



# 附有相对权比的加权总体最小二乘联合平差方法

王乐洋<sup>1,2</sup> 余航<sup>2,3</sup>

1 山东科技大学测绘科学与工程学院,山东 青岛,266590

2 东华理工大学测绘工程学院,江西 南昌,330013

3 中国矿业大学环境与测绘学院,江苏 徐州,221116

**摘要:**采用不同类数据联合平差时,不仅观测向量含有误差,其对应的系数矩阵也通常受到误差的影响。将加权总体最小二乘方法应用于多类观测数据的联合平差模型,推导相应迭代计算方法,以相对权比权衡各类数据参与联合平差的比重。设计了多种方案,并给出了确定相对权比的判别函数最小化方法。结果表明,验前单位权方差法与总体最小二乘方差分量估计方法具有一定的局限性,当验前信息不准确或者总体最小二乘

方差分量估计方法不可估时,判别函数为 $\sum_{i=1}^{n_1} |\hat{e}_{1i}| + \sum_{j=1}^{n_2} |\hat{e}_{2j}|$ 的判别函数最小化法能取得较优的参数估值结果。

**关键词:**加权总体最小二乘;联合平差;相对权比;判别函数

**中图分类号:**P207

**文献标志码:**A

联合平差方法采用大地测量和地球物理等观测数据处理联合反演中解的非唯一性问题<sup>[1]</sup>,其反演结果的好坏直接反映数据处理方法的可行性<sup>[2]</sup>。空间数据的种类逐渐多样化<sup>[3]</sup>,为了合理地利用各数据的有效信息,需要利用不同类或同类数据中的多源观测数据进行联合平差。联合平差方法区别于单一数据平差,需对观测数据的量纲进行归一化,同时还需合理地确定参与联合平差中各类观测数据的比重<sup>[4]</sup>。因此,相对权比的确定是联合平差方法是否可行的基础。文献[5]利用位移和最大主应力方向两类观测资料,把相对权比作为待定参数与其他参数联合反演;文献[6]探讨了相对权比对联合反演模型空间的影响;文献[7]提出了求解联合反演问题的两步法,探讨了相对权比对联合平差模型参数估值的影响;文献[8]在赫尔默特公式的基础上,推导了多类观测数据联合平差的序贯算法;文献[9]联合全球定位系统与地震矩张量数据反演地壳运动速度场及应变率场,综合分析了确定相对权比的方法在实际问题中的应用。然而,Gauss-Markov模型假定函数模型已知、非随机,且仅观

测向量包含随机误差<sup>[10]</sup>。对于许多平差模型而言,由于观测误差、模型线性化等原因,系数矩阵通常含有误差<sup>[11-16]</sup>,其影响在一定程度上不可忽略<sup>[17]</sup>。因此,应当考虑变量含误差(errors-in-variables, EIV)模型,并采用加权总体最小二乘(weighted total least squares, WTLS)方法求解。文献[18]推导了一种总体最小二乘联合平差方法,然而推导均在等权假设的条件下进行;文献[19-21]从方差分量估计的角度给出了不同的总体最小二乘方差分量估计方法,当多余观测数据不足或方差分量初始值给定不准确时,其方差分量往往不可估<sup>[22]</sup>。

本文推导了附有相对权比的WTLS联合(WTLS joint, WTLS-J)平差方法,探讨了采用不同判别函数最小化法确定相对权比的方案,并对多种确定相对权比的方法进行了对比和分析。

## 1 附有相对权比的加权总体最小二乘联合平差方法

在有两组不同类的观测数据的情况下,联合平差的EIV函数模型为:

收稿日期:2018-10-30

项目资助:国家自然科学基金(41874001,41664001,41204003);江西省杰出青年人才资助计划(20162BCB23050);国家重点研发计划(2016YFB0501405);江西省教育厅科技项目(GJJ150595)。

第一作者:王乐洋,博士,教授,主要研究方向为大地测量反演及大地测量数据处理。wleyang@163.com

$$\begin{cases} (B_1 + E_{B_1})X = y_1 + e_{y_1} \\ (B_2 + E_{B_2})X = y_2 + e_{y_2} \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $y_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times 1}$  和  $y_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times 1}$  分别为第 I 类和第 II 类数据的观测向量;  $e_{y_1}$  和  $e_{y_2}$  为对应观测向量的随机误差;  $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times m}$  和  $B_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times m}$  分别为第 I 类和第 II 类数据的观测方程系数矩阵;  $E_{B_1}$  和  $E_{B_2}$  为对应系数矩阵的误差矩阵;  $X \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  为  $m \times 1$  待估参数向量。

联合平差的随机模型为:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} e_{y_1} \\ e_{B_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{y_1} \\ \text{vec}(E_{B_1}) \end{bmatrix} \sim N \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \sigma_{01}^2 \begin{bmatrix} Q_{y_1} & 0 \\ 0 & Q_{B_1} \end{bmatrix} \right) \\ \begin{bmatrix} e_{y_2} \\ e_{B_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{y_2} \\ \text{vec}(E_{B_2}) \end{bmatrix} \sim N \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \sigma_{02}^2 \begin{bmatrix} Q_{y_2} & 0 \\ 0 & Q_{B_2} \end{bmatrix} \right) \end{cases} \quad (2)$$

