



不等式约束PEIV模型的经典最小二乘方法

谢建, 龙四春, 周璀

引用本文:

谢建, 龙四春, 周璀. 不等式约束PEIV模型的经典最小二乘方法[J]. 武汉大学学报 · 信息科学版, 2021, 46(9): 1291–1297.

XIE Jian, LONG Si-chun, ZHOU Cui. Classical Least Squares Method for Inequality Constrained PEIV Model[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2021, 46(9): 1291–1297.

相似文章推荐 (请使用火狐或IE浏览器查看文章)

Similar articles recommended (Please use Firefox or IE to view the article)

[通用EIV平差模型的线性化估计算法](#)

Linearization Estimation Algorithm for Universal EIV Adjustment Model

武汉大学学报 · 信息科学版. 2021, 46(9): 1284–1290 <https://doi.org/10.13203/j.whugis20200243>

[利用自适应水准网动态平差建立山东垂直运动速度模型](#)

Vertical Movement in Shandong Province Based on Adaptively Dynamic Adjustment for Level Network

武汉大学学报 · 信息科学版. 2020, 45(4): 620–625 <https://doi.org/10.13203/j.whugis20180296>

[一种利用同名像点位姿变化建立某型器物量测系统误差补偿新方法](#)

A New Error Compensation Method for Certain Measurement System Using the Change of Position and Pose of Corresponding Image Points

武汉大学学报 · 信息科学版. 2020, 45(4): 517–523 <https://doi.org/10.13203/j.whugis20190007>

[多变量稳健总体最小二乘平差方法](#)

Robust Total Least Squares Method for Multivariable EIV Model

武汉大学学报 · 信息科学版. 2019, 44(8): 1241–1248 <https://doi.org/10.13203/j.whugis20170232>

[附有相对权比的加权总体最小二乘联合平差方法](#)

Weighted Total Least Squares Method for Joint Adjustment Model with Weight Scaling Factor

武汉大学学报 · 信息科学版. 2019, 44(8): 1233–1240 <https://doi.org/10.13203/j.whugis20170265>



不等式约束PEIV模型的经典最小二乘方法

谢 建¹ 龙四春¹ 周 璀²

1 湖南科技大学煤炭资源清洁利用与矿山环境保护湖南省重点实验室,湖南 湘潭,411201

2 中南林业科技大学理学院,湖南 长沙,410018

摘要:不等式约束部分变量含误差(partial errors-in-variables, PEIV)模型目前主要采用线性化方法和非线性规划类算法,前者计算效率较低,后者基于最优化理论,计算复杂,未能与经典平差理论建立联系,难以在测量实际中推广。在整体最小二乘准则下,根据最优解的Kuhn-Tucker条件,将不等式约束整体最小二乘解的计算转化为二次规划问题,并提出改进的Jacobian迭代法求解二次规划。所提方法不需要对观测方程线性化,与经典最小二乘法具有相同的形式,易于编程实现。数值实例表明,所提方法形式简洁,具有良好的计算效率,是经典最小二乘平差理论的有益拓展。

关键词:不等式约束;部分变量含误差模型;整体最小二乘;Jacobian迭代法;经典最小二乘

中图分类号:P207

文献标志码:A

在大地测量坐标转换、曲线曲面拟合、摄影测量后方交会、大地测量反演等领域^[1-6],平差系统的系数矩阵和观测向量均含有随机误差,这类模型称为变量含误差(errors-in-variables, EIV)模型。令随机误差的平方和最小,求EIV模型最优解的算法称为整体最小二乘(total least squares, TLS)方法。当随机误差都服从独立同分布时,称为等权TLS。当误差相关、精度不相等时,称为加权TLS(weighted TLS, WTLS)。Fang^[7]推导了WTLS问题获得最优解的条件,并提出了3类典型算法。Mahboub^[8]给出了构建系数阵权阵的几点规则和特殊结构下WTLS的迭代方案,并运用到线性回归和二维仿射变换。Shen等^[9]将WTLS问题转换为非线性加权最小二乘问题,利用Gauss-Newton法得到的解在形式上与经典最小二乘解(least squares, LS)相同,并采用蒙特卡罗模拟得到了单位权方差的近似无偏估计。Amiri-Simkooei等^[10]也给出了与经典LS解形式相同的WTLS解。

当参数间存在可靠的先验信息时,将其纳入EIV模型能提高参数估计的精度和可靠性。Schaffrin等^[11]将含线性约束的TLS问题转化为特征值问题,得到了方差的近似值,并扩展到同时含有线性和二次约束的情形。Zhang等^[12]提出

了解不等式约束WTLS (inequality constrained WTLS, ICWTLS)问题的穷举搜索法,其计算量随约束的增加迅速增大。Fang^[13]采用起作用集方法和序列二次规划(sequential quadratic programming, SQP)算法求解ICWTLS问题。

