

复杂矿体模型多域自适应网格剖分方法

钟德云¹ 王李管¹ 毕 林¹

1 中南大学资源与安全工程学院,湖南 长沙,410083

摘 要:针对轮廓线拼接法在复杂矿体建模时无法处理多域邻接特征的问题,应用 Delaunay 细分方法实现了一种适用于多域复杂矿体的网络剖分方法,不仅可以生成多域表面模型,还可以同时对不同域的矿体进行网格剖分,便于后期进行多域复杂矿体的有限元模拟。该方法通过约束 Delaunay 三角剖分来近似域和曲面,以及在 Delaunay 细分中确保对域的近似精度和对单元的网格质量。在约束 Delaunay 三角剖分的基础上,通过多标签算法对子域进行封装,并对中间域进行分离或通过距离场对中间域进行拟合,修改多域多面体的预测构造方法,实现了对多域多面体的自适应网格剖分方法。对河北省北冶河铁矿复杂矿体建模的试验结果表明,该方法除了可以生成无缝、连续的多域模型之外,通过网格优化还可以生成高质量的四面体和三角网格,避免轮廓线拼接法大量退化和奇异三角形的存在。同时该方法在逆向工程、有限元分析、科学计算可视化等领域中也都具有重要的应用价值。

关键词:矿体建模;多域;Delaunay 细分;自适应;网格剖分

中图分类号:P208;TP391 **文献标志码:**A

在地质建模中,获得具有高质量的符合特征约束的连续网格,以反映现实几何模型的要求和模拟约束的任务具有重要研究价值。在本文所应用的场景中,每种类型矿体代表一种域,多域复杂矿体建模除了需要有效地生成高质量的多分辨率网格,同时要求处理多域邻接特征。

在矿体结构建模中,显式建模在实际应用中仍然十分广泛,该方法通过一系列矿体轮廓线拼接进行三维重建,可以获得严格按轮廓线约束的三维表面实体。对于单一矿体的轮廓线建模,通过人工调整约束线,总可以生成封闭的不自相交的模型。然而,对于多种矿体轮廓线建模,即使调整线框使轮廓线贴合,在轮廓线拼接的过程中在复杂边界处总是会出现各种相交情况,不利于后期储量计算、工程设计和有限元分析等工作。对于生成的表面模型后期仍然需要对多种矿体进行网格剖分操作。一种可选的方法是对多个矿体分别进行布尔运算,人工分离交叉部分。然而在复杂矿体边界处存在大量交叉情况,工作量大且容易出错;同时,对于交叉部分无法进行中间拟合处理。

改进的基于 Delaunay 细分的算法首先被应用于二维曲线的重构^[1],之后被推广到包括平滑表面、多面体结构域、由光滑表面界定的三维域以及由分段光滑表面界定的三维域等的表面重构^[2-8],并得到了可靠的证明^[9]。已有相关研究对 CT 扫描的多域三维灰度图进行了三维重建,并应用于科学计算可视化^[10-11]。

本文应用 Delaunay 细分方法实现了一种适用于多域复杂矿体的网络剖分方法,可以对多种矿体表面模型同时进行网格剖分,利用矿体轮廓线进行特征约束,生成的模型是一种封闭的、没有自相交的和具有多标签的表面网格和体积网格模型。采用改进的多标签细分算法可以对中间域进行分离或通过距离场对中间域进行拟合。最终可以获得具有很好边界拟合特征的分离表面模型,每个子模型之间在边界处很好地贴合在一起。对于体模型,通过去除 sliver,可以获得用于后期模拟的高质量连续体网格,很好地处理了多个表面模型交叉边界网格剖分的问题。

收稿日期:2018-08-06
项目资助:国家重点研发计划(2017YFC0602905);国家自然科学基金(41572317);中南大学中央高校基本科研业务费专项资金(2017zzts183)。
第一作者:钟德云,博士生,主要从事数字矿山方面的研究。deyizhiyun@163.com
通讯作者:毕林,博士,副教授。mr.bilin@163.com

1 多域复杂矿体建模

基于线框模型的矿体建模,大部分已有的研究都基于单一矿体进行建模,对于多域的复杂矿体建模目前没有普遍适用的方法。一般的做法是根据线框类型分别对每个子矿体(子域)建模。这种方法的最大问题是多域之间的邻接问题,即无法处理多个子模型之间的贴合问题,模型之间容易产生交叉和空隙。同时模型结果存在大量退化的三角面片。

