



## 乘性误差模型参数估计及精度评定的Sterling插值方法

王乐洋, 邹传义

引用本文:

王乐洋, 邹传义. 乘性误差模型参数估计及精度评定的Sterling插值方法[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2022, 47(2): 219–225.

WANG Leyang, ZOU Chuanyi. [Sterling Interpolation Method for Parameter Estimation and Precision Estimation in Multiplicative Error Model](#)[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2022, 47(2): 219–225.

---

## 相似文章推荐（请使用火狐或IE浏览器查看文章）

Similar articles recommended (Please use Firefox or IE to view the article)

### [多变量稳健总体最小二乘平差方法](#)

Robust Total Least Squares Method for Multivariable EIV Model

武汉大学学报·信息科学版. 2019, 44(8): 1241–1248 <https://doi.org/10.13203/j.whugis20170232>

### [通用EIV平差模型的线性化估计算法](#)

Linearization Estimation Algorithm for Universal EIV Adjustment Model

武汉大学学报·信息科学版. 2021, 46(9): 1284–1290 <https://doi.org/10.13203/j.whugis20200243>

### [附有相对权比的加权总体最小二乘联合平差方法](#)

Weighted Total Least Squares Method for Joint Adjustment Model with Weight Scaling Factor

武汉大学学报·信息科学版. 2019, 44(8): 1233–1240 <https://doi.org/10.13203/j.whugis20170265>

### [不等式约束PEIV模型的经典最小二乘方法](#)

Classical Least Squares Method for Inequality Constrained PEIV Model

武汉大学学报·信息科学版. 2021, 46(9): 1291–1297 <https://doi.org/10.13203/j.whugis20190196>

### [PEIV模型参数估计理论及其应用研究进展](#)

Review of PEIV Model Parameter Estimation Theory and Its Applications

武汉大学学报·信息科学版. 2021, 46(9): 1273–1283, 1297 <https://doi.org/10.13203/j.whugis20200312>



# 乘性误差模型参数估计及精度评定的 Sterling插值方法

王乐洋<sup>1</sup> 邹传义<sup>2</sup>

1 东华理工大学测绘工程学院, 江西 南昌, 330013

2 武汉大学测绘学院, 湖北 武汉, 430079

**摘 要:**乘性误差模型加权最小二乘参数估值是观测值的非线性函数, 观测值的权是加权最小二乘参数估值的非线性函数。已有的乘性误差模型参数估计方法理论上可以达到二阶无偏, 但精度评定方法只能达到一阶精度, 并且参数估计逐步的迭代过程使得参数及改正数的每一步估值都具有随机性, 使得最终的参数估值与观测值为复杂的非线性关系。考虑到非线性迭代过程对加权最小二乘参数带来的影响, 使用一种无需求导的Sterling插值方法求解参数估值的均值和标准差。模拟实验表明, 当模型非线性较高时, 考虑每次迭代的随机性对参数估值的影响可以得到更接近真值的参数估值, 并且所提方法的精度评定可以达到二阶精度, 验证了Sterling插值方法用于乘性误差模型参数估计及其精度评定的适用性和有效性。

**关键词:**乘性误差模型; 加权最小二乘; Sterling插值法; 参数估计; 精度评定

**中图分类号:** P207

**文献标志码:** A

随着测绘技术的发展, 传统平差方法中的加性误差模型已难以满足现代观测数据处理的需求<sup>[1]</sup>。如在电磁波测距<sup>[2]</sup>和合成孔径雷达遥感<sup>[3-6]</sup>中, 随机误差表现为与系数矩阵和参数估值乘积的形式, 而非加减的形式。目前国内外仅有数篇关于乘性误差模型用于大地测量领域的研究论文<sup>[7-13]</sup>。

乘性误差模型的最小二乘解法由文献[7]首先提出, 文献[8-10]在最小二乘解的基础上, 使用加权最小二乘方法进行乘性误差模型参数估计; 文献[11]研究了乘性误差模型的单位权方差计算问题; 文献[12]研究了乘性误差模型的粗差探测问题; 文献[13]在文献[7]的基础上删去观测值协因数阵对参数估值求偏导数的非零项, 得到了加权最小二乘参数估值的理论上的二阶无偏估计, 但是其精度评定方法只能达到一阶精度。目前常用的求解乘性误差模型的迭代解法为高斯牛顿法, 乘性误差模型本质上是一种非线性模型, 由于非线性的影响, 在参数估值的求解过程中, 每次迭代都伴有随机性, 从而导致最后得到的参数估值和观测值之间的关系是一个非常复杂的非线性函数, 无法用求导的方法考虑所有随