Xu等^[14]将EIV模型扩展成部分变量含误差(partial errors-in-variables, PEIV)模型并推导了其算法和近似方差。Shi等^[15]给出了PEIV模型的经典LS形式的解,并分析了算法计算量与系数阵中含误差元素个数间的关系。Zeng等^[16]提出了不等式约束PEIV (inequality constrained PEIV, ICPEIV)模型的线性近似方法,将其转化为二次规划子问题,其计算效率较低。ICPEIV模型在WTLS准则下可归结为约束非线性规划问题,采用最优化理论的乘子法、惩罚函数法、积极约束法等,计算过程较复杂,与经典平差理论相去甚远^[17]。解不等式约束最小二乘(inequality constrained LS, ICLS)问题的Jacobian迭代算法与解等式约束LS问题的算法相似,ICLS问题可纳入经典平差模型的范畴。

为了简化ICPEIV模型的计算,得到与经典平差形式一致的算法,本文提出了解ICPEIV模型的经典LS方法。首先,根据ICPEIV模型获得最优解的一阶必要条件,将模型参数和系数阵元

素的估计进行分离。模型参数的估计归结为解ICLS问题,系数阵元素的估计根据两类参数的关系得到。然后,提出扩展的Lagrange方法,将ICLS问题归结为经典的等式约束平差问题,不需要对观测方程线性化,也无需利用规划类算法,与经典LS方法形式一致。

1 ICPEIV模型及WTLS解

1.1 ICPEIV模型的最优化条件

ICPEIV模型的函数模型可以表示为^[18]:

$$y = (\beta^T \otimes I_n)(h + B\bar{a}) + e_y \quad (1a)$$

$$a = \bar{a} + e_a \quad (1b)$$

$$G\beta - d \geq 0 \quad (1c)$$

式中, y 和 e_y 分别表示 n 维观测向量及其误差向量; β 表示 m 维模型参数; I_n 是 n 维单位矩阵; \otimes 是Kronecker积符号,其定义为 $A \otimes B = [a_{ij} \times B]$, a_{ij} 是矩阵 A 的第*i*行第*j*列元素; a 是已知 t 维列向量; \bar{a} 和 e_a 分别是 a 的真值和误差向量; h 是已知的 nm 维常数向量; B 是 $nm \times t$ 维常数矩阵; a 、 B 的定义见文献[15]; G 是 $s \times m$ 维约束矩阵; d 是 s 维常数向量。令随机误差 $e = (e_a^T \ e_y^T)^T$,其均值为0,且 e_a 和 e_y 互不相关,它们的方差分别为:

$$D(e_y) = \sigma_0^2 W^{-1} \quad (1d)$$

$$D(e_a) = \sigma_0^2 \omega^{-1} \quad (1e)$$

式中, σ_0^2 为单位权方差; W 为 n 维观测值权矩阵; ω 为 t 维随机误差权矩阵。

ICPEIV模型的整体最小二乘解等价于如下约束非线性规划问题的最优解:

$$\begin{cases} \min: \Phi(\bar{a}, \beta) = (\bar{a} - a)^T \omega (\bar{a} - a) + \\ \quad ((\beta^T \otimes I_n)(h + B\bar{a}) - y)^T \times \\ \quad W((\beta^T \otimes I_n)(h + B\bar{a}) - y) \\ \text{s.t. } G\beta - d \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

由最优化理论得到Lagrange目标函数为:

$$\psi(\bar{a}, \beta) = ((\beta^T \otimes I_n)(h + B\bar{a}) - y)^T \times \\ W((\beta^T \otimes I_n)(h + B\bar{a}) - y) + \\ (\bar{a} - a)^T \omega (\bar{a} - a) - \lambda^T (G\beta - d - \eta) \quad (3)$$

式中, λ 是 s 维Lagrange乘子向量; η 是非负基变量。将 $\psi(\bar{a}, \beta)$ 分别对 \bar{a} 、 β 、 λ 求偏导,令其在最优解 \hat{a} 和 $\hat{\beta}$ 处的值为0,可得:

$$\frac{\partial \psi(\bar{a}, \beta)}{\partial \bar{a}} = 2\omega(\hat{a} - a) + 2B^T(\hat{\beta} \otimes I_n) \times \\ W((\hat{\beta}^T \otimes I_n)(h + B\hat{a}) - y) = 0 \quad (4a)$$

$$\frac{\partial \psi(\bar{a}, \beta)}{\partial \beta} = 2 \begin{bmatrix} h_1^T + \hat{a}^T B_1^T \\ h_2^T + \hat{a}^T B_2^T \\ \vdots \\ h_m^T + \hat{a}^T B_m^T \end{bmatrix} W \times \\ \{(\hat{\beta}^T \otimes I_n)(h + B\hat{a}) - y\} - G^T \lambda = 0 \quad (4b)$$

$$\frac{\partial \psi(\bar{a}, \beta)}{\partial \lambda} = G\hat{\beta} - d + \eta = 0 \quad (4c)$$