以河北省北洛河铁矿多域矿体建模为例,如图 1(a)所示。建模前先对轮廓线进行处理,使相邻子域的轮廓线很好地贴合在一起。然后采用最小表面积法分别对每个子矿体进行连线框建模,每个子矿体都可以形成一个不自相交的封闭矿体,最终生成的多个矿体表面模型如图 1(c)所示。这种多域模型在中间部分往往容易产生复杂的交叉情况,如图 1(d)所示,无法直接应用于后期设计和计算,需要进行后期处理。

同样,多域矿体网格剖分的一般方法是将待剖分的矿体按某种方式人工分解为多个子矿体,然后对每个子矿体分别进行网格剖分。为了避免模型边界的交叉,需要人工分离子矿体的边界面,这种方法无法满足自动网格剖分的要求。

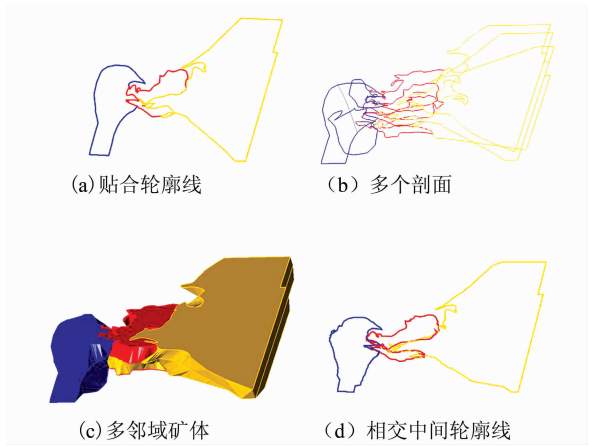


图 1 多域矿体建模存在的问题

Fig. 1 Problems of Multi-domain Orebodies Modeling

2 算法原理与流程

网格划分算法依赖于约束 Delaunay 三角剖分来近似域和曲面,以及在 Delaunay 细分中确保对域的近似精度和对单元的网格质量。

2.1 约束 Delaunay 三角剖分

在表面重建问题中,对于表面 S 上采样的有

限点集 E ,在 E 具有良好采样特征的情况下,希望通过 E 获得对 S 的良好近似的表面模型^[9]。

设 $E = \{p_1, p_2 \cdots p_n\}$ 为定义在三维空间中表面 S 的一组采样点, E 的 Delaunay 三角剖分 $\text{Del}_{|S}(E)$ 是其 Voronoi 图的对偶图。根据空圆性质,在任意两点 p_i 和 p_j 的 Delaunay 三角剖分中,只要它们对应的 Voronoi 单元 $V(p_i)$ 和 $V(p_j)$ 存在非空交集,则在两点 p_i 和 p_j 间存在一条边。

对于三维空间中的输入域 Ω ,其边界为 S ,将 E 限制于域 Ω 的 Delaunay 三角剖分记作 $\text{Del}_{|\Omega}(E)$,是由与域 Ω 相交的对偶 Voronoi 单元的 Delaunay 单纯形组成,即 $\text{Del}(E)$ 的子复形。

以二维情况为例,如图 2 所示,输入域 Ω 可以被细分为几个子域,每个子域由 Ω_i 表示。边界 S 上的采样点为初始采样点。如图 2(c)所示,限制在边界 S 上的 Delaunay 三角剖分由其对偶 Voronoi 边与边界 S 相交的 Delaunay 边组成。同样,如图 2(d)所示,限制在区域 Ω 上的 Delaunay 三角剖分由其外心包含在 Ω 内的 Delaunay 三角形组成。

基于以上分析,已经有相关研究表明,在一定的假设条件下,只要 E 是 Ω 足够密集的采样点集,则 $\text{Del}_{|S}(E)$ 是边界 S 的很好近似, $\text{Del}_{|\Omega}(E)$ 是 Ω 域的很好近似^[9]。这种近似满足拓扑和几何意义上的一致性:在拓扑上, $\text{Del}_{|\Omega}(E)$ 与 Ω 是同胚的;在几何上, $\text{Del}_{|\Omega}(E)$ 与 Ω 的 Hausdorff 距离可以任意小;同时, $\text{Del}_{|\Omega}(E)$ 可以连续近似地趋近于 Ω 的法向和曲率。以上这些性质还可以扩展应用到 \mathbf{R}^d 维空间上^[9, 12-13]。