式中,  $e_{B_1}$  和  $e_{B_2}$  是将  $E_{B_1}$  和  $E_{B_2}$  按列拉直得到的向量;  $\sigma_{01}^2$ 、 $\sigma_{02}^2$  分别为第 I 类及第 II 类观测数据的单位权方差;  $Q_{y_1}$ 、 $Q_{B_1}$ 、 $Q_{y_2}$  和  $Q_{B_2}$  分别为对应观测向量误差和系数矩阵误差的协因数矩阵;  $\text{vec}(\cdot)$  表示矩阵拉直运算。

对式(1)变形可得:

$$\begin{cases} \bar{e}_1 = \begin{bmatrix} I_{n_1} & -X^T \otimes I_{n_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{y_1} \\ e_{B_1} \end{bmatrix} \\ \bar{e}_2 = \begin{bmatrix} I_{n_2} & -X^T \otimes I_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{y_2} \\ e_{B_2} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3)$$

式中,  $\otimes$  表示 Kronecker 积;

$$\begin{cases} \bar{e}_1 = B_1 X - y_1 \\ \bar{e}_2 = B_2 X - y_2 \end{cases} \quad (4)$$

根据式(3),由协因数传播律,得  $\bar{e}_1$  和  $\bar{e}_2$  的协因数阵为:

$$\begin{aligned} Q_{\bar{e}_1} &= \begin{bmatrix} I_{n_1} & -X^T \otimes I_{n_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{e_1} & 0 \\ 0 & Q_{B_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_1} \\ -X \otimes I_{n_1} \end{bmatrix} = \\ & Q_{e_1} + (X^T \otimes I_{n_1}) Q_{B_1} (X \otimes I_{n_1}) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} Q_{\bar{e}_2} &= \begin{bmatrix} I_{n_2} & -X^T \otimes I_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{e_2} & 0 \\ 0 & Q_{B_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_2} \\ -X \otimes I_{n_2} \end{bmatrix} = \\ & Q_{e_2} + (X^T \otimes I_{n_2}) Q_{B_2} (X \otimes I_{n_2}) \end{aligned} \quad (6)$$

令  $\hat{e}_1$  为  $\bar{e}_1$  的平差值,  $\hat{e}_2$  为  $\bar{e}_2$  的平差值,  $\hat{X}$  为  $X$  的平差值,将  $\hat{X}$  代入  $Q_{e_1}$  及  $Q_{e_2}$  中得  $Q_{\hat{e}_1}$  和  $Q_{\hat{e}_2}$ 。则附有相对权比的加权总体最小二乘联合平差准则  $\Phi$  为:

$$\Phi = \lambda \hat{e}_1^T Q_{\hat{e}_1}^{-1} \hat{e}_1 + (1 - \lambda) \hat{e}_2^T Q_{\hat{e}_2}^{-1} \hat{e}_2 = \min \quad (7)$$

式中,  $\lambda$  为相对权比,且  $0 < \lambda < 1$ 。

对式(7)求自由极值,可得公式如下:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \hat{X}^T} = \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{X}_1} \quad \dots \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{X}_i} \quad \dots \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{X}_m} \right] \quad (8)$$

式中,  $\hat{X} = [X_1 \quad \dots \quad X_i \quad \dots \quad X_m]^T, i=1, 2, \dots, m$ 。

对于第 I 类观测数据,有:

$$\frac{\partial \lambda \hat{e}_1^T Q_{\hat{e}_1}^{-1} \hat{e}_1}{\partial \hat{X}_i} = 2\lambda \hat{e}_1^T Q_{\hat{e}_1}^{-1} B_{1i} + \lambda \hat{e}_1^T \frac{\partial Q_{\hat{e}_1}^{-1}}{\partial \hat{X}_i} \hat{e}_1 \quad (9)$$

式中,  $B_{1i}$  代表系数矩阵  $B_1$  的第  $i$  列列向量。

式(9)中等式右边第二项有<sup>[15]</sup>:

$$\lambda \hat{e}_1^T \frac{\partial Q_{\hat{e}_1}^{-1}}{\partial \hat{X}_i} \hat{e}_1 = -2\lambda \hat{e}_1^T Q_{\hat{e}_1}^{-1} (\hat{X}^T \otimes I_{n_1}) Q_{B_{1i}} Q_{\hat{e}_1}^{-1} \hat{e}_1 \quad (10)$$

式中,  $Q_{B_{1i}} = [Q_{B_{11}} \dots Q_{B_{12}} \dots Q_{B_{1m}}]$ ,  $Q_{B_{1i}}$  代表  $Q_{B_1}$  中的第  $i$  个  $m n_1 \times n_1$  子块;  $e_i$  为  $n_1 \times 1$  向量,且  $e_i$  中第  $i$  个元素为 1,其余元素均为 0。

所以式(9)等价于:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda \hat{e}_1^T Q_{\hat{e}_1}^{-1} \hat{e}_1}{\partial \hat{X}^T} &= 2\lambda \hat{e}_1^T Q_{\hat{e}_1}^{-1} B_1 - \\ & 2\lambda \hat{e}_1^T Q_{\hat{e}_1}^{-1} (\hat{X}^T \otimes I_{n_1}) Q_{B_1} (I_m \otimes Q_{\hat{e}_1}^{-1} \hat{e}_1) \end{aligned} \quad (11)$$