式中, $h^T = [h_1^T \ h_2^T \ \cdots \ h_m^T]$, $B^T = [B_1^T \ B_2^T \ \cdots \ B_m^T]$,
 h_i 是 n 维列向量, B_i 是 $n \times t$ 维矩阵($i=1, 2, \dots, m$)。由式(4a)、(4b)、(4c)可得ICPEIV模型获得最优解的Kuhn-Tucker(KT)条件为:

$$(\omega + S_\beta^T W S_\beta) \hat{a} - \omega a + \\ S_\beta^T W \left(\sum_{i=1}^m h_i \hat{\beta}_i \right) - S_\beta^T W y = 0 \quad (5a)$$

$$(N_h + N_B + N_{Bh} + N_{hb}) \hat{\beta} - \\ u_h - u_B - G^T \lambda = 0 \quad (5b)$$

$$g_i^T \hat{\beta} - d_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, s \quad (5c)$$

$$\lambda_i (g_i^T \hat{\beta} - d_i) = 0, i = 1, 2, \dots, s \quad (5d)$$

$$\lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, s \quad (5e)$$

式中, $S_\beta = \sum_{i=1}^m B_i \hat{\beta}_i = (\hat{\beta}^T \otimes I_n) B$,
 N_h 、 N_B 、 N_{Bh} 、 N_{hb} 、 u_h 、 u_B 的含义见文献[15]。令 $G^T = [g_1 \ g_2 \ \cdots \ g_s]$, $g_i^T = [g_{i1} \ g_{i2} \ \cdots \ g_{im}]$ 是 G 的第*i*行,常数项 $d = [d_1 \ d_2 \ \cdots \ d_s]^T$ 。若 $(\hat{a}, \hat{\beta})$ 是式(2)的局部最优解,则满足KT必要条件,但式(5a)~(5e)并未直接提供ICPEIV模型的最优化算法。本文通过已有的线性近似方法和SQP方法,提出可直接利用经典LS原理的算法。

1.2 线性近似方法求ICPEIV模型的WTLS解

给定模型参数和系数阵中随机元素的近似值 $\beta_a^0 = [\beta_0^T \ \bar{a}_0^T]^T$,令 $\Delta\beta = \beta - \beta_a^0$, $\Delta a = \bar{a}_0 - \bar{a}$,
 $\Delta d = d - G\beta^0$ 。忽略二阶及高阶项,则式(1a)~(1e)可以线性化为^[16]:

$$\begin{cases} \Delta y = A_0 \Delta \beta + (\beta^T \otimes I_n) B \Delta a + e_y \\ \bar{a}_0 - a = \Delta a + e_a \\ -G \Delta \beta \geq \Delta d \end{cases} \quad (6)$$

式中, $\Delta y = A_0 \beta_a^0 - y$, $A_0 = \text{ivec}(h + B\bar{a}_0)$, $\text{ivec}()$ 是将 $n \times m$ 维列向量转化为 $n \times m$ 维矩阵的操作算

$$\text{子。令 } \Delta\beta_a = \begin{bmatrix} \Delta\beta \\ \Delta a \end{bmatrix}, \Delta y_a = \begin{bmatrix} \Delta y \\ \bar{a}_0 - a \end{bmatrix}, G_a = -[G \quad 0], \\ \Delta d_a = d - G_a \beta_a^0, A_a = \begin{bmatrix} A_0 & (\beta^T \otimes I_n) B \\ 0 & I_t \end{bmatrix}, \text{则式(6)}$$

可以写成:

$$\begin{cases} \Delta y_a = A_a \Delta \beta_a + e \\ G_a \Delta \beta_a \geq \Delta d_a \end{cases} \quad (7)$$

式(7)是经典的 ICCLS 模型,可以用线性互补算法、积极约束法等求解。线性化方法包含内外迭代,外迭代是由近似值进行线性化的过程,内迭代是组成 ICCLS 模型、采用二次规划(quadratic programming, QP)算法得到新的近似值的过程。当近似值距离最优解较远时,每代入一次新的近似值,就要计算一个 $n+t$ 维二次规划问题,在大规模问题中,计算量会显著增加。

1.3 SQP 算法求 ICPEIV 模型的 WTLS 解

令 $u^T = [\bar{a}^T \quad \beta^T]$, $G_g = [0 \quad G]$, 则式(2)可以表示成约束非线性规划问题:

$$\begin{cases} \min f(u) \\ \text{s.t. } G_g u - d \geq 0 \end{cases} \quad (8)$$

给定初始值 $u^{(j)}$, 计算函数 $f(u)$ 在 $u^{(j)}$ 处的梯度 $g(u^{(j)})$ 和 Hessian 矩阵 $H(u^{(j)})$ 。将目标函数和约束条件在 $u^{(j)}$ 处用泰勒级数展开,保留二次项,则式(8)转化为 QP 问题^[13]:

$$\begin{cases} \min f(u^{(j)} + du) = \frac{1}{2} du^T H(u^{(j)}) du + \\ \quad g^T(u^{(j)}) du + f(u^{(j)}) \\ \text{s.t. } G_g u^{(j)} - d + G_g du \geq 0 \end{cases} \quad (9)$$