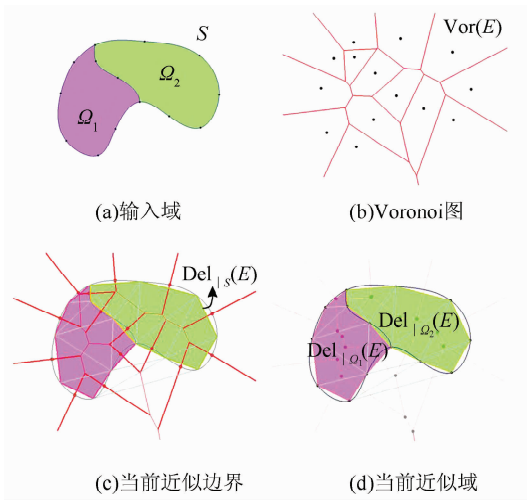


图 2 约束 Delaunay 三角剖分

Fig. 2 Constraint Delaunay Triangulation

2.2 Delaunay 细分与自适应

如上所述,基于 Delaunay 细分的网格剖分算法需要对一组点 $E \in \mathbf{R}^3$ 进行采样,并构建限制在 Ω 上 E 的 Delaunay 三角剖分。然后对该初始集合近似进行细分,细分的终止条件是网格剖分满足用户给出的边界面和四面体质量标准^[14-15]。

边界面的标准:最小角度 α , 用于控制三角面片的形状;最大边长 l , 用于控制三角面片的大小;边界面 facet 与三角面片之间的最大距离 d , 用于控制边界面和细分表面的近似误差,它表示三角面片的外心与相应表面 Delaunay 球中心之间距离的上限。

四面体标准:四面体外接圆半径与最短边长度之比 β , 用于控制四面体单元的现状(除了 sliver);最大边长度 L , 用于控制四面体单元的大小。

因此,网格细分标准由如上所述的 5 个参数 (α, l, d, β, L) 给出。对于 $f \in \text{Del}_{|S}(E)$, 不满足边界面标准的三角面片为坏的三角面片。对于 $t \in \text{Del}_{|Q}(E)$, 不满足四面体标准的四面体为坏的四面体。

Delaunay 细分阶段,主要是根据网格细分标准 (α, l, d, β, L) 对点集进行增量构造。当它们不满足相应标准时,在 $\text{Del}_{|Q}(P)$ 和 $\text{Del}_{|S}(P)$ 中的元素被认为是坏的。细化过程中通过计算并插入新的顶点(Steiner 点)以删除这些坏的元素,直到所有元素满足质量标准。

坏的三角面片 f 的 Steiner 点:是三角面片 f 的表面 Delaunay 球 $\text{SDB}(f)$ 的球心,如果有多个球,则是其中一个球的球心。

坏的四面体单元 t 的 Steiner 点:是四面体单元 t 的外接球球心。

基于 Delaunay 细分增量构造的特点,为了在感兴趣的区域产生密集网格,用户可自定义自适应尺寸场,构造统一或非均匀的标量场。

对于多域网格剖分,为了突出对某些子域的关注,有时需要获得对特定子域的密集网格,构造一种基于子域标签的自适应尺寸场,可以对不同子域分配不同网格细分标准。

对于单纯的表面重建,为了突出对子域边界的关注,有时需要获得尺寸逐步减小的分级网格,构造一种基于边界距离的距离场的自适应尺寸场,可以获得在边界密集细分而内部逐级细分的网格。

2.3 边界特征保护

一般的 Delaunay 细化算法无法保证边界中具有特征边和角的邻域,容易造成局部区域失真。

如果直接将特征边和角作为约束进行约束剖分,则在具有较小二面角的边界面附近可能造成细分过程无法终止。然而,文献[16-18]证明,如果特征边被保护球保护,则 Delaunay 细分具有可证明的终止条件。

