中的每次循环得到参数解，再用参数解估值与真值之差得到一个 $1\ 000 \times 2$ 的偏差矩阵 $E_x = (\hat{x}_1^{(j)} - 5, \hat{x}_2^{(j)} - 10)$, $j=1: 1000$ ，协因数阵通过公式 $D_{\hat{x}} = E_x^T E_x / (m - n)$ 得到，式中 $m=1000$, $n=2$ ^[17]。选取偏差矩阵第一列得到两种算法计算 1000 组参数的偏差和统计直方图如图 1 和图 2 所示。

结果统计如表 3 所示：两种算法得到的结果一致，图 1 和图 2 统计直方图也一致再次证明了 LTLS 算法的正确性，计算协因数阵的两种方法结果非常相近，这也说明了基于式 (17) 得到的参数协因数阵的近似方法效果非常好^[17]。

表 3 1000 组循环所求参数解的平均值和协因数阵

Tab.3 Average Value of \hat{x} along with Its Co-variance Matrix Based on 1 000 Runs

统计项		LTLS 算法	WTLS 算法
\hat{x}_{avg}	\hat{x}_1	5.009 427 41	5.009 427 41
	\hat{x}_2	9.998 257 46	9.998 257 46
1000 组实验平均值		0.004 3 -0.005 1	0.004 3 -0.005 1

计算协因数阵	-0.005 1	0.007 3	-0.005 1	0.007 3
偏差矩阵计算协因数阵	0.004 2	-0.004 9	0.004 2	-0.004 9
	-0.004 9	0.007 2	-0.004 9	0.007 2

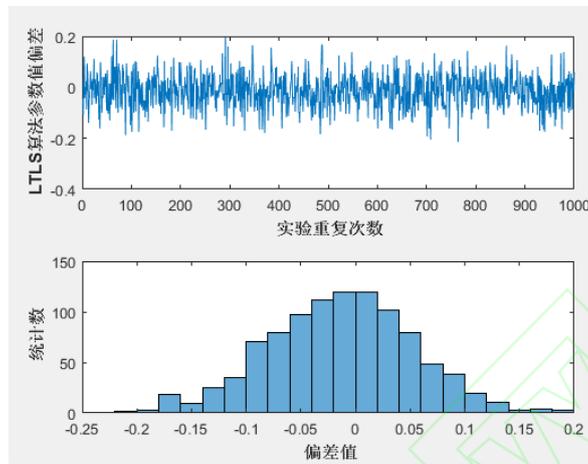


图 1 LTLS 算法计算 1 000 组参数的偏差和统计直方图

Fig.1 Deviation and Statistical Histogram of 1 000 Groups of Parameters Based on LTLS Algorithm

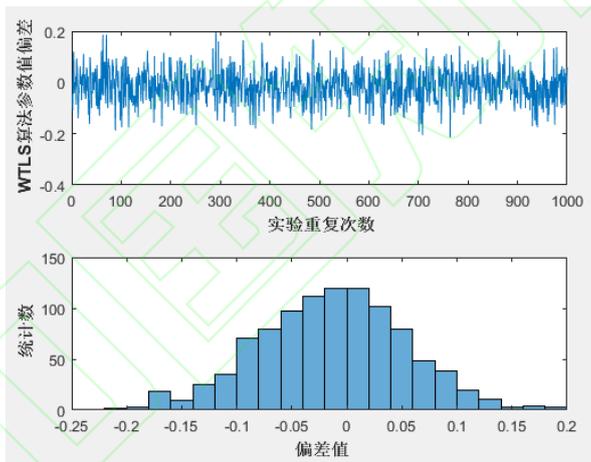


图 2 WTLS 算法计算 1000 组参数的偏差和统计直方图

Fig.2 Deviation and Statistical Histogram of 1 000 Groups of Parameters Based on WTLS Algorithm

3.2 实验 2

实验 2 设计了通用 EIV 模型不同量级的估计量数量，测算了 100 组重复实验下 LTLS 算法和 WTLS 算法的平均迭代次数 N 和平均解算时间 t 。如表 4 所示，“减少比例”指 LTLS 算法减少的计算时间与 WTLS 算法计算时间之比。可以看到：模型估计量数量较少时，两种算法的效率基本相当，随着估计量的数量逐渐增大，LTLS 算法的效率高于 WTLS 算法。