采用积极约束法求解,得到 du 的最优值。令新的近似值 $u^{(j+1)} = u^{(j)} + du$ ($j = 1, 2 \dots N$), 形成新的 QP 问题。计算步骤为:

1) 令 $u^{(0)} = [\bar{a}^{(0)T} \quad \beta^{(0)T}]^T$, 计算 $g^T(u^{(0)})$ 和 $H(u^{(0)})$, 在可行集内选取初值 du_0 , 利用积极约束法求解式(9)的 QP 问题;

2) 若 $\|du\| \leq \epsilon$ (ϵ 是任意给定的小的正数), 则停止迭代;若 $\|du\| > \epsilon$, 令 $u^{(j)} = u^{(j-1)} + du$, 转步骤 1)。

$g(u^{(j)})$ 和 $H(u^{(j)})$ 的计算见文献[18]。SQP 算法是一种牛顿型算法,当目标函数和约束方程在最优解的邻域内二次可微、且约束条件线性无关时,若一阶 KT 条件和二阶充分条件成立,则算法具有二阶收敛速率。SQP 方法需要求解目标函数对参数的微分和 Hessian 矩阵,计算较为复杂。

针对线性和 SQP 算法的不足,本文提出一种无需线性化、与经典 LS 平差模型形式一致的迭代算法。

2 ICPEIV 模型的经典 LS 算法

2.1 ICPEIV 模型的变量分离算法

由式(5a)可知,若给定参数 β 的一个估值 $\hat{\beta}$, 可得到相应的估计 \hat{a} 为^[14]:

$$\hat{a} = (\omega + S_\beta^T W S_\beta)^{-1} \times \\ (\omega a - S_\beta^T W h_\beta + S_\beta^T W y) \quad (10)$$

式中, $h_\beta = \sum_{i=1}^m h_i \hat{\beta}_i$ 。当 \hat{a} 的元素个数 t 小于观测值的个数 n 时,采用式(10)计算 \hat{a} 值,只需求 t 维矩阵的逆,计算量较小。若 $t > n$, 用式(11)计算的 \hat{a} 值与式(10)等价,却只需求 n 维矩阵的逆,此时计算量小^[15]。

$$\hat{a} = a + \omega^{-1} S_\beta^T E^{-1} (y - A\hat{\beta}) \quad (11)$$

式中, $E = W^{-1} + S_\beta \omega^{-1} S_\beta^T$ 。令 $\bar{A} = \text{ivec}(h + B\bar{a})$, 则有 $(\beta^T \otimes I_n)(h + B\bar{a}) = \bar{A}\hat{\beta}$ 。因此式(2)等价于求解约束最优化问题:

$$\begin{cases} \min \Phi(\beta) = (a - \bar{a})^T \omega (a - \bar{a}) + \\ \quad (\bar{A}\beta - y)^T W (\bar{A}\beta - y) \\ \text{s.t. } G\beta - d \geq 0 \end{cases} \quad (12)$$

当给定 \bar{a} 值时,式(12)等价于 QP 问题:

$$\begin{cases} \min \Phi(\beta) = (\bar{A}\beta - y)^T W (\bar{A}\beta - y) \\ \text{s.t. } G\beta - d \geq 0 \end{cases} \quad (13)$$

综上所述,可以分别估计 β 和 \bar{a} 的值。给定 \hat{a} 的近似值,组成 QP 问题(式(13)),求解得到新的 $\hat{\beta}$ 以后,利用式(10)或式(11)求解新的 \hat{a} 近似值。求解 ICPEIV 模型转换为求解 ICCLS 模型和代入公式这两个步骤的循环过程。因此,将求解 ICPEIV 模型简化成标准 LS 形式的关键是将 ICCLS 问题(式(13))的求解转换为标准 LS 形式。

2.2 ICCLS 平差模型的改进 Jacobian 迭代法

式(13)是典型的 QP 问题,根据最优化理论可以得到其获得最优解的 KT 条件为^[17]:

$$N\beta = G^T \lambda + \bar{A}^T W y \quad (14a)$$

$$\lambda^T (G\beta - d) = 0 \quad (14b)$$

$$\lambda \geq 0 \quad (14c)$$

式中, $N = \bar{A}^T W \bar{A}$ 。由 $\bar{A}^T W y = u_h + u_B$ 和 $\bar{A}^T W \bar{A} = N_h + N_B + N_{Bh} + N_{hb}$, 容易得到式(14a)~(14e) 与

式(5b)~(5e)等价。由式(14a)可得:

$$\beta = N^{-1}(\bar{A}^T W y) \quad (15)$$

将式(15)分别代入式(1c)和式(14b),并令 $D = GN^{-1}G^T$, $l = d - G\hat{\beta}_{LS}$, 且 $\hat{\beta}_{LS} = N^{-1}\bar{A}^T W y$ 为无约束 LS 解, 可得:

$$\begin{cases} D\lambda - l \geq 0 \\ \lambda^T(D\lambda - l) = 0 \end{cases} \quad (16)$$