边界特征保护的基本思想是:在进行 Delaunay 细化之前,对输入域的一维和零维特征进行采样,用保护球的方式对特征进行采样和保护。然后使用加权 Delaunay 三角剖分法进行 Delaunay 细化,保护球作为初始采样点集。

在进行特征保护时,首先保留所有特征角,再按用户指定的密度对特征边进行采样。一般特征边上两个采样点之间的距离不大于三角面片的最大边长度 l 。将每个保护球 $b = (p, r)$ 变成加权点 (p, r) , 并插入到初始点集合 E 中。Delaunay 三角剖分变为加权 Delaunay 三角剖分,其中欧几里德距离由加权距离代替。

保护球和加权 Delaunay 三角剖分保证了两个重要的性质。首先,任何受保护边上的两个相邻点之间的线段保持与限制的 Delaunay 边相连。其次,由于算法永远不会尝试在保护球的联合中插入一个细化点,可以确保细化过程的终止。

2.4 网格优化

细化过程结束后,所有元素均满足用户设定的边界面和四面体标准,消除了退化四面体中除 sliver 之外的所有形状不好的四面体^[19-21]。因此,需要使用移除 sliver 算法从网格中去除具有较小二面角(条子)的退化四面体,进行网格优化。需要注意的是,边界面标准中采用了最小角度 α 控制三角面片的形状,在表面重建中一般不存在退化的三角面片。

需要进行移除 sliver 过程的主要原因是,用于控制四面体形状的标准 β 可以处理除了 sliver 四面体外任意具有较大半径-边比的准退化四面体。sliver 是一种 4 个顶点靠近一个平面的四面体,并且其对该平面的正交投影是没有短边的凸四边形。sliver 在三维 Delaunay 三角剖分中是很常见的,甚至对于间隔很好的点集也是如此。虽然 sliver 具有较小的半径-边比,但其纵横比仍然较大,因此其相应四面体单元的形状质量较差。如图 3 所示,在 4 种顶点近似共面、形状质量较差的四面体单元中如 wedge、spade、cap、sliver 等,其中 sliver 是唯一一类不具有大的半径-边比的准退化四面体。

网格优化过程就是要处理具有较小二面角的四面体,以便消除 sliver,改善四面体单元二面角

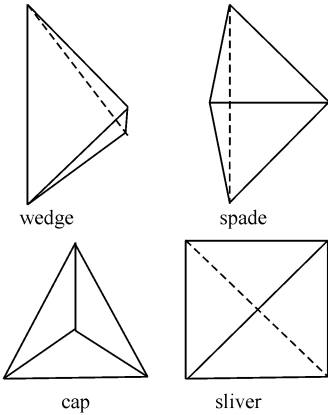


图 3 4 种顶点近似共面形状质量较差四面体单元
Fig. 3 Four Types of Tetrahedron Cells with
Approximate coplanar vertices and poor quality

的分布。网格优化一般分为全局优化和局部优化^[22],全局优化可以大大减少所有 sliver 的总数,而局部优化则更关注于质量最差的四面体单元。本文采用一种称为条子渗出^[21]的算法,算法的基本思想是将 Delaunay 三角剖分变为加权的 Delaunay 三角剖分,其目的是通过用最佳权重重新加权网格顶点来移除 sliver,所述最佳权重触发组合变化,从而诱导条子渗出。如果 Delaunay 三角剖分具有如文献[23]中的比率属性,那么有一个权重的分配,使加权 Delaunay 三角剖分不包含 sliver。

基于以上思想,在 Delaunay 细化结束之后,采用以上条子渗出的后处理步骤,对四面体单元进行网格优化。其好处是不会影响已经建立好的表面模型,只处理域内的四面体单元。同时,该方法不会产生任何新的顶点,也不移动任何已有的顶点,避免对按当前标准细分的结果产生较大影响。该方法在实践中效果显著,可以生成几乎没有 silver 的四面体网格单元。

2.5 多域标签算法改进

基于以上分析,单域网格划分算法总体上包括 3 个主要阶段:初始化阶段、Delaunay 细分阶段和优化阶段。本文所实现的算法在单域网格剖分算法的基础上,通过标签对子域进行封装,并对中间域进行分离或通过距离场对中间域进行拟合,从而适应复杂矿体多域网格剖分问题。