同理,对应第 II 类观测数据,有:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (1 - \lambda) \hat{e}_2^T Q_{\hat{e}_2}^{-1} \hat{e}_2}{\partial \hat{X}^T} &= 2(1 - \lambda) \hat{e}_2^T Q_{\hat{e}_2}^{-1} B_2 - \\ & 2(1 - \lambda) \hat{e}_2^T Q_{\hat{e}_2}^{-1} (\hat{X}^T \otimes I_{n_2}) Q_{B_2} (I_m \otimes Q_{\hat{e}_2}^{-1} \hat{e}_2) \end{aligned} \quad (12)$$

因此,求目标函数式(7)的自由极值为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{X}^T} &= 2\lambda \hat{e}_1^T Q_{\hat{e}_1}^{-1} B_1 + 2(1 - \lambda) \hat{e}_2^T Q_{\hat{e}_2}^{-1} B_2 - \\ & 2(1 - \lambda) \hat{e}_2^T Q_{\hat{e}_2}^{-1} (\hat{X}^T \otimes I_{n_2}) Q_{B_2} (I_m \otimes Q_{\hat{e}_2}^{-1} \hat{e}_2) - \\ & 2\lambda \hat{e}_1^T Q_{\hat{e}_1}^{-1} (\hat{X}^T \otimes I_{n_1}) Q_{B_1} (I_m \otimes Q_{\hat{e}_1}^{-1} \hat{e}_1) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

式(13)等价于:

$$\begin{aligned} & \lambda B_1^T Q_{\hat{e}_1}^{-1} \hat{e}_1 + (1 - \lambda) B_2^T Q_{\hat{e}_2}^{-1} \hat{e}_2 - \\ & \lambda (I_m \otimes \hat{e}_1^T Q_{\hat{e}_1}^{-1}) Q_{B_1} (\hat{X}^T \otimes I_{n_1}) Q_{\hat{e}_1}^{-1} \hat{e}_1 - \\ & (1 - \lambda) (I_m \otimes \hat{e}_2^T Q_{\hat{e}_2}^{-1}) Q_{B_2} (\hat{X}^T \otimes I_{n_2}) Q_{\hat{e}_2}^{-1} \hat{e}_2 = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

令  $\mu_1 = \lambda (I_m \otimes \hat{e}_1^T Q_{\hat{e}_1}^{-1}) Q_{B_1} (I_m \otimes Q_{\hat{e}_1}^{-1} \hat{e}_1)$ , 且  $\mu_{11} = (1 - \lambda) (I_m \otimes \hat{e}_2^T Q_{\hat{e}_2}^{-1}) Q_{B_2} (I_m \otimes Q_{\hat{e}_2}^{-1} \hat{e}_2)$ , 并将式(4)代入式(14)可得:

$$\begin{aligned} & [\lambda B_1^T Q_{\hat{e}_1}^{-1} B_1 + (1 - \lambda) B_2^T Q_{\hat{e}_2}^{-1} B_2] \hat{X} = \\ & [\lambda B_1^T Q_{\hat{e}_1}^{-1} y_1 + (1 - \lambda) B_2^T Q_{\hat{e}_2}^{-1} y_2 + (\mu_1 + \mu_{11}) \hat{X}] \end{aligned} \quad (15)$$

解法方程(15),得:

$$\hat{X} = [\lambda B_1^T Q_{\hat{e}_1}^{-1} B_1 + (1 - \lambda) B_2^T Q_{\hat{e}_2}^{-1} B_2]^{-1} \cdot [\lambda B_1^T Q_{\hat{e}_1}^{-1} y_1 + (1 - \lambda) B_2^T Q_{\hat{e}_2}^{-1} y_2 + (\mu_1 + \mu_{II}) \hat{X}] \quad (16)$$

同理,对于存在  $k$  种观测数据的一般情况,WTLS-J平差的参数估值为:

$$\hat{X} = [\sum_{i=1}^k \lambda_i B_i^T Q_{\hat{e}_i}^{-1} B_i]^{-1} [\sum_{i=1}^k \lambda_i B_i^T Q_{\hat{e}_i}^{-1} L_i + \sum_{i=1}^k \mu_i \hat{X}] \quad (17)$$

式中,  $\mu_i = \lambda_i (I_m \otimes \hat{e}_i^T Q_{\hat{e}_i}^{-1}) Q_{B_i} (I_m \otimes Q_{\hat{e}_i}^{-1} \hat{e}_i)$ , 且  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ 。