设 D_{ij} 为 D 的第 i 行第 j 列元素, l_i 为 l 的第 i 个分量, λ 的第 k 次迭代值为 $\lambda^{(k)} = (\lambda_1^{(k)} \ \lambda_2^{(k)} \cdots \lambda_s^{(k)})^T$, 用 Jacobian 迭代法求解下列方程:

$$D\lambda - l = 0 \quad (17)$$

由此得到第 $k+1$ 次迭代值为 $\lambda^{*(k+1)} = (\lambda_1^{*(k+1)} \ \lambda_2^{*(k+1)} \cdots \lambda_s^{*(k+1)})^T$ 。若 $\lambda^{*(k+1)} > 0$, 令 $\lambda^{(k+1)} = \lambda^{*(k+1)}$, 易知 $\lambda^{(k+1)}$ 是式(16)的可行解。若 $\lambda^{*(k+1)}$ 的第 i 个分量 $\lambda_i^{*(k+1)} < 0$, 对应的第 i 个方程满足:

$$\begin{aligned} D_{i,1}\lambda_1^{*(k+1)} + D_{i,2}\lambda_2^{*(k+1)} + \cdots D_{i,i-1}\lambda_{i-1}^{*(k+1)} + \\ D_{i,i+1}\lambda_{i+1}^{*(k+1)} + \cdots D_{i,s}\lambda_s^{*(k+1)} - l_i = -D_{i,i}\lambda_i^{*(k+1)} > 0 \end{aligned} \quad (18)$$

假设方阵 D 为正定矩阵, 则主对角元素 $D_{i,i} > 0$, 式(18)成立。此时, 设 $\lambda_i^{(k+1)} = 0$, 其他分量不变, 即 $\lambda_j^{(k+1)} = \max(\lambda_j^{*(k+1)}, 0)$ ($j = 1, 2 \dots s$), 满足式(16)。重复上述迭代过程, 直到最后两次迭代值相等。

经典的等式约束间接平差模型为:

$$\begin{cases} \min \Phi(\beta) = (\bar{A}\beta - y)^T W (\bar{A}\beta - y) \\ \text{s.t. } G\beta - d = 0 \end{cases} \quad (19)$$

式(19)中等式约束对应的 Lagrange 乘子应满足的关系与式(17)在形式上完全一致, 二者的差别在于, 式(19)的 Lagrange 乘子由式(17)直接求解得到, 对 λ 的取值没有任何要求, 最终解 λ 严格满足式(17)。对于 ICLS 问题(式(13)), 需要迭代求解式(17), 获得非负解。由上述分析可知, 当 $\lambda_i^{(k+1)} > 0$ 时, 对应的第 i 个方程严格满足:

$$D_{i,1}\lambda_1^{(k+1)} + D_{i,2}\lambda_2^{(k+1)} + \cdots + D_{i,s}\lambda_s^{(k+1)} - l_i = 0 \quad (20)$$

此时 λ_i 对应的不等式约束为有效约束, 等同于等式约束。当 $\lambda_i^{(k+1)} = 0$ 时, 对应的第 i 个方程满足:

$$D_{i,1}\lambda_1^{(k+1)} + D_{i,2}\lambda_2^{(k+1)} + \cdots + D_{i,s}\lambda_s^{(k+1)} - l_i > 0 \quad (21)$$

此时 λ_i 对应的不等式约束为无效约束, 对参数估计的结果没有影响。由式(20)和式(21)易知, 式(16)恒成立。由上述改进的 Jacobian 迭代法得到式(16)的非负解, 代入式(15), 得到式(13)的 ICLS 解。因此, 解 ICLS 问题的改进 Jacobian 迭代法是对等式约束 LS 问题的扩展。求解式(16)的 Jacobian 迭代法的计算步骤如下:

1) 令初始解 $\lambda^{(0)} = [0 \ 0 \ \cdots \ 0]^T$;

2) 计算式(17)的第 $k+1$ ($k=0, 1 \dots N, N$ 为迭代次数) 次 Jacobian 迭代解为:

$$\lambda^{*(k+1)} = (I - M^{-1}D)\lambda^{(k)} + M^{-1}l \quad (22)$$

式中, M 是由 D 的主对角元素组成的对角阵, 则式(22)的分量形式为:

$$\lambda_i^{*(k+1)} = \frac{l_i - \sum_{j=1}^{i-1} D_{ij}\lambda_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^s D_{ij}\lambda_j^{(k)}}{D_{ii}} \quad (23)$$

取 $\lambda_i^{(k+1)} = \max(0, \lambda_i^{*(k+1)})$;

3) 若 $\lambda^{(k+1)} \neq \lambda^{(k)}$, 则转步骤 2); 否则, 停止迭代。令 $\lambda = \lambda^{(k+1)}$, 根据式(15)求得 ICLS 解。

由于式(17)是求解不等式约束对应的 Lagrange 乘子, 法方程的维数等于不等式约束的个数, 当约束个数较少时, 方程的计算量较小, 因此, 它更适应于不等式约束个数较少的情况。

2.3 ICPEIV 模型的经典最小二乘迭代算法

ICPEIV 模型的计算步骤如下:

1) 给定已知量 a, y, h, B, ω, W ;

2) 令 $\bar{a}^{(0)} = a, \bar{A}^{(0)} = \text{ivec}(h + B\bar{a}^{(0)})$, 组成 QP 问题(式(13)), 采用改进的 Jacobian 迭代法求解, 得到估值 $\beta^{(0)}$;

3) 根据 t 和 n 的大小以及使得计算量较小的原则, 分别采用式(10)或式(11)更新 $\bar{a}^{(k)}$;

4) 如果 \bar{a} 或 β 的误差小于预先确定的容许值, 即 $\|\hat{a}^{(k)} - \hat{a}^{(k-1)}\| \leq \epsilon_1$ 或 $\|\hat{\beta}^{(k)} - \hat{\beta}^{(k-1)}\| \leq \epsilon_2$ (ϵ_1, ϵ_2 为足够小的正数) 时, 停止迭代, 否则, 转步骤 2)。

本文提出的经典 LS 迭代法也包含内外迭代, 外迭代次数是指需要计算的 QP 问题的次数, 内迭代次数是指采用 Jacobian 迭代法求解每个 QP 问题的平均迭代次数。而在线性化方法和 SQP 算法中, 外迭代次数分别是指需要计算的 QP 问题(式(7)和式(9))的次数, 内迭代次数指采用积极约束法求解相应 QP 问题的平均迭代次数, 即计算相应等式约束 LS 问题的个数。

本文方法求解 QP 问题的参数仅为模型参数, 而线性化和 SQP 方法求解 QP 问题的参数包括模型参数和系数阵元素。前者的 QP 问题的维数小于后者, 特别是在系数阵元素中随机量较多的情况下。在线性化和 SQP 方法的内迭代中, 求解 QP 问题一般采用计算效率较好的积极约束法, 内迭代一次是指计算一次等式约束 LS 问题,

其复杂度远大于本文方法中的一次内迭代,因为本文方法的一次 Jacobian 迭代仅仅是公式代入过程。由于本文方法的内外迭代的复杂度都小于线性近似和 SQP 方法,在比较计算效率时,应同时比较内外迭代次数和计算时间。

3 算例分析

3.1 数值算例 1

算例 1 取自文献[13],对应的约束 EIV 模型为:

$$\begin{cases} \mathbf{y} = (\mathbf{A} - \mathbf{E}_A)\beta + \mathbf{e}_y \\ \mathbf{G}\beta \geq \mathbf{d} \end{cases} \quad (24)$$

系数矩阵、右端观测项、一般约束矩阵、约束常数项及区间约束条件见文献[13]。设系数阵元素和右端向量的随机误差都服从独立同分布,即 $\mathbf{Q}_e = \mathbf{I}_{25}$ 为 25 阶单位矩阵。不考虑系数阵误差,求解相应的 ICLS 解作为线性化方法的初值,即 $\hat{\beta}_{\text{ICLS}} = [-0.1000 \ -0.1000 \ 0.2152 \ 0.3502]^T$ 。将式(24)转换成式(1a)~(1e),分别采用线性化方法和 SQP 方法(解式(7)和式(9)均采用积极约束法)及本文经典 LS 方法求解,迭代终止标准均取 $\epsilon = 1.0 \times 10^{-8}$ 。算例 1 的参数估值、内外迭代次数、计算时间等模拟实验结果见表 1,其中, $\hat{\beta}_{\text{LA}}$ 、 $\hat{\beta}_{\text{SQP}}$ 和 $\hat{\beta}_{\text{CLS}}$ 分别表示采用线性化方法、SQP 算法和经典 LS 方法的 ICWTLS 解。

表 1 算例 1 的模拟实验结果

Tab.1 Simulation Results of Example 1

ICWTLS 解	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$	外迭代次数	平均内迭代次数	计算时间/s
$\hat{\beta}_{\text{LA}}$	-0.100 000	-0.100 000	0.168 581	0.399 765	23	2	0.038
$\hat{\beta}_{\text{SQP}}$	-0.100 000	-0.100 000	0.168 579	0.399 766	5	2	0.020
$\hat{\beta}_{\text{CLS}}$	-0.100 000	-0.100 000	0.168 547	0.399 777	22	132	0.025

从表 1 中可以看出,本文方法得到的结果与文献[13]中基于式(24)分别采用积极约束法和 SQP 方法得到的结果相比,它们在小数点后第 4 位完全一致。将 3 种方法得到的估值 $(\hat{a}, \hat{\beta})$ 代入式(2),可以得到 $\Phi(\hat{a}_{\text{LA}}, \hat{\beta}_{\text{LA}}) = \Phi(\hat{a}_{\text{SQP}}, \hat{\beta}_{\text{SQP}}) = 0.139 732$, $\Phi(\hat{a}_{\text{CLS}}, \hat{\beta}_{\text{CLS}}) = 0.139 737$ 。由此可见,在相同的迭代终止标准下,3 种方法的计算精度相当。线性化方法和本文方法的外迭代次数相近,本文方法的内迭代次数远大于线性化方法,SQP 方法具有二阶收敛性,外迭代次数最少。