机量的随机性来获得参数估值的均值和标准差。

Sterling插值法是一种近似非线性函数概率密度分布的方法<sup>[14-16]</sup>, 其通过选择一定的步长因子 $h$ 生成采样点, 以差分的方式代替复杂的或难以实现的求导运算, 不需要了解非线性函数的构成, 通过加权的方法得到非线性函数二阶精度的均值和二阶精度的协方差阵。文献[14]将Sterling插值法用于扩展卡尔曼滤波中, 可以得到比传统方法更好的结果; 文献[15-16]将Sterling插值法用于解决高斯型滤波的非线性估计问题中, 并提出中心卡尔曼滤波。在使用Sterling插值法求均值和协方差阵时无需求导, 并且不需要了解非线性函数的构造, 而乘性误差模型中参数估值和观测值之间的关系是一个非常复杂的非线性函数, 因此Sterling插值法可以很好地用于乘性误差参数估计与精度评定中。

针对已有文献未考虑迭代过程中参数及改正数的每一步的随机性, 以及乘性误差本身的非线性对参数估值造成的影响, 本文顾及加权最小二乘非线性迭代过程对参数带来的影响, 使用一种无需求导、无需了解非线性函数构造的Sterling插值方法, 通过对称采样的方式求解乘性误差模

型中加权最小二乘参数估值的均值和标准差,并给出计算流程,通过模拟数值算例和数字高程模型(digital elevation model, DEM)数据处理算例验证本文方法的正确性和有效性。

## 1 乘性误差模型及其加权最小二乘解法

### 1.1 乘性误差模型

不同于表现为加性误差的高斯马尔可夫模型,乘性误差模型可以表示为<sup>[10]</sup>:

$$\mathbf{y} = A\beta \odot (1 + E_m) \quad (1)$$

式中,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  为观测向量;  $A \in \mathbb{R}^{n \times t}$  为系数矩阵;  $\beta \in \mathbb{R}^{t \times 1}$  为未知参数;  $E_m \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  为服从正态分布的乘性误差向量;  $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  为元素全为1的列向量;  $\odot$  为哈达玛乘积符号。

假设乘性误差  $E_m$  的元素之间不相关,标准差为  $\sigma_m$ ,则乘性误差的协方差阵为  $D_m = I\sigma_m^2$ ,  $I \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  为单位矩阵。对式(1)的等式两边取期望:

$$E(\mathbf{y}) = A\beta \quad (2)$$

由式(1)和式(2)可得观测值的协方差阵为:

$$D(\mathbf{y}) = E\left((E(\mathbf{y}) - \mathbf{y})(E(\mathbf{y}) - \mathbf{y})^T\right) = M_{a\beta} D(m) M_{a\beta}^T \quad (3)$$

式中,  $M_{a\beta} = \text{diag}(a_i \beta)$  为对角阵。

由式(3)可得观测值的权阵为:

$$P = Q(\mathbf{y})^{-1} = \left( M_{a\beta} \frac{D(m)}{\sigma_0^2} M_{a\beta}^T \right)^{-1} \quad (4)$$

式中,  $\sigma_0^2$  为单位权方差。由式(4)可知,不同于传统的加性误差模型,乘性误差模型中,观测值的权是参数估值  $\beta$  的非线性函数。

### 1.2 乘性误差模型的加权最小二乘解法

将加权最小二乘准则用于式(1)的乘性误差模型,可以得到目标函数的计算式为<sup>[13]</sup>:

$$\min : F_2(\beta) = (\mathbf{y} - A\beta)^T P (\mathbf{y} - A\beta) \quad (5)$$

文献[13]删去观测值协因数阵对参数估值求偏导数的非零项,得到偏差改正(bias corrected)的参数估值的二阶无偏估计  $\hat{\beta}_{bc}$ :

$$\hat{\beta}_{bc} = (A^T P A)^{-1} A^T P \mathbf{y} \quad (6)$$

由于式(6)等号右侧中观测值的权为参数估值的高次幂,因此也无法使用解析法得到式(6)的解析解。将式(6)写为迭代形式:

$$\hat{\beta}_{bc}^{i+1} = (A^T P^i A)^{-1} A^T P^i \mathbf{y} \quad (7)$$

式中,  $\hat{\beta}_{bc}^i$  的初值为乘性误差模型的最小二乘解;