## 2 相对权比 $\lambda$ 的确定

### 2.1 验前单位权方差法

当两类数据的验前单位权方差分别为  $\sigma_{01}^2$  和  $\sigma_{02}^2$  时,验前单位权方差法所确定的权比  $\lambda$  为<sup>[7,9,11]</sup>:

$$(1 - \lambda) / \lambda = \sigma_{01}^2 / \sigma_{02}^2 \quad (18)$$

迭代计算步骤如下:1)由最小二乘联合平差给定初值:  $\hat{X}^{(0)} = [\lambda B_1^T Q_{e_1}^{-1} B_1 + (1 - \lambda) B_2^T Q_{e_2}^{-1} B_2]^{-1} [\lambda B_1^T Q_{e_1}^{-1} y_1 + (1 - \lambda) B_2^T Q_{e_2}^{-1} y_2]$ 。2)由  $\hat{X}^{(i)}$  更新  $Q_{\hat{e}_1}^{(i)}$ 、 $Q_{\hat{e}_2}^{(i)}$ ;3)计算  $\mu_1^{(i)}$ 、 $\mu_{II}^{(i)}$ ;4)由式(16)计算参数估值  $\hat{X}^{(i+1)}$ ;5)重复步骤2)~4),直至  $\|\hat{X}^{(i+1)} - \hat{X}^{(i)}\| < \epsilon$  时,迭代终止。

当  $\sigma_{02}^2 = \sigma_{01}^2 \neq 0$  时,  $\lambda = 0.5$ ,即视第 I 类数据和第 II 类数据在联合平差中所占权重相等。

### 2.2 判别函数最小化法

选定某一步长,让权比  $\lambda$  取遍整个值域区间,并由式(4)至式(6)求得相对应的  $\hat{e}_1$ 、 $\hat{e}_2$  及  $Q_{\hat{e}_1}$  与  $Q_{\hat{e}_2}$ ,从而计算判别函数  $\hat{\Phi}$  的估值为<sup>[7,11]</sup>:

$$\hat{\Phi} = \lambda \hat{e}_1^T Q_{\hat{e}_1}^{-1} \hat{e}_1 + (1 - \lambda) \hat{e}_2^T Q_{\hat{e}_2}^{-1} \hat{e}_2 \quad (19)$$

把  $\hat{\Phi}$  中最小值对应的  $\lambda$  和此  $\lambda$  下的参数估值  $\hat{X}$  作为最终结果。判别函数的形式还可取

$$\hat{e}_1^T Q_{\hat{e}_1}^{-1} \hat{e}_1 + \hat{e}_2^T Q_{\hat{e}_2}^{-1} \hat{e}_2, \sum_{i=1}^{n_1} |\hat{e}_{1i}| + \sum_{j=1}^{n_2} |\hat{e}_{2j}| \text{ 等。}$$

## 3 线性方程组与仿射变换算例

### 3.1 线性方程组算例

设有方程组  $B^{\text{true}} X^{\text{true}} = L^{\text{true}}$ , 且有  $B^{\text{true}} = [(B_1^{\text{true}})^T (B_2^{\text{true}})^T]^T$ ,  $L^{\text{true}} = [(L_1^{\text{true}})^T (L_2^{\text{true}})^T]^T$ , 其中  $B_1^{\text{true}}$ 、 $L_1^{\text{true}}$  和  $B_2^{\text{true}}$ 、 $L_2^{\text{true}}$  分别代表为第 I、II 类平差数

据的系数矩阵和观测向量真值,对应数据见表 1 和表 2,且令  $X^{\text{true}} = [X_1 \ X_2 \ X_3]^T = [1 \ 1 \ 1]^T$ 。现对第 I、II 类平差数据的观测向量真值  $L_1^{\text{true}}$  和  $L_2^{\text{true}}$  分别加入服从正态分布  $N(0, \sigma_{01}^2 P_{L_1}^{-1})$  ( $\sigma_{01}^2 = 3$ )、 $N(0, \sigma_{02}^2 P_{L_2}^{-1})$  ( $\sigma_{02}^2 = 1$ ) 的随机误差,对系数矩阵真值  $B_1^{\text{true}}$  和  $B_2^{\text{true}}$  分别加入服从正态分布  $N(0, \sigma_{01}^2 P_{B_1}^{-1})$ 、 $N(0, \sigma_{02}^2 P_{B_2}^{-1})$  的随机误差,其中  $P_{L_1}$ 、 $P_{L_2}$ 、 $P_{B_1}$  和  $P_{B_2}$  为对角阵,分别代表  $L_1^{\text{true}}$ 、 $L_2^{\text{true}}$ 、 $B_1^{\text{true}}$  和  $B_2^{\text{true}}$  的权阵。 $P_{L_1}$ 、 $P_{L_2}$ 、 $P_{B_1}$  和  $P_{B_2}$  的对角线元素见表 1、表 2 右半部分,其值分别对应各自表中第 I 或 II 类数据系数矩阵误差和观测向量误差各元素的权值。

表 1 第 I 类数据系数矩阵、观测向量及对应权值

Tab. 1 Coefficient Matrix, Observation Vector and Corresponding Weights of Group I

$B_1^{\text{true}}$	$L_1^{\text{true}}$	$B_1^{\text{true}}, L_1^{\text{true}}$ 各元素误差对应权值			
2.0	-5.2	3.1	-0.1	100	1
3.6	4.5	-2.9	5.2	90	2
-1.5	6.8	3.4	8.7	80	3
4.0	7.3	-9.1	2.2	80	5
6.71	-3.3	-4.5	-1.09	70	7
7.1	2.4	-3.7	5.8	75	10
8.4	-5.5	3.6	6.5	80	20

表 2 第 II 类数据系数矩阵、观测向量及对应权值

Tab. 2 Coefficient Matrix, Observation Vector and Corresponding Weights of Group II