对于外迭代,线性化方法和 SQP 方法需要求解 24 维的 QP 问题,而本文方法是 4 维,外迭代的复杂度明显减小。线性化方法和 SQP 方法每次内迭代都要解 24 维的等式约束问题,而本文方法每次内迭代只需要解 11 维线性方程组。

从计算时间上看,本文方法小于线性近似方

法,具有更高的计算效率。由于不等式约束的个数较多,本文方法迭代次数远大于 SQP 方法,计算时间与 SQP 方法相比缺乏优势。本文方法的总迭代次数远大于其他两种方法,但计算时间和 SQP 法相近,进一步验证了本文方法内外迭代的复杂度明显较低。

3.2 数值算例 2

由§2.2 分析可知,本文方法的计算量随约束个数的减少而下降。算例 2 采用与算例 1 相同的观测数据,仅保留 3 个一般不等式约束,去掉区间约束,计算不考虑系数阵误差的 ICLS 解为 $\hat{\beta}_{\text{ICLS}} = [0.1299 \ -0.5757 \ 0.4251 \ 0.2438]^T$ 。将其作为线性近似方法的初始近似值,并采用与算例 1 相同的计算方案,结果见表 2。

从表 2 可知,当约束个数从算例 1 的 11 个变为 3 个以后,线性化方法和 SQP 方法需求解 24 维

表 2 算例 2 的模拟实验结果

Tab.2 Simulation Results of Example 2

ICWTLS 解	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$	外迭代次数	平均内迭代次数	计算时间/s
$\hat{\beta}_{\text{LA}}$	0.127 524	-0.576 759	0.426 986	0.243 459	7	2	0.021
$\hat{\beta}_{\text{SQP}}$	0.127 524	-0.576 759	0.426 986	0.243 459	4	2	0.018
$\hat{\beta}_{\text{CLS}}$	0.127 524	-0.576 759	0.426 986	0.243 459	14	27	0.009

的QP问题,而本文方法只需求解4维的QP问题,且采用改进的Jacobian迭代法只需求解3维线性方程组。本文方法的内外迭代次数及计算时间都明显减少,验证了本文方法的计算效率随约束个数的减少而减少。因此,在约束个数较少的测绘应用中具有更好的适用性。3种方法在相同的迭代终止标准下得到的结果一致,但本文方法的计算效率比线性化方法和SQP方法更好。

4 结语

目前,求解ICPEIV模型的线性化方法计算效率偏低,转换成QP问题后需采用规划类算法求解。若采用非线性规划算法,如SQP方法,要求目标函数的梯度和Hessian矩阵,形式复杂,难以推广应用。针对上述问题,本文提出了求解ICPEIV模型的经典LS方法,将模型参数和系数阵元素分别估计,模型参数的估计归结为解QP问题,系数阵元素的估计则利用其与模型参数的关系计算。针对QP问题,以KT条件为基础,设计了改进的Jacobian迭代法将QP问题转化为线性方程的求解,它是求解等式约束LS模型的Lagrange乘子法的拓展。本文方法无需对观测方程线性化,也无需掌握复杂的规划类算法,形式简洁,与经典LS一致,易于推广应用。数值实验表明,本文方法具有良好的计算效率和广泛的适用性,能得到与线性化方法和SQP方法精度相当的WTLS解。特别是不等式约束的个数较少时,计算效率明显提高。本文方法将ICPEIV模型及相应的WTLS理论纳入经典LS理论的框架,是对经典LS理论的有益拓展和补充。