$P^i$  表示将  $\hat{\beta}_{bc}^i$  代入式(4)时的值。

文献[13]给出  $\hat{\beta}_{bc}$  的一阶协方差阵计算式为:

$$D(\hat{\beta}_{bc}) = (A^T P A)^{-1} \hat{\sigma}_{bc}^2 \quad (8)$$

## 2 本文方法

### 2.1 Sterling插值法

定义一般的非线性函数如下:

$$\mathbf{Y} = F(\mathbf{X}) \quad (9)$$

式中,  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{k \times 1}$  表示自变量;  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{q \times 1}$  表示因变量;  $F(\cdot)$  表示自变量与因变量之间的非线性函数。

Sterling插值法只需要获得自变量的先验信息,便可以求得因变量的后验信息。对于式(9),已知  $\mathbf{X}$  的均值  $E(\mathbf{X})$  和协方差矩阵  $D(\mathbf{X})$ ,便可求得  $\mathbf{Y}$  的均值  $E(\mathbf{Y})$  和协方差矩阵  $D(\mathbf{Y})$ 。

对于形如式(9)的一般非线性函数, Sterling插值法精度评定的步骤如下<sup>[17]</sup>:

1)构造平方根矩阵的列向量:

$$\mathbf{S}_{X_i} = h \sqrt{D(\mathbf{X})}_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

式中,  $\mathbf{S}_{X_i}$  表示生成的第  $i$  个列向量;  $\sqrt{D(\mathbf{X})}$  表示对观测值协方差阵  $D(\mathbf{X})$  进行 Cholesky 分解生成的下三角矩阵;  $D(\mathbf{X})_i$  表示矩阵  $D(\mathbf{X})$  的第  $i$  列;  $h$  表示步长因子,取  $\sqrt{3}$ 。

2)通过对称采样,生成  $2n + 1$  列采样值:

$$\chi_i = \begin{cases} E(\mathbf{X}), i = 0 \\ E(\mathbf{X}) + \mathbf{S}_{X_i}, i = 1, 2, \dots, n \\ E(\mathbf{X}) - \mathbf{S}_{X_i}, i = n + 1, n + 2, \dots, 2n \end{cases} \quad (11)$$

式中,  $n$  表示自变量的个数;  $\chi_i$  表示生成的第  $i$  个采样列向量。

3)通过非线性函数计算采样列向量的样本点:

$$\mathbf{v}_i = F(\chi_i), i = 0, 1, 2, \dots, 2n \quad (12)$$

4)计算因变量的均值:

$$E(\mathbf{Y}) = \frac{h^2 - n}{h^2} \mathbf{v}_0 + \frac{1}{2h^2} \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{v}_i \quad (13)$$

5)计算因变量的协方差阵:

$$D(\mathbf{Y}) = \frac{1}{4h^2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{i+n})(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{i+n})^T + \frac{h^2 - 1}{4h^4} \sum_{i=1}^n (\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{i+n} - 2\mathbf{v}_0)(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{i+n} - 2\mathbf{v}_0)^T \quad (14)$$

文献[18]证明了 Sterling插值法求得的非线

性函数因变量的均值  $E(Y)$  和协方差阵  $D(Y)$  均可以达到二阶精度。

## 2.2 乘性误差模型加权最小二乘迭代解法的改化

本文将乘性误差模型的加权最小二乘迭代解法总结如下:

1) 输入观测值  $y$  和系数矩阵  $A$ , 计算最小二乘估值:

$$\hat{\beta}^0 = (A^T A)^{-1} A^T y \quad (15)$$

2) 进行以下迭代过程:

$$M_{a\beta}^i = \text{diag}(a\beta^i) \quad (16)$$

$$P^i = \left( M_{a\beta}^i \frac{D(m)}{\sigma_0^2} (M_{a\beta}^i)^T \right)^{-1} \quad (17)$$

$$\hat{\beta}^{i+1} = (A^T P^i A)^{-1} A^T P^i y \quad (18)$$

3) 当满足  $\|\beta^{i+1} - \beta^i\| \leq 1 \times 10^{-8}$  时停止循环, 输出  $\beta^{i+1}$ 。