表 4 待估量数量变化下 LTLS 算法和 WTLS 算法的平均迭代次数、解算所需平均时间及“减少比例”

Tab.4 Average Number of Iterations and The Mean Time the LTLS Algorithm and WTLS Algorithm Need under the Change of Number of the Estimator and Decrease Ratio

待估量数量	N_{LTLs}	N_{WTLs}	t_{LTLs}	t_{WTLs}	减少比例/%
10	5.18	4.5	0.224 ms	0.191 ms	-
100	5.04	6.36	0.681 ms	0.724 ms	5.9
1 000	5	6.75	0.033 s	0.044 s	25
10 000	5	7.5	2.681 s	3.909 s	31.4

从表 4 中可以得出两种算法迭代一次的平均时间基本一致,我们认为 LTLs 算法计算效率高的原因在于: 高斯-赫尔默特模型按泰勒级数展开后,仅包含常数项、一阶项和二阶项(三阶及以上项全部为零), LTLs 算法将二阶项纳入常数项,极大的减弱了线性化引起的模型误差,迭代计算时会更快的收敛,迭代次数减少提高了计算效率。

3.3 实验 3

在实验 3 中采用文献[20]研究的摄影测量实例,图 3 显示了由三个地面摄像机 S1、S2 和 S3 拍摄的两个目标点 A 和 B,主距 $f=100$ mm。所有距离 l_1 、 l_2 、 l_3 、 l_4 、 l_5 、 l_6 、 y_1 和 y_2 如表 5 所示,根据图 3,可以得到误差方程:

$$\begin{cases} l_1 x_2 - f x_1 = 0 \\ l_2 x_4 - f x_3 = 0 \\ l_3 x_2 + f y_1 + f x_1 = 0 \\ l_4 x_4 + f y_1 + f x_3 = 0 \\ l_5 x_2 - f y_1 - f y_2 + f x_1 = 0 \\ l_6 x_4 - f y_1 - f y_2 + f x_3 = 0 \end{cases}$$

构建通用 EIV 模型来估计点 A 和点 B 的坐标,由误差方程得:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -f & 0 \\ -f & 0 \\ -f & -f \\ -f & -f \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -f & l_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f & l_2 \\ f & l_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f & l_4 \\ f & l_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f & l_6 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由上可知 A 矩阵不含有随机误差,则该矩阵对应的误差矩阵为零矩阵。采用 LTLs 算法和 WTLs 算法解算,设置阈值同样为 1×10^{-8} 。得到结果如表 6 和表 7 所示。可以看到,两种方法得到的坐标估值和距离观测值估值完全一致,由于该实例表示为通用 EIV 模型时系数阵中待估量较少,所以两个算法的收敛速度相差不大。

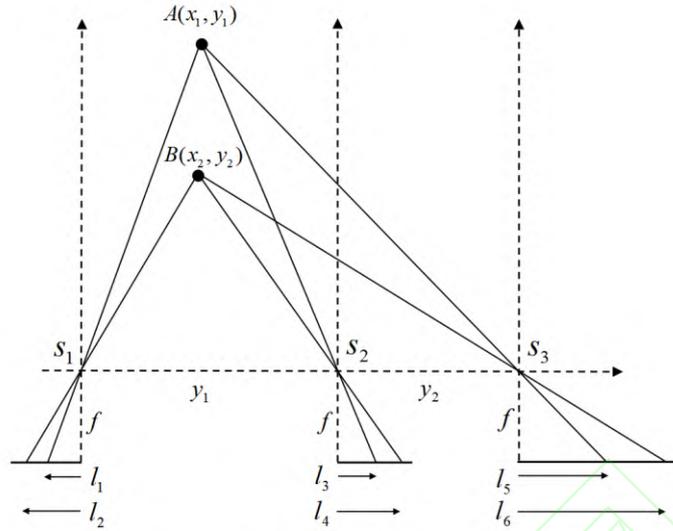


图 3 摄影测量实例图

Fig.3 Photogrammetry Example

表 5 距离观测值及其中误差

Tab.5 Distance Observations along with Their Standard Deviations

距离	观测值	中误差
l_1	14.1 mm	0.10 mm
l_2	16.6 mm	0.10 mm
l_3	6.1 mm	0.10 mm
l_4	7.1 mm	0.10 mm
l_5	22.1 mm	0.10 mm
l_6	26.3 mm	0.10 mm
y_1	10.0 m	0.05 m
y_2	8.0 m	0.05 m