$B_2^{\text{true}}$	$L_2^{\text{true}}$	$B_2^{\text{true}}, L_2^{\text{true}}$ 各元素误差对应权值			
10.4	12.7	-5.8	17.3	60	10
-5.5	-7.6	-2.1	-15.2	50	20
8.2	4.5	-9.0	3.7	50	30
-4.2	-2.3	8.6	2.1	40	30
-2.3	11.5	4.0	13.2	40	35
7.4	3.6	-4.2	6.8	10	35
9.1	-7.1	2.0	4.0	7	40
11.5	-9.8	2.4	4.1	200	300
-0.5	6.77	-5.3	0.97	300	450
12.4	-6.6	-5.0	0.8	750	500

模拟试验 100 次,各方案如下:①  $\lambda = 1$ ,第 I 类数据的 WTLS 平差;②  $\lambda = 0$ ,第 II 类数据的 WTLS 平差;③  $\lambda = 0.5$ ,WTLS-J 平差法;④ 验前单位权方差法,由  $(1 - \lambda) / \lambda = \sigma_{01}^2 / \sigma_{02}^2$  确定  $\lambda$  值;⑤ Amiri-Simkooei 方法<sup>[19]</sup>;⑥  $\hat{\Phi} = \lambda \hat{e}_1^T Q_{\hat{e}_1}^{-1} \hat{e}_1 + (1 - \lambda) \hat{e}_2^T Q_{\hat{e}_2}^{-1} \hat{e}_2$  的判别函数最小化法;⑦  $\hat{\Phi} =$

$\hat{e}_1^T Q_{\hat{e}_1}^{-1} \hat{e}_1 + \hat{e}_2^T Q_{\hat{e}_2}^{-1} \hat{e}_2$  的判别函数最小化法; ⑧  $\hat{\Phi} =$

$\sum_{i=1}^{n_1} |\hat{e}_{1i}| + \sum_{j=1}^{n_2} |\hat{e}_{2j}|$  的判别函数最小化法。对于方案

⑥, 按步长 0.001 遍历整个取值区间,  $\lambda \in (0, 1)$  ( $\lambda$  不取 0 和 1<sup>[7]</sup>)。但试验发现, 步长取值为 0.001 时已足够满足精度的需求。每模拟一次随机误差, 计算区间内各  $\lambda$  对应的参数估值和差值范数, 取 100 次试验后参数估值和差值范数的均值作为最终结果<sup>[18]</sup>, 见表 3, 其中  $\|\Delta \hat{X}\|$  表示模型参数平差结果与真值差值的范数。判别函数值与相对权比间的关系如图 1 所示。

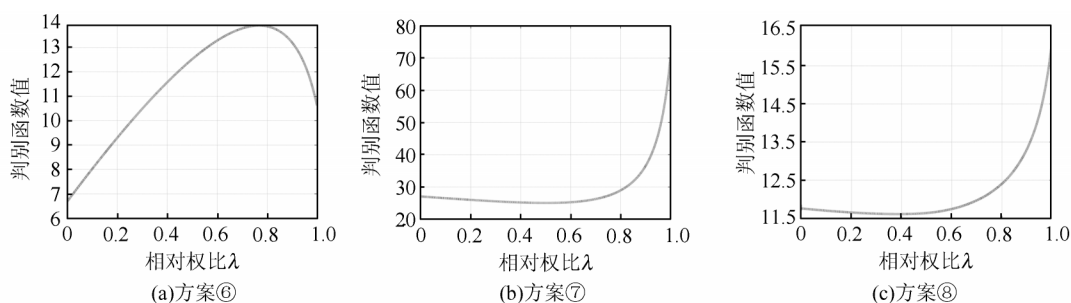


图1 §3.1中算例各判别函数与相对权比的关系图

Fig. 1 Relationship Between Discriminate Function and Weight Scaling Factor of Example in §3.1

由表 3 可知,  $\lambda$  的验前单位权方差法 (方案④) 的计算结果最优, 这与理论情况相符。因为模拟试验中, 两类数据的验前单位权方差直接假定为模拟的真试验前单位权方差, 其对应  $\lambda = \sigma_{02}^2 / (\sigma_{01}^2 + \sigma_{02}^2) = 0.25$  为理论权比。在实际情况下, 各类数据的验前单位权方差很难准确已知, 若数据本身精度较差, 采用方案④确定的相对权比将与实际的权比不符。由于数据量相对较小, 数据精度相对较低, 第 I 组单一数据的 WTLS 结果 (方案①) 是各方案中最差的。而采用方案②的第 II 组数据的 WTLS 结果较之方案①有了较大的提高。方案③采用各类数据等权比的 WTLS-J 方法, 结果又有了一定的提高。方案⑤采用文献 [19] 中的 TLS 方差分量估计方法, 计算结果接近理论权比值 (其相对权比可由各类数据的方差估值转换得到)。方案⑥的判别函数确定的权比大小为 0.001, 差值范数结果接近方案②的平差结果, 从图 1(a) 中发现, 方案⑥判别函数  $\lambda \hat{e}_1^T Q_{\hat{e}_1}^{-1} \hat{e}_1 + (1 - \lambda) \hat{e}_2^T Q_{\hat{e}_2}^{-1} \hat{e}_2$  的最小值点在最左端取得, 若不加  $0 < \lambda < 1$  的限制, 其联合平差结果将退化为单一数据的 WTLS 结果。方案⑦确定的权比大小为 0.5 (见表 3 和图 1(b)), 结果与方案③相同, 可见方案⑥与方案⑦未能起到联合平差