将多域网格剖分考虑成一种多标签特征函数 $F:Z^3 \rightarrow J$,其中 $J = \{0,1,2\cdots n\}$ 是一组标签,0 表示空隙,1,2 \cdots n 表示不同多面体子域的标签。每个标签 i 对应相应子域的特征函数 $f_i:Z^3 \rightarrow \{0,1\}$,如果 $F(p) = i$,则 $f_i(p) = 1$,否则 $f_i(p) = 0$ 。

在多域网格剖分中,如果存在点 p 在多个子

域的特征函数中满足 $f_i(p) = 1$,此时多标签特征函数 $F(p)$ 的取值存在二义性,则该点对应中间域。中间域的点在三角面片中对应不同子域的边界,在四面体单元中对应不同子域的相交区域。为了消除多标签特征函数的二义性,通过修改特征函数 $F(p)$ 标签的方法,将子标签分配给父标签进行域分离,或通过距离场计算拟合中间域,使得 $F(p) = i$,保证标签的唯一性,从而达到多域网格剖分的目的。

初始化阶段对多域表面模型的每个子域进行初始点采样。如果需要进行边界特征保护,则把特征点加入初始点集中,对初始点集进行初始 Delaunay 三角剖分。

Delaunay 细化阶段包括两个步骤:表面网格步骤和体积网格步骤。表面网格步骤处理坏的三角面片,并将 Steiner 点添加到表面上,直到所有三角面片满足标准。体积网格步骤处理坏的四面体单元,并将 Steiner 点添加到域内或表面上,直到所有四面体单元满足标准。Delaunay 细分算法具体过程描述如下:

```
while 存在坏的三角面片或坏的四面体 do
    if 存在坏的三角面片,then
        令  $f$  为质量最差的三角面片
        令  $p$  为坏的三角面片  $f$  的 Steiner 点
        将  $p$  插入采样点集  $E$  中
    else 存在坏四面体单元  $t$ 
        令  $c$  为质量最差的四面体单元  $t$  的外接球球心
        if 存在坏的三角面片  $f$ ,其表面 Delaunay 球包含  $c$ , then
            令  $p$  为坏四面体单元  $t$  的 Steiner 点
            将  $p$  插入采样点集  $E$  中
        else
            直接将  $c$  插入采样点集  $E$  中
    end if
end if
更新 Del( $E$ )
end while
```

优化阶段的目的是改善四面体二面角的分布,以获得良好质量的网格。

基于以上分析,在算法的任何步骤, $Del_{|S}(E)$ 是表面 S 的当前近似, $Del_{|\Omega}(E)$ 是域 Ω 的当前近似。以两个相交球为例,如图 4 所示,在单域的情况下,在 Delaunay 细分结束时, $Del_{|S}(E)$ 是 $Del_{|\Omega}(E)$ 的边界;在多域的情况下,两个相邻四面体的三角形可能来自属于

$Del_{|S}(E)$ 的不同子域,不同子域类型通过标签进行区分。对于相交部分域,可以通过修改标签的方法,将子标签分配给父标签进行域分离,也可以通过距离场计算拟合中间部分域。假设红色材质为 $f_1(p) \rightarrow \{0,1\}$,绿色材质为 $f_2(p) \rightarrow \{0,1\}$,多标签特征函数 $F(p) \rightarrow \{0,1,2\}$ 。对于图 5 中的相交部分, $f_1(p) = 1$ 且 $f_2(p) = 1$,若取 $F(p) = 1$,则为图 5(a);若取 $F(p) = 2$,则为图 5(b);若按距离对 $F(p)$ 进行取值,则为图 5(c)。

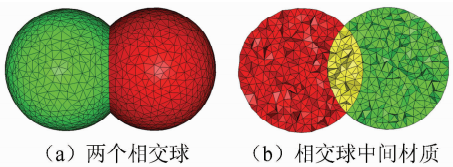


图 4 多标签网格剖分
Fig. 4 Multi-label Triangulation

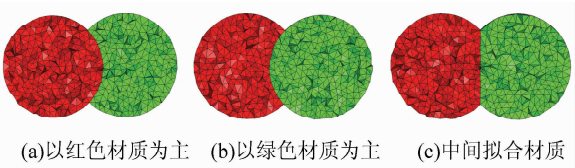


图 5 中间域的几种处理方式

Fig. 5 Several Processing Ways of the Intermediate Material

3 算法分析和应用

CGAL (computational geometry algorithm library)是一种高效可靠的计算几何算法库,本文在 CGAL 网格剖分的基础上^[22],通过修改多域多面体的预测构造方法,用于回答空间任一点是否在域内,以及属于哪一个子域,并分配相应子域的标签,实现了对多域多面体的表面重建,并将其应用于多域复杂矿体自适应网格剖分方法。