表 6 点 A 和点 B 的坐标估值

Tab.6 Coordinate Estimates of Points A and B

坐标估值	LTLS 算法	WTLS 算法
\hat{x}_1 (m)	6.995 056 51	6.995 056 51
\hat{x}_2 (m)	49.715 632 1	49.715 632 1
\hat{x}_3 (m)	6.981 465 53	6.981 465 53
\hat{x}_4 (m)	41.968 315 9	41.968 315 9

表 7 距离观测值估值

Tab.7 Estimation of Distance Observations

方法	\hat{i}_1	\hat{i}_2	\hat{i}_3	\hat{i}_4	\hat{i}_5	\hat{i}_6	\hat{y}_1	\hat{y}_2
LTLS 算法	14.070 1	16.635 1	6.032 4	7.178 4	22.137 7	26.256 7	9.994 1	8.006 8
WTLS 算法	14.070 1	16.635 1	6.032 4	7.178 4	22.137 7	26.256 7	9.994 1	8.006 8

4 结 语

本文将通用 EIV 函数模型展开后的二阶项纳入模型的常数项, 将通用 EIV 模型表示为了线性形式的高斯-赫尔默特模型, 推导出了通用 EIV 模型的线性化整体最小二乘算法和近似精度估计公式。实验结果表明, 通用 EIV 模型的 LTLS 算法与 WTLS 算法结果一致, 证明了该算法的正确性。此外, LTLS 算法估计精度公式和 WTLS 估计精度公式均为一阶近似精度, 因此两种算法参数的估计精度相同。当通用 EIV 模型的待估量数量较多时, LTLS 算法比 WTLS 计算效率更高, 在处理海量数据时 LTLS 算法更具有优势。

参考文献

- [1] The Group of Surveying Adjustment in the School of Geodesy and Geomatics.Wuhan University.Error Theory and Foundation of Surveying Adjustment[M].Wuhan: Wuhan University Press, 2003: 63-98(武汉大学测绘学院测量平差学科组. 误差理论与测量平差基础[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2003: 63-98)
- [2] Van Huffel S, Van Dewalle J. The Total Least Squares Problem: Computational Aspects and Analysis [M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1991
- [3] Adcock R J. Note on the Method of Least Squares [J]. The Analyst, 1877, 4(6):183-184
- [4] Golub G H, Loan C F V. An Analysis of the Total Least Squares Problem [M]// An analysis of the total least squares problem, 1980
- [5] Shen Yunzhong, Li Bofeng , Chen Yi . An iterative solution of weighted total least-squares adjustment [J]. Journal of Geodesy, 2011, 85(4):229-238
- [6] Fang Xing. Weighted Total Least Squares: Necessary and Sufficient Conditions, Fixed and Random Parameters [J]. Journal of Geodesy, 2013, 87(8):733-749
- [7] Fang Xing, ZENG Wenxian, LIU Jingnan, et al. A General Total Least Squares Algorithm for Three-dimensional Coordinate Transformations[J].Acta Geodaetica et Cartographica Sinica,2014, 43(11):1139-1143(方兴, 曾文宪, 刘经南, 等. 三维坐标转换的通用整体最小二乘算法 [J]. 测绘学报, 2014, 43(11):1139-1143)