参 考 文 献

- [1] Neitzel F. Generalization of Total Least-Squares on Example of Unweighted and Weighted 2D Similarity Transformation [J]. *Journal of Geodesy*, 2010, 84(12): 751-762
- [2] Akyilmaz O. Total Least Squares Solution of Coordinate Transformation [J]. *Survey Review*, 2007, 39(303): 68-80
- [3] Zhou Y, Fang X. A Mixed Weighted Least Squares and Weighted Total Least Squares Adjustment Method and Its Geodetic Applications [J]. *Survey Review*, 2016, 48(351): 421-429
- [4] Tong X H, Jin Y M, Zhang S L, et al. Bias-Corrected Weighted Total Least-Squares Adjustment of Condition Equations [J]. *Journal of American Surveying Engineering*, 2014, 141(2): 04014013
- [5] Chen Yi, Lu Jue, Zheng Bo. Application of Total Least Squares to Space Resection [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2008, 33(12): 1 271-1 274 (陈义, 陆珏, 郑波. 总体最小二乘方法在空间后方交会中的应用[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2008, 33(12): 1 271-1 274)
- [6] Xu C J, Wang L Y, Wen Y M, et al. Strain Rates in the Sichuan-Yunnan Region Based upon the Total Least Squares Heterogeneous Strain Model from GPS Data [J]. *Terrestrial Atmospheric and Oceanic Sciences*, 2011, 22(2): 133-147
- [7] Fang X. Weighted Total Least Squares: Necessary and Sufficient Conditions, Fixed and Random Parameters [J]. *Journal of Geodesy*, 2013, 87(8): 733-749
- [8] Mahboub V. On Weighted Total Least-Squares for Geodetic Transformations [J]. *Journal of Geodesy*, 2012, 86(5): 359-367
- [9] Shen Y Z, Li B F, Chen Y. An Iterative Solution of Weighted Total Least-Squares Adjustment [J]. *Journal of Geodesy*, 2011, 85(4): 229-238
- [10] Amiri-Simkooei A, Jazaeri S. Weighted Total Least Squares Formulated by Standard Least Squares Theory [J]. *Journal of Geodetic Sciences*, 2012, 2(2): 113-124
- [11] Schaffrin B, Felus Y A. An Algorithmic Approach to the Total Least-Squares Problem with Linear and Quadratic Constraints [J]. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 2009, 53(1): 1-16
- [12] Zhang S L, Tong X H, Zhang K. A Solution to EIV Model with Inequality Constraints and Its Geodetic Applications [J]. *Journal of Geodesy*, 2013, 87(1): 23-28
- [13] Fang X. On Non-combinatorial Weighted Total Least Squares with Inequality Constraints [J]. *Journal of Geodesy*, 2014, 88(8): 805-816
- [14] Xu P L, Liu J N, Shi C. Total Least Squares Adjustment in Partial Errors-in-Variables Models: Algorithm and Statistical Analysis [J]. *Journal of Geodesy*, 2012, 86(8): 661-675
- [15] Shi Y, Xu P L, Liu J N, et al. Alternative Formulae for Parameter Estimation in Partial Errors-in-Variables Models [J]. *Journal of Geodesy*, 2015, 89(1): 13-16
- [16] Zeng W X, Liu J N, Yao Y B. On Partial Errors-in-Variables Models with Inequality Constraints of Parameters and Variables [J]. *Journal of Geodesy*, 2015, 89(2): 111-119
- [17] Chen Baolin. Theory and Algorithm in Optimization

- [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2005 (陈宝林. 最优化理论与算法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005)
- [18] Xie Jian, Long Sichun, Zhou Cui. Optimality Conditions of Inequality Constrained Partial EIV Model and the SQP Algorithm [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2020, 45(7): 1 002-1 007 (谢建, 龙四春, 周璀. 不等式约束 PEIV 模型的最优性条件及 SQP 算法[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2020, 45(7): 1 002-1 007)

Classical Least Squares Method for Inequality Constrained PEIV Model

XIE Jian¹ LONG Sichun¹ ZHOU Cui²

1 Hunan Province Key Laboratory of Coal Resources Clean-Utilization and Mine Environment Protection, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China

2 College of Science, Central South University of Forestry and Technology, Changsha 410018, China

Abstract: Objectives: The inequality constrained partial errors-in-variables (ICPEIV) model is mainly solved by linear approximation method and nonlinear programming algorithms. The linear approximation method is computationally inefficient and the nonlinear programming algorithms are complicated because they are based on optimization theory. The nonlinear programming algorithms are impracticable to apply in surveying fields because the connections between nonlinear programming methods and classical adjustment have not been established. Methods: Under the total least squares (TLS) criterion, the inequality constrained TLS problem is transformed into the quadratic programming according to the Kuhn-Tucker condition. Then an improved Jacobian iteration approach is proposed to solve the quadratic programming. Results: The proposed method does not require the linearization process and has the same form with the classical least squares which is easy to code. Conclusions: The numerical examples show that the proposed method is efficient in computation and concise in form and it is a beneficial extension of classical least squares theory.

Key words: inequality constraint; partial errors-in-variables (PEIV) model; total least squares; Jacobian iteration method; classical least squares

First author: XIE Jian, PhD, specializes in surveying adjustment and data processing. E-mail: hsiejian841006@163.com

Foundation support: The National Natural Science Foundation of China (41704007, 41877283, 42074016).

引文格式: XIE Jian, LONG Sichun, ZHOU Cui. Classical Least Squares Method for Inequality Constrained PEIV Model[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2021, 46(9):1291-1297.DOI:10.13203/j.whugis20190196(谢建, 龙四春, 周璀. 不等式约束 PEIV 模型的经典最小二乘方法[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2021, 46(9):1291-1297.DOI:10.13203/j.whugis20190196)

(上接第 1283 页)

Key words: partial errors-in-variables (PEIV) model; parameter estimation; precision estimation; variance component estimation; extended algorithm

First author: WANG Leyang, PhD, professor, specializes in geodetic inversion and geodetic data processing. E-mail: wleyang@163.com

Foundation support: The National Natural Science Foundation of China (41874001, 41664001).

引文格式: WANG Leyang, ZOU Chuanyi. Review of PEIV Model Parameter Estimation Theory and Its Applications[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2021, 46(9):1-12.DOI:10.13203/j.whugis20200312(王乐洋, 邹传义. PEIV 模型参数估计理论及其应用研究进展[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2021, 46(9):1-12.DOI:10.13203/j.whugis20200312)