由于观测值  $y$  含有随机误差, 从上述算法可以看出, 参数估值是观测值  $y$  的函数, 观测值的权  $P$  是参数估值的函数, 而参数估值的最后一步解是观测值  $y$  和观测值权  $P$  共同的函数。

本文将式(15)表示为:

$$\hat{\beta}^0 = \phi(y) \quad (19)$$

式中,  $\phi(\cdot)$  表示参数估值初值与观测值之间的非线性关系。

同理, 可以将参数估值的第一次迭代值  $\hat{\beta}^1$  写为:

$$\hat{\beta}^1 = \phi(y, \beta^0) \quad (20)$$

尽管进行了一次迭代, 但式(20)本质上仍然是观测值  $y$  的非线性函数。因此, 经过  $i$  次迭代后, 最终的参数估值与观测值  $y$  的关系式为:

$$\hat{\beta} = \underbrace{\phi(\phi(\phi(\phi(y), y), y), \dots)}_{i+1} = \psi(y) \quad (21)$$

由式(21)可以看出, 逐步的迭代过程使得参数估值的每一步估值都具有随机性, 使得最终的参数估值与观测值为复杂的非线性关系。

## 2.3 参数估值及精度评定的 Sterling 插值法

由 §2.2 中对乘性误差模型加权最小二乘迭代解的改化可以看出, 式(21)的非线性函数构造无法显式表达, 很难求导。而 Sterling 插值法具有无需求导、无需了解非线性函数的构造等优势, 因此本文将 Sterling 插值法和乘性误差模型加权最小二乘迭代解法进行结合, 研究非线性迭代过程对加权最小二乘参数带来的影响, 进行参数估计与精度评定计算。

对于形如式(21)中  $\hat{\beta} = \psi(y)$  的非线性函数, 本文通过以下步骤求解参数估值  $\hat{\beta}$  的均值、标准差和单位权方差。将式(9)中的自变量  $X$  替换为观测值  $y$ , 将因变量  $Y$  替换为参数估值  $\hat{\beta}$ , 计算步骤如下:

1) 根据式(10)构造平方根矩阵的列向量。

2) 根据式(11)生成  $2n+1$  列采样值, 观测值的均值以实际观测值的平差值代替。

3) 将步骤 2) 生成的  $2n+1$  列采样值分别代入式(21)的非线性函数中, 进行非线性变换, 得到非线性变换后的样本点, 共有  $2n+1$  列。

4) 根据式(13)计算参数估值的均值。

5) 根据式(14)计算参数估值的协方差阵。

6) 计算参数估值的标准差:

$$\sigma_i = \sqrt{D(\hat{\beta})_{ii}} \quad (22)$$

式中,  $D(\hat{\beta})_{ii}$  表示参数估值协方差阵的对角线元素。

7) 计算单位权方差:

$$\tilde{\sigma}_0^2 = \frac{(y - E(\hat{\beta}))^T P (y - E(\hat{\beta}))}{n - t} \quad (23)$$

文献[18]证明了 Sterling 插值法求得的任意非线性函数因变量的均值和协方差阵均可以达到二阶精度。因此通过上述步骤, 可以对乘性误差模型进行参数估计与精度评定研究。

## 3 算例与分析

为了验证本文 Sterling 插值法的正确性和有效性, 算例部分通过一个非线性较弱的直线拟合模型和一个非线性较强的数字高程模型, 使用 4 种方法分别进行参数估计与精度评定。4 种方法分别为最小二乘 (least squares, LS) 方法、加权最小二乘 (weighted least squares, WLS) 方法、文献[13]方法、本文 Sterling 插值方法。

### 3.1 算例 1

算例 1 模拟了一个含有两个未知参数的直线拟合乘性误差模型, 计算式为:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \odot \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \right) \quad (24)$$

式中,  $(x_i, y_i)$  为坐标点;  $\beta_1$  和  $\beta_2$  分别为截距与斜率, 为待估参数;  $e_i$  为独立同分布的服从正态分布



的随机误差。

给定 $\beta_1$ 和 $\beta_2$ 的真值分别为10和16,横坐标 $x_i$ 在1~15 m之间取值,步长为1 m,单位权中误差 $\sigma_0=0.5$  m,随机误差的标准差为 $\sigma_m=0.02$  m,随机误差由Matlab的mvnrnd函数产生。不含误差时的直线和受到乘性误差干扰后的坐标点如图1所示。使用4种方法计算的参数估值、与真值之间的二范数、单位权中误差和标准差见表1。