表 3 §3.1 中算例平差结果

Tab. 3 Results of the Example in §3.1

方案	$\hat{X}_1$	$\hat{X}_2$	$\hat{X}_3$	$\lambda$	$\ \Delta \hat{X}\ $
①	0.997 73	1.015 48	1.009 69	1.000	0.165 43
②	0.998 69	0.997 21	1.000 73	0.000	0.045 27
③	0.997 82	0.997 97	1.000 04	0.500	0.049 65
④	0.998 25	0.997 44	1.000 17	0.250	0.043 00
⑤	0.997 87	0.997 34	1.000 21	0.283	0.043 24
⑥	0.998 69	0.997 21	1.000 73	0.001	0.045 27
⑦	0.997 82	0.997 97	1.000 04	0.500	0.049 65
⑧	0.998 02	0.997 66	1.000 23	0.383	0.044 83
真值	1	1	1	—	—

的作用。采用方案⑧的判别函数确定的权比大小为 0.383 (见表 3 和图 1(c)), 相对于方案⑥与方案⑦更接近理论权比, 计算结果也仅次于方案④、方案⑤的结果。

为探讨不同精度的数据误差对确定权比的影响, 模拟不同随机误差, 其权比计算结果见表 4。从表 4 可以看出, 方案⑤确定的权比始终在端点处取得, 并未起到权衡各类数据的作用; 方案⑦所确定的权比大小始终为 0.5, 说明对观测数据质

表 4 §3.1 中算例不同精度误差对确定相对权比的影响

Tab. 4 Influence to the Weight Scaling Factor Determined by Adding Different Noises to Example in §3.1

$\sigma_{01}^2$	$\sigma_{02}^2$	相对权比 $\lambda$			
		理论权比	方案⑥	方案⑦	方案⑧
3	0.001	0.000 3	0.001	0.500	0.016
3	0.003	0.001	0.001	0.500	0.027
3	0.01	0.003	0.001	0.500	0.045
3	0.1	0.032	0.001	0.500	0.144
3	0.3	0.091	0.001	0.500	0.232
3	1	0.250	0.001	0.500	0.362
1	1	0.50	0.999	0.500	0.547
0.3	1	0.769	0.999	0.500	0.636
0.1	1	0.909	0.999	0.500	0.710
0.03	1	0.971	0.999	0.500	0.805
0.003	1	0.997	0.999	0.500	0.905



量不敏感,不具实际操作性;方案⑧确定的权比能较好地反映不同类数据间的权比关系。可见,判别函数的选取对权比的确定起到了重要作用。

### 3.2 仿射变换算例

二维仿射变换模型为<sup>[23]</sup>:

$$\begin{bmatrix} x_{i,t} \\ y_{i,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \kappa_x \cos \omega_x & \kappa_y \sin \omega_y \\ -\kappa_x \sin \omega_x & \kappa_y \cos \omega_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{i,s} \\ y_{i,s} \end{bmatrix} \quad (20)$$

式中,  $\Delta x$ 、 $\Delta y$  为平移参数;  $\omega_x$ 、 $\omega_y$  为旋转参数;  $\kappa_x$ 、 $\kappa_y$  为尺度参数;  $(x_{i,t}, y_{i,t})$ 、 $(x_{i,s}, y_{i,s})$  分别表示第  $i$  个公共点的目标坐标系及原始坐标系的坐标。

变换式(20)得如下矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} x_{i,t} \\ y_{i,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_{i,s} & y_{i,s} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_{i,s} & y_{i,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

式中,  $a_1 = \kappa_x \cos \omega_x$ ;  $a_2 = \kappa_y \sin \omega_y$ ;  $b_1 = -\kappa_x \sin \omega_x$ ;  $b_2 = \kappa_y \cos \omega_y$ 。由平差参数估值  $\hat{a}_1$ 、 $\hat{a}_2$ 、 $\hat{b}_1$  和  $\hat{b}_2$  与式(20)中转换参数间的关系,可实现两者的互换<sup>[16]</sup>。取 4 个公共点,坐标分别为 (40, 40) m、(40, 60) m、(60, 40) m 和 (60, 60) m,若不考虑坐标平移的影响,给定转换参数的真值,  $\omega_x = 10^\circ$ ,  $\omega_y = 11^\circ$ ,  $\kappa_x = 1.01$ ,  $\kappa_y = 1.02$ 。假设对