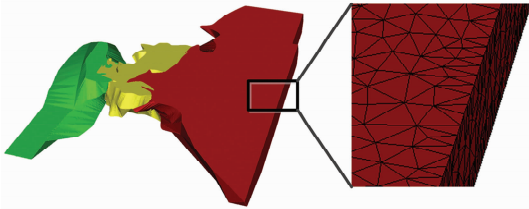
表 1 不同细化标准下算法的计算性能

Tab. 1 Computational Performance of the Algorithm in Different Refinement Criteria

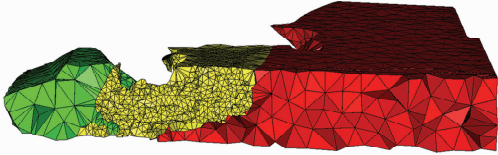
(α, l, d, L)	特征尺寸/m	顶点数	面片数	四面体数	细分耗时/s	优化耗时/s	总共耗时/s
(25,50,5,50)	50	4 342	18 006	12 135	4.5	3.7	21.5
(25,40,2,20)	20	7 990	30 914	26 871	7.9	6.6	25.7
(25,10,1,5)	5	107 396	136 518	560 395	17.4	77.9	114.7
(25,3,0.3,3)	3	479 823	478 580	2 698 969	59.8	78.8	149.5

将子标签分配给父标签进行域分离。以北洛河铁矿多域矿体建模为例,采用传统的显式建模方法容易产生复杂的交叉情况,造成模型的二义性;而采用本文的多域自适应网格剖分方法则可以保证子域模型之间良好的邻接特征,结果如图 8 所示。多域矿体剖分不再相交,中间域被很好地分离开

本文以北洛河铁矿多域矿体建模为例,采用所实现的多域自适应网格剖分方法来处理模型子域间存在大量交叉和空隙的问题。为了保持矿体的边界特征,在 Delaunay 细分前,将矿体建模轮廓线作为特征约束线进行初始特征采样保护。如图 6(a)所示,通过赋予轮廓线约束,可以构建完全与轮廓线相吻合的具有尖角等特征约束的网格模型。如图 6(b)所示,为了突出对某种子矿体的关注,通过对不同矿体类型分配不同的网格细分标准,可以获得在特定子域上的密集网格。



(a) 边界特征保护



(b) 网格尺寸自适应

图 6 特征保护与自适应网格剖分

Fig. 6 Feature Protection and Adaptive Meshing

用于算法性能测试的运行环境为 Windows64 位的 PC,处理器类型为 Intel(R) Core(TM) i7-5820K CPU,时钟频率为 3.30 GHz,具有 16 GB RAM。选取 § 2.2 所述不同的网格细分参数 (α, l, d, L) ,即边界面最小角度 α 、边界面最大边长 l 、边界面与三角面片之间的最大距离 d 、四面体最大边长 L 。不同细化标准下算法的计算性能如表 1 所示,相应矿体剖分结果如图 7 所示。

对于相交部分域,可以通过修改标签的方法,

来,避免了复杂边界处的交叉情况。实际上,该方法具有很大的灵活性,可以处理多种输入源的组合数据,比如隐式函数、三维灰度图、三维图像等,只需要构造一个预测方法,用于回答空间任一点是否在域内,以及如果在域内,则属于哪一个子域。