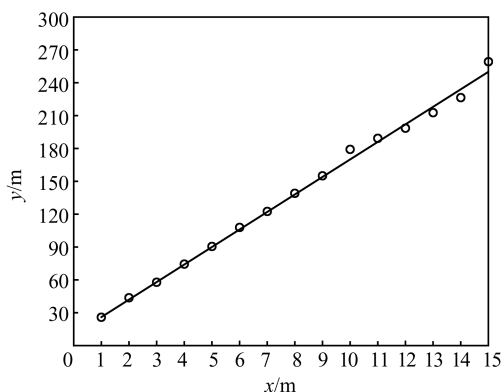


图1 不含误差的直线和受到乘性误差干扰后的坐标点

Fig.1 Line Without Error and Coordinate Points Disturbed by Multiplicative Error

表1 算例1中求得的参数估值、二范数、单位权中误差和标准差/m

Tab.1 Estimated Parameters, 2-Norm, Unit Weight Error and Standard Deviation Calculated in Example 1 /m

| 方法             | $\hat{\beta}_1$ | $\hat{\beta}_2$ | 2-Norm | $\hat{\sigma}_0$ | $\hat{\sigma}_1$ | $\hat{\sigma}_2$ |
|----------------|-----------------|-----------------|--------|------------------|------------------|------------------|
| 真值             | 10              | 16              | —      | 0.5              | —                | —                |
| LS法            | 9.532           | 16.024          | 0.468  | 2.679            | 1.456            | 0.160            |
| WLS法           | 10.269          | 15.901          | 0.286  | 0.553            | 0.565            | 0.143            |
| 文献[13]方法       | 10.083          | 15.926          | 0.111  | 0.551            | 0.561            | 0.141            |
| 本文Sterling插值方法 | 10.082          | 15.925          | 0.111  | 0.553            | 0.553            | 0.132            |

由图1可知,当直线拟合模型受到乘性误差的干扰时,观测值会受到一定的影响,进而与直线产生了偏离。由表1中参数估值与真值的二范数可知,LS法求得的参数估值与真值的二范数最大,并且单位权中误差估值也严重偏离了真值,这是由于LS法未考虑观测值的权。由于WLS法考虑了观测值的权,所以参数估值与真值的二范数小于LS法的结果,并且单位权中误差估值也更接近真值。文献[13]方法由于删去了观测值协因数阵对参数估值求偏导数的非零项,减小了参数估值的偏差,因此其参数估值与真值的二范数要小于WLS法的结果。本文Sterling插值

方法的参数估值与真值二范数与文献[13]方法的结果一致,这可能是因为直线拟合模型的非线性很低,每次迭代的随机性对参数估值的影响可以忽略。

由表1中参数估值的标准差可以看出,LS法求得的参数估值标准差最大,这是由于LS法未考虑观测值的权导致的;WLS法求得的参数估值标准差远小于LS法;文献[13]方法求得的参数估值的标准差略小于WLS法的结果;由于Sterling插值法精度评定方法可以达到二阶精度,因此本文Sterling插值方法求得的标准差最小,这也验证了本文方法的适用性和优势。

### 3.2 算例2

算例2是比算例1更复杂的DEM数据,本文模拟的含有4个未知参数的DEM乘性误差模型如下:

$$H(x, y) = F(x, y) \odot (1 + E_m) \quad (25)$$

式中, $(x, y)$ 为地面点坐标; $H(x, y)$ 为高程;

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^4 \beta_i f_i(x, y), \beta_i \text{ 为待估参数}; f_i(x, y)$$

的具体形式为:

$$f_1(x, y) = e^{-((x-40)^2 + (y-40)^2) \div 500} \quad (26)$$

$$f_2(x, y) = e^{-((x-20)^2 + (y-20)^2) \div 500} \quad (27)$$

$$f_3(x, y) = e^{-((x-35)^2 + (y-35)^2) \div 500} \quad (28)$$

$$f_4(x, y) = e^{-((x-45)^2 + (y-45)^2) \div 500} \quad (29)$$

横坐标 $x$ 和纵坐标 $y$ 都在0~80 m之间取值,步长为2 m,单位权中误差 $\sigma_0=0.3$  m,随机误差的标准差为 $\sigma_m=0.05$  m。不含误差和受到乘性误差干扰后的DEM如图2所示。4种方法计算的参数估值、与真值之间的二范数、单位权中误差和标准差见表2。