于一组公共点,存在不同精度的两套坐标,给第 I 套原始坐标系与目标坐标系的坐标模拟期望为零且服从正态分布的随机误差,其单位权中误差  $\sigma_{01} = 2$  cm,并假设目标坐标系数据点的协因数阵为单位阵;原始坐标系同一点中  $x$ 、 $y$  坐标独立,不同点间坐标相关,对应协因数阵中非对角线元素由式(22)确定<sup>[24]</sup>:

$$q_{ij} = 1/[1 + (d_{ij}/d_0)^2] \quad (22)$$

式中,  $d_{ij}$  代表  $i$ 、 $j$  点间的距离,并取  $d_0 = 10$  m。

同理,给第 II 套数据同样的随机误差,其单位权中误差  $\sigma_{02} = 3$  cm,协因数阵的确定与第 I 套坐标相同。

分别采用 §3.1 中所列 8 种方案模拟 100 次,转换参数的平差结果列于表 5。由于数据点相对较少,采用方案⑤的方差分量不可估(出现负方差)<sup>[22]</sup>,而采用方案⑧则可以给出一个较优的平差结果,所确定的权比为 0.624,接近理论权比 0.692。

为使方案⑤方法可估,现增加公共点的个数。在 30~80 m 范围内,沿横、纵坐标轴方向每隔 10 m 取一个点作为公共点,共 36 个点。同样采用 §3.1 中 8 种方案进行模拟试验,并将 36 个公共点情况下各方案转换参数结果列于表 6,图 2 给出了方案⑥至方案⑧的判别函数值与相对权比的关系图。

表 5 § 3.2 中 4 个公共点情况下算例平差结果

Tab. 5 Results of the Affine Transformation of Example in §3.2 with 4 Common Points

方案	$\hat{\kappa}_x$	$\hat{\kappa}_y$	$\hat{\omega}_x/(^\circ)$	$\hat{\omega}_y/(^\circ)$	$\lambda$	$\ \Delta \hat{X}\ $
①	1.010 01	1.019 98	9.996 48	10.999 08	1.000	0.043 12
②	1.009 87	1.019 94	9.995 91	11.004 41	0.000	0.081 11
③	1.009 94	1.019 96	9.996 20	11.001 75	0.500	0.045 71
④	1.009 97	1.019 97	9.996 31	11.000 72	0.692	0.038 64
⑤	—	—	—	—	—	—
⑥	1.010 01	1.019 98	9.996 48	10.999 09	0.999	0.043 08
⑦	1.009 94	1.019 96	9.996 20	11.001 75	0.500	0.045 71
⑧	1.009 96	1.019 96	9.996 27	11.001 09	0.624	0.040 42
真值	1.01	1.02	10	11	—	—

表 6 § 3.2 中 36 个公共点情况下算例平差结果

Tab. 6 Results of the Affine Transformation of Example in §3.2 with 36 Common Points

方案	$\hat{\kappa}_x$	$\hat{\kappa}_y$	$\hat{\omega}_x/(^\circ)$	$\hat{\omega}_y/(^\circ)$	$\lambda$	$\ \Delta \hat{X}\ $
①	1.009 98	1.020 03	10.000 32	11.000 41	1.000	0.019 61
②	1.009 96	1.019 93	9.994 96	11.000 54	0.000	0.031 09
③	1.009 97	1.019 97	9.997 63	11.000 47	0.500	0.018 71
④	1.009 98	1.019 99	9.998 66	11.000 45	0.692	0.016 99
⑤	1.009 98	1.019 99	9.998 53	11.000 37	0.690	0.017 10
⑥	1.009 99	1.020 03	10.000 31	11.000 41	0.999	0.019 60
⑦	1.009 97	1.019 97	9.997 63	11.000 47	0.500	0.018 71
⑧	1.009 98	1.019 99	9.998 16	11.000 46	0.603	0.017 51

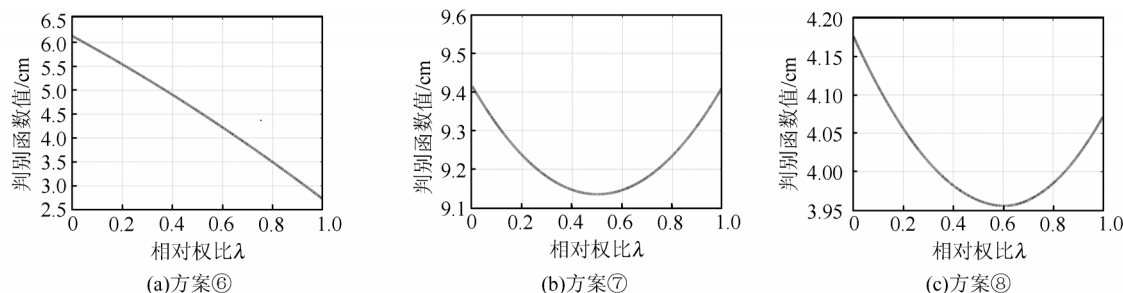


图2 §3.2中判别函数与相对权比关系图

Fig. 2 Relationship Between Discriminate Function and Weight Scaling Factor to Example in §3.2

由表6可知,此时方案⑤可估,根据表6的结果可得出与§3.1中算例等价的结论。具体如下:方案④的计算结果最优,方案⑤同样能够获得合理的平差结果;由于方案⑧的判别函数能够较好地反映数据集间的比重关系,其平差结果仅次于方案④与方案⑤;方案⑦确定的相对权比为0.500,其平差结果与方案③等价;方案⑥的判别函数最小化法确定的权比为0.999(见图2(a)),若权比不限制于(0,1)范围,其联合平差结果将退化为单一数据的WTLS结果<sup>[9]</sup>,说明采用该方案不能很好地确定权比。