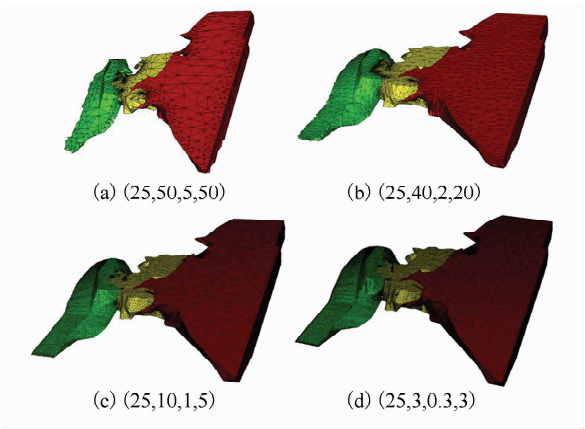


图 7 不同细分标准下网格剖分结果
Fig. 7 Meshing Results in Different Refinement Criteria

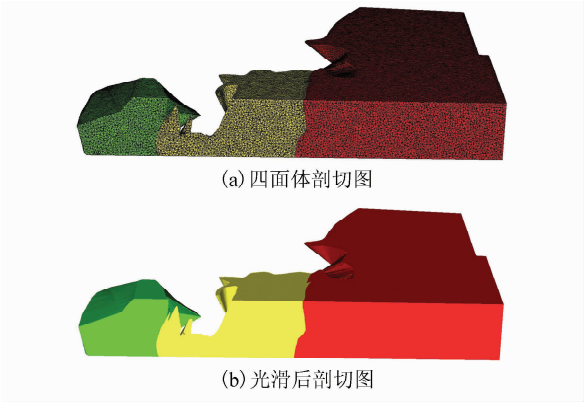


图 8 多域矿体剖分结果
Fig. 8 Meshing Results of Multi-domain Orebodies

4 结 语

本文在 Delaunay 细分算法的基础上,通过修改多域多面体的预测构造方法,对中间域进行分离或通过距离场对中间域进行拟合,应用 Delaunay 细分方法实现了一种适用于多域复杂矿体的网格剖分方法。

该方法既可以用于处理多种矿体建模存在的边界交叉问题,也可以用于处理多域自适应网格剖分问题。同时,通过对矿体轮廓线进行特征约束,可以获得与轮廓线完全吻合的网格剖分结果;通过定义统一或非均匀的自适应尺寸场,可以获得感兴趣区域的密集网格。基于 Delaunay 细分的多域网格剖分方法,除了可以生成无缝、连续的多域模型之外,通过网格优化还可以生成高质量的四面体和三角网格,避免轮廓线拼接法大量退化和奇异三角形的存在。

该方法在逆向工程、有限元分析、科学计算可视化等领域中也都具有重要的参考价值。今后需要进一步研究的内容包括:复杂边界特征自动检

测与保护,对交叉介质和空隙介质的进一步参数化拟合以及算法性能的进一步提升等。

参 考 文 献

[1] Amenta N, Bern M, Eppstein D. The Crust and the β -Skeleton: Combinatorial Curve Reconstruction [J]. *Graphical Models and Image Processing*, 1998, 60: 125-135

[2] Cheng S W, Dey T K, Levine J A. A Practical Delaunay Meshing Algorithm for a Large Class of Domains [C]. The 16th International Meshing Roundtable, Berlin, Germany, 2008

[3] Chew L P. Guaranteed-Quality Mesh Generation for Curved Surfaces [C]. The 9th Annual Symposium on Computational Geometry, New York, USA, 1993

[4] Nave D, Chrisochoides N, Chew L P. Guaranteed-Quality Parallel Delaunay Refinement for Restricted Polyhedral Domains [J]. *Computational Geometry Theory & Applications*, 2004, 28(2-3): 191-215

[5] Boivin C, Ollivier-Gooch C. Guaranteed-Quality Triangular Mesh Generation for Domains with Curved Boundaries [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2010, 55(10): 1 185-1 213

[6] Chew L P. Guaranteed-Quality Triangular Meshes [D]. New York: Cornell University, 1989

[7] Rineau L, Yvinec M. Meshing 3D Domains Bounded by Piecewise Smooth Surfaces [C]. The 16th International Meshing Roundtable, Berlin, Germany, 2008

[8] Amenta N, Bern M. Surface Reconstruction by Voronoi Filtering [J]. *Discrete & Computational Geometry*, 1999, 22(4): 481-504

[9] Boissonnat J D, Oudot S. Provably Good Sampling and Meshing of Surfaces [J]. *Graphical Models*, 2005, 67(5): 405-451

[10] Boltcheva D, Yvinec M, Boissonnat J D. Feature Preserving Delaunay Mesh Generation from 3D Multi-material Images [J]. *Computer Graphics Forum*, 2009, 28(5): 1 455-1 464