由图2可知,尽管本文模拟的DEM加入的乘性误差的标准差仅为0.05 m,但对高程产生了较大的影响。由表2中参数估值与真值的二范数可知,LS法求得的参数估值与真值的二范数最大,并且单位权中误差估值也严重偏离了真值;由于WLS法考虑了观测值的权,所以参数估值与真值的二范数小于LS法的结果;而文献[13]方法求得的参数估值与真值的二范数小于WLS法的结果,单位权中误差几乎一致。

由于本文方法考虑了乘性误差模型加权最小二乘解法逐步迭代过程中参数估值每一步的随机性和非线性迭代过程对加权最小二乘参数

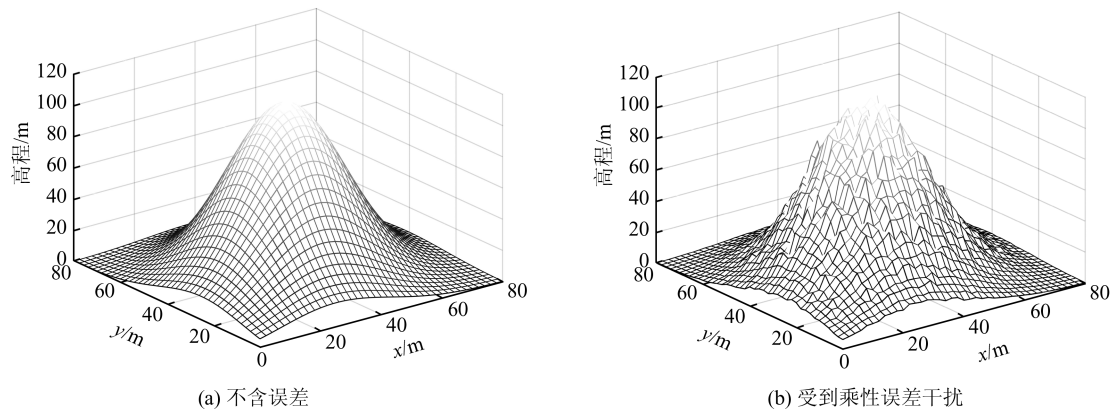


图 2 不含误差和受到乘性误差干扰后的数字高程模型

Fig.2 DEM Without Error and Disturbed by Multiplicative Error

表 2 算例 2 中求得的参数估值、二范数、单位权中误差和标准差 /m

Tab.2 Estimated Parameters, 2-Norm, Unit Weight Error and Standard Deviation Calculated in Example 2 /m

| 方法               | $\hat{\beta}_1$ | $\hat{\beta}_2$ | $\hat{\beta}_3$ | $\hat{\beta}_4$ | 2-Norm | $\hat{\sigma}_0$ | $\hat{\sigma}_1$ | $\hat{\sigma}_2$ | $\hat{\sigma}_3$ | $\hat{\sigma}_4$ |
|------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|--------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| 真值               | 40              | 25              | 50              | 20              | —      | 0.3              | —                | —                | —                | —                |
| LS 法             | 45.939          | 25.646          | 45.719          | 17.904          | 7.644  | 2.034            | 3.181            | 0.361            | 2.031            | 1.503            |
| WLS 法            | 41.998          | 25.279          | 48.969          | 19.241          | 2.389  | 0.290            | 1.236            | 0.172            | 0.967            | 0.421            |
| 文献[13]方法         | 41.736          | 25.214          | 48.724          | 19.339          | 2.264  | 0.291            | 1.234            | 0.171            | 0.965            | 0.420            |
| 本文 Sterling 插值方法 | 41.735          | 25.213          | 48.725          | 19.339          | 2.262  | 0.290            | 1.224            | 0.170            | 0.960            | 0.415            |

带来的影响,因此其参数估值与真值的二范数均小于文献[13]方法的结果,考虑到算例 2 是更复杂且非线性程度更高的 DEM,说明在模型非线性较强的情况下,考虑每次迭代的随机性对参数估值的影响是必要的。由表 2 中参数估值的标准差可以看出,本文方法求得的参数估值精度最高,这是因为 Sterling 插值法的精度评定计算公式可以得到任意非线性函数的二阶精度信息,验证了本文方法的有效性和适用性。