- [8] Fang Xing. A structured and constrained Total Least-Squares solution with cross-covariances [J]. *Studia Geophysica Et Geodaetica*, 2014, 58(1):1-16
- [9] Fang Xing. On non-combinatorial weighted total least squares with inequality constraints [J]. *Journal of Geodesy*, 2014, 88(8):805-816
- [10] Fang Xing. Weighted total least-squares with constraints: a universal formula for geodetic symmetrical transformations [J]. *Journal of Geodesy*, 2015, 89(5):459-469
- [11] Zeng Wenxian, Liu Jinnan, Yao Yibin, On Partial Errors-in-variables Models with Inequality Constraints of Parameters and Variables, *Journal of Geodesy*, 2015.2.89 (2) : 111-119
- [12] Zeng Wenxian, Fang Xing, Liu Jingnan, et al. Weighted Total Least Squares Algorithm with Inequality Constraints [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2014, 43(10):1013-1018
(曾文宪, 方兴, 刘经南, 等. 附有不等式约束的加权整体最小二乘算法[J]. *测绘学报*, 2014(10):1013-1018)
- [13] Gong Xunqiang, Li Zhilin. A Robust Weighted Total Least Squares Method. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2014, 43(9):888-894 (龚循强, 李志林. 稳健加权总体最小二乘法[J]. *测绘学报*, 2014, 43(9):888-894)
- [14] Fang Xing, Zeng Wenxian, Zhou Yongjun, et al. On the Total Least Median of Squares adjustment for the pattern recognition in point clouds [J]. *Measurement*, 2020:107794
- [15] Xu Peiliang, Liu Jingnan, Shi, Chuang. Total least squares adjustment in partial Errors-in-variables models: algorithm and statistical analysis. *Journal of geodesy*, 2012, 86(8): 661-675
- [16] Zeng Wenxian, Fang Xing, Liu Jingnan, et al. Weighted Total Least Squares of Universal EIV Adjustment Model. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2016, 45(8):890-894 (曾文宪, 方兴, 刘经南, 等. 通用 EIV 平差模型及其加权整体最小二乘估计 [J]. *测绘学报*, 2016, 45(8):890-894)
- [17] Amiri-Simkooei A R, Mortazavi S, Asgari J. Weighted total least squares applied to mixed observation model [J]. *Empire Survey Review*, 2015, 48(349):278-286
- [18] Zeng Wenxian, Tao Benzao. Nonlinear model of three-dimensional coordinate transformation [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*. 2003, 28(5):566-568 (曾文宪, 陶本藻. 三维坐标转换的非线性模型 [J]. *武汉大学学报·信息科学版*, 2003, 28(5):566-568)

[19] Zeng Wenxian. Effect of the random design matrix on adjustment of an EIV model and its reliability theory [D]. Wuhan: Wuhan University. 2013(曾文宪. 系数矩阵误差对 EIV 模型平差结果的影响研究[D]. 武汉: 武汉大学, 2013)

[20] Leberl F. Observations and Least Squares: Edward M. Mikhail, with contributions by F. Ackermann. Dun-Donnelly, New York, N.Y. 1976, 497 pp. hard cover, U.S [J]. Photogrammetria, 1978, 34(6):261-262

Linearization estimation algorithm for universal EIV adjustment model

ZENG Wenxian¹ LIU Zebang² FANG Xing¹ LI Yubing³

1 School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan 430079, China

2 College of Electronic Science and Technology, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China

3 Jinan Real Estate Surveying and Mapping Research Institute, Jinan 250001, China

Abstract: The universal EIV model extends the EIV model to the most general form, and the weighted total least squares (WTLS) algorithm is proposed to take into account the random errors in observation vector, observation vector coefficient matrix and parameter coefficient matrix. In this paper, the nonlinear universal EIV function model is expanded, and the second-order term is included into the constant term of the model, so the universal EIV model is represented as Gauss—Helmert model in linear form, and the Linearized total least squares algorithm and approximate precision estimation formula of the universal EIV model are derived. Through the simulation data and examples, this algorithm is consistent with the estimation results of the WTLS algorithm of the universal EIV model, which verifies the correctness and feasibility of this algorithm. When the model contains a large number of estimators, the linearized estimation algorithm of the universal EIV model significantly improves the computational efficiency and converges faster.

Key words: Universal EIV model; Total least squares estimation; Higher order residual term; Principle of nonlinear adjustment

First author: ZENG Wenxian, PhD, majors in the theory and method of surveying data processing. E-mail:wxzeng@sgg.whu.edu.cn

Corresponding author: LIU Zebang, master.E-mail: lzb13142350585@163.com

Foundation Support: The National Natural Science Foundation of China(41674002, 41774009);the Natural Science Foundation of Hubei province (2018CFB578) .