[11] Boltcheva D, Yvinec M, Boissonnat J D. Mesh Generation from 3D Multi-material Images [J]. *Med Image Comput Comput Assist Interv*, 2009, 12(2): 283-290

[12] Cohen-Steiner D, Morvan J M. Restricted Delaunay Triangulations and Normal Cycle [C]. The 19th Annual Symposium on Computational Geometry, New York, USA, 2003

[13] De Floriani L, Spagnuolo M. Shape Analysis and

Structuring[M]. Berlin: Springer, 2008

[14] Ruppert J. A Delaunay Refinement Algorithm for Quality 2-Dimensional Mesh Generation[J]. *Journal of Algorithms*, 1995, 18(3): 548-585

[15] Miller G L, Pav S E, Walkington N J, et al. Fully Incremental 3D Delaunay Refinement Mesh Generation[C]. The 11th International Meshing Roundtable, Ithaca, NY, USA, 2002

[16] Cheng S W, Dey T K, Ramos E A. Delaunay Refinement for Piecewise Smooth Complexes[J]. *Discrete & Computational Geometry*, 2010, 43(1): 121-166

[17] Oudot S, Rineau L, Yvinec M. Meshing Volumes Bounded by Smooth Surfaces[C]. The 14th International Meshing Roundtable, Berlin, Germany, 2005

[18] Cheng S W, Dey T K, Levine J A. A Practical Delaunay Meshing Algorithm for a Large Class of Domains [C]. The 16th International Meshing Roundtable, Seattle, Washington, USA, 2008

[19] Edelsbrunner H, Guoy D. An Experimental Study of Sliver Exudation[J]. *Engineering with Computers*, 2002, 18(3): 229-240

[20] Tournois J, Srinivasan R, Alliez P. Perturbing Slivers in 3D Delaunay Meshes[C]. The 18th International Meshing Roundtable, Berlin, Germany, 2009

[21] Cheng S W, Dey T K, Edelsbrunner H, et al. Sliver Exudation[J]. *Journal of the ACM*, 2000, 47(5): 883-904

[22] Rineau L, Yvinec M. A Generic Software Design for Delaunay Refinement Meshing[J]. *Computational Geometry*, 2007, 38(1-2): 100-110

[23] Miller G L, Talmor D, Teng S H, et al. A Delaunay Based Numerical Method for Three Dimensions: Generation, Formulation, and Partition[J]. *Antimicrobial Agents & Chemotherapy*, 1999, 43(10): 2 412-2 416

Adaptive Meshing of Multi-domain Complex Orebody Models

ZHONG Deyun¹ WANG Liguan¹ BI Lin¹

¹ School of Resources and Safety Engineering, Central South University, Changsha 410083, China

Abstract: In order to solve the problem of multi-domain adjacency in the modeling of complex orebodies, we implemented an adaptive meshing method for complex orebodies based on the Delaunay refinement method, which could generate multi-domain surface models and volume models for the finite element simulation in the later stage. The method relies on the constraint Delaunay triangulation to approximate the domain and the surface, and the Delaunay refinement to ensure the approximate accuracy of the domain and the grid quality of the cell. On the basis of constraint Delaunay triangulation, the multi-domain polyhedron method of prediction was constructed by separating the intermediate domain or fitting the intermediate domain by distance field. The method of adaptive meshing of multi-domain was implemented. Experimental tests of Beiminghe Iron Mine show that the method can generate a seamless and continuous multi-domain model with high-quality tetrahedral and triangular meshes by mesh optimization. And it can avoid many degraded and singular triangles by contour-matching. It is significant to apply this method in the reverse engineering, finite element analysis, scientific computing visualization and other fields.

Key words: orebody modeling; multi-domain; Delaunay refinement; adaptive; meshing

First author: ZHONG Deyun, PhD candidate, specializes in the theories and methods of digital mine. E-mail: deyizhiyun@163.com

Corresponding author: BI Lin, PhD, associate professor. E-mail: mr.bilin @163.com

Foundation support: The National Key Research and Development Program of China. No. 2017YFC0602905; the National Natural Science Foundation of China, No. 41572317; the Fundamental Research Funds for the Central Universities of Central South University, No. 2017zzts183.