## 4 结 语

本文分析了乘性误差模型的性质,得出参数估值是观测值的函数,观测值的权是参数估值的函数,而参数估值的最后一步解是观测值和观测值权共同的函数的结论。

由于已有方法的参数估值解法未考虑迭代过程中非线性的影响,并且精度评定方法仅为一阶精度,因此本文引入无需求导、无需了解非线性函数构造的 Sterling 插值法,将 Sterling 插值法和乘性误差模型加权最小二乘迭代解法进行结合,求解乘性误差模型中加权最小二乘参数估值的均值和标准差,并给出计算流程。算例结果表明,当研究的模型非线性较高时,考虑每次迭代的随机性对参数估值的影响可以得到更接近真

值的参数估值,并且本文求得的标准差均小于已有方法,参数估值的精度更高,具有一定的优势和可行性。近似非线性函数的概率密度分布的方法众多<sup>[19-21]</sup>,如何将不同方法引入乘性误差模型或加性乘性混合型误差模型,分析不同方法在参数估计和精度评定之间的差异,需要进一步研究。

## 参 考 文 献

- [1] Shi Yun, Xu Peiliang, Peng Junhuan. Multiplicative Error Models: An Applications-Oriented Review of Parameter Estimation Methods and Statistical Error Analysis[J]. *Geotechnical Investigation & Surveying*, 2014, 42(6): 60-66 (师芸, 徐培亮, 彭军还. 乘性误差模型平差理论研究进展概述[J]. 工程勘察, 2014, 42(6): 60-66)
- [2] Pan Zhengfeng, Cheng Xiaojun, Cheng Shu, et al. Principles and Methods of Digital Mapping [M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2004 (潘正风, 程效军, 成枢, 等. 数字测图原理与方法[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2004)
- [3] Xu P L. Despeckling SAR-Type Multiplicative Noise[J]. *International Journal of Remote Sensing*, 1999, 20(13): 2577-2596
- [4] Kaplan L M. Analysis of Multiplicative Speckle Models for Template-Based SAR ATR[J]. *IEEE*

- Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2001, 37(4): 1424-1432
- [5] López-Martínez C, Fàbregas X, Pipia L. Forest Parameter Estimation in the Pol-InSAR Context Employing the Multiplicative-Additive Speckle Noise Model[J]. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 2011, 66(5): 597-607
- [6] Gao Gui, Zhang Jun, Lü Xinming, et al. Analysis of Multiplicative Noise Models in SAR Imagery[J]. *Signal Processing*, 2008, 24(2): 161-167 (高贵, 张军, 吕信明, 等. SAR图像乘性噪声模型分析[J]. 信号处理, 2008, 24(2): 161-167)
- [7] Xu P L, Shimada S. Least Squares Parameter Estimation in Multiplicative Noise Models[J]. *Communications in Statistics — Simulation and Computation*, 2000, 29(1): 83-96
- [8] Shi Yun. Least Squares Adjustment and Accuracy Estimation in Multiplicative Error Models[J]. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 2014, 49(5): 799-803 (师芸. 乘性随机误差模型的最小二乘平差与精度评定[J]. 西南交通大学学报, 2014, 49(5): 799-803)
- [9] Shi Yun. Least Squares Parameter Estimation in Additive/Multiplicative Error Models for Use in Geodesy[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2014, 39(9): 1033-1037 (师芸. 加乘性混合误差模型参数估计方法及其应用[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2014, 39(9): 1033-1037)
- [10] Xu P L, Shi Y, Peng J H, et al. Adjustment of Geodetic Measurements with Mixed Multiplicative and Additive Random Errors[J]. *Journal of Geodesy*, 2013, 87(7): 629-643
- [11] Shi Y, Xu P L. Comparing the Estimates of the Variance of Unit Weight in Multiplicative Error Models[J]. *Acta Geodaetica et Geophysica*, 2015, 50(3): 353-363
- [12] Chen Yang. Outlier Detection on Random Model of Multiplicative Error[D]. Xi'an: Xi'an University of Science and Technology, 2017 (陈杨. 乘性误差随机模型的粗差探测[D]. 西安: 西安科技大学, 2017)
- [13] Shi Y, Xu P, Peng J, et al. Adjustment of Measurements with Multiplicative Errors: Error Analysis, Estimates of the Variance of Unit Weight, and Effect on Volume Estimation from LiDAR-Type Digital Elevation Models[J]. *Sensors*, 2014, 14(1): 1249-1266
- [14] Schei T S. A Finite-Difference Method for Linearization in Nonlinear Estimation Algorithms [J]. *Modeling, Identification and Control: A Norwegian Research Bulletin*, 1998, 19(3): 141-152
- [15] Nørgaard M, Poulsen N K, Ravn O. New Developments in State Estimation for Nonlinear Systems [J]. *Automatica*, 2000, 36(11): 1627-1638
- [16] Ito K, Xiong K. Gaussian Filters for Nonlinear Filtering Problems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(5): 910-927
- [17] Merwe R V D. Sigma Point Kalman Filters for Probabilistic Inference in Dynamic State Space Models [D]. Oregon: Oregon Health & Science University, 2004
- [18] Wang L Y, Zou C Y. Accuracy Analysis and Applications of the Sterling Interpolation Method for Nonlinear Function Error Propagation [J]. *Measurement*, 2019, 146: 55-64
- [19] Wang L Y, Zhao Y W. Unscented Transformation with Scaled Symmetric Sampling Strategy for Precision Estimation of Total Least Squares [J]. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 2017, 61(3): 385-411
- [20] Wang L Y, Zhao Y W. Scaled Unscented Transformation of Nonlinear Error Propagation: Accuracy, Sensitivity, and Applications [J]. *Journal of Surveying Engineering*, 2018, 144(1): 04017022
- [21] Wang Leyang, Zou Chuanyi, Wu Lulu. A Spherical Simplex Unscented Transformation for Solving Parameters of EIV Model [J]. *Journal of Geomatics Science and Technology*, 2018, 35(4): 368-372 (王乐洋, 邹传义, 吴璐璐. EIV模型参数求解的超球体单行采样法[J]. 测绘科学技术学报, 2018, 35(4): 368-372)

## Sterling Interpolation Method for Parameter Estimation and Precision Estimation in Multiplicative Error Model

WANG Leyang<sup>1</sup> ZOU Chuanyi<sup>2</sup>

1 Faculty of Geomatics, East China Institute of Technology, Nanchang 330013, China

2 School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan 430079, China

**Abstract: Objectives:** For multiplicative error model, the parameters estimated by weighted least squares (WLS) are nonlinear functions of observations, and the weights of observations are nonlinear functions of the estimated parameters. The existing parameter estimation methods of multiplicative error model can theoretically achieve second-order unbiased, but the precision of uncertainty can only achieve first-order unbiased. Therefore, a new method is used to improve the accuracy of uncertainty. **Methods:** The effect of nonlinear iterative processes on WLS parameters is considered, and the relationship between the estimated parameters and the observations in iterative WLS process is regarded as a nonlinear nested function. The derivative-free Sterling interpolation method with symmetric sampling is used to calculate the expectations of estimated parameters and the standard deviation. **Results:** From the analysis of two synthetic experiments, the following results are obtained: (1) Considering the impact of the randomness of each iteration on the parameter estimation, the proposed Sterling interpolation method can get better estimated parameters than the existing methods. (2) When the nonlinearity of model is high, the effectiveness of the Sterling interpolation method is more significant. (3) The uncertainty estimation method in this paper can achieve second-order precision. **Conclusions:** The feasibility and effectiveness of the Sterling interpolation method for parameter estimation and precision estimation of multiplicative error model are verified.

**Key words:** multiplicative error model; weighted least squares; Sterling interpolation; parameter estimation; precision estimation

**First author:** WANG Leyang, PhD, professor, majors in geodetic inversion and geodetic data processing. E-mail: wleyang@163.com

**Foundation support:** The National Natural Science Foundation of China (41874001, 41664001, 42174011).

**引文格式:** WANG Leyang, ZOU Chuanyi. Sterling Interpolation Method for Parameter Estimation and Precision Estimation in Multiplicative Error Model[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2022, 47(2): 219–225. DOI:10.13203/j.whugis20200052 (王乐洋, 邹传义. 乘性误差模型参数估计及精度评定的 Sterling 插值方法[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2022, 47(2): 219–225. DOI:10.13203/j.whugis20200052)