为了分析判别函数最小化法中不同精度误差对确定权比的影响,表7给出了各套坐标模拟不同精度的观测误差时采用判别函数最小化法确定权比的情况。由表7可知,试验结果进一步验证了采用方案⑧确定权比的可行性。

表7 §3.2中各精度误差确定权比的影响

Tab. 7 Influence to Determine the Weight Scaling Factor by Adding Different Noises to Example in §3.2

$\sigma_{01}$ /cm	$\sigma_{02}$ /cm	相对权比 $\lambda$			
		理论权比	方案⑥	方案⑦	方案⑧
2	0.3	0.022	0.001	0.500	0.123
2	0.5	0.059	0.001	0.500	0.204
2	1	0.200	0.001	0.500	0.338
2	1.5	0.360	0.001	0.500	0.414
2	2	0.500	0.999	0.500	0.499
2	3	0.692	0.999	0.500	0.603
1.5	3	0.800	0.999	0.500	0.664
1	3	0.900	0.999	0.500	0.738
0.5	3	0.973	0.999	0.500	0.866

综合本文两个算例,由于可能存在的观测数据不足等原因,总体最小二乘方差分量估计方法会出现方差分量不可估的情况<sup>[22]</sup>;方案④在不同类数据先验信息精度较高时使用合理;实际情况下,验前信息往往难以准确得知,为兼顾能够获得合理的数据集权比和平差方法的强可靠性,可

采用方案⑧的判别函数最小化。实际情况下,相对权比的取值往往还受到数据量的大小以及点位分布等因素的综合影响,平差结果的好坏还需综合多种因素进行评价,不能以相对权比的大小作为评价某种确定权比方法好坏的唯一指标<sup>[7]</sup>。

## 4 结 语

本文推导了附有相对权比的加权总体最小二乘联合平差方法,顾及了联合平差函数模型系数矩阵的误差,探讨了数据融合问题中相对权比的确定方法。通过对比验前单位权方差法、多种判别函数最小化和总体最小二乘方差分量估计方法,分析得出如下结论:验前单位权方差法可在当先验信息准确时使用,而当验前信息不准确时,方案⑧的判别函数最小化法能够获得较优的参数估值结果。采用判别函数最小化法确定相对权比,其优点是不受验前信息的限制,可避免求解方差分量估计时可能带来的不收敛或出现负方差分量的情况。本文仅从理论方法上对不同判别函数最小化法进行了比较分析,在实际应用中还需进一步探讨与改进,判别函数的选取也需根据实际情况进行探讨和推广。

## 参 考 文 献

- [1] Wang Leyang. Research on Theory and Application of Total Least Squares in Geodetic Inversion [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2012, 41(4):629(王乐洋. 基于总体最小二乘的大地测量反演理论及应用研究[J]. 测绘学报, 2012, 41(4):629)
- [2] Zhang Jun, Du Zhixing, Du Ning, et al. A Constraint Method to Determine Relative Weight Ratio Factors in Joint Inversion [J]. *Journal of Geodesy and Geodynamics*, 2015, 35(4):600-603(张俊, 独行, 杜宁, 等. 联合反演模型中相对权比的约束反演[J]. 大地测量与地球动力学, 2015, 35(4):

- 600-603)
- [3] Xu Caijun, Deng Changyong, Zhou Lixuan. Co-seismic Slip Distribution Inversion Method Based on Variance Component Estimation[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2016, 41(1):37-44(许才军,邓长勇,周力璇. 利用方差分量估计的地震同震滑动分布反演[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2016, 41(1):37-44)
- [4] Duan Hurong, Zhang Yongzhi. On Relative Weight Ratio Relation Between Characteristics of Fault Slip and Various Type of Inversion Data[J]. *Journal of Geodesy and Geodynamics*, 2009, 29(6):18-21(段虎荣,张永志. 断层滑动特征与多种反演数据的相对权比关系研究[J]. 大地测量与地球动力学, 2009, 29(6):18-21)
- [5] Du Zhixing, Ou Jikun, Jin Fengxiang, et al. Optimization Inversion of the Relative Weight Ratio  $\lambda$  in the Joint Inversion Models[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2003, 32(1):15-19(独知行,欧吉坤,靳奉祥,等. 联合反演模型中相对权比的优化反演[J]. 测绘学报, 2003, 32(1):15-19)
- [6] Wang Leyang, Xu Caijun. Comparative Research on Equality Constraint Inversion and Joint Inversion[J]. *Journal of Geodesy and Geodynamics*, 2009, 29(1):74-78(王乐洋,许才军. 等式约束反演与联合反演的对比研究[J]. 大地测量与地球动力学, 2009, 29(1):74-78)
- [7] Wang Leyang, Xu Caijun, Zhang Chaoyu. A Two-step Method to Determine Relative Weight Ratio Factors in Joint Inversion[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2012, 41(1):19-24(王乐洋,许才军,张朝玉. 一种确定联合反演中相对权比的两步法[J]. 测绘学报, 2012, 41(1):19-24)
- [8] Zhang Chaoyu, Xu Caijun. Sequential Algorithm of Geodesy Joint Inversion with Auto-match Weight Ratio and Its Application[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2012, 37(10):1140-1145(张朝玉,许才军. 具有自适应权比的大地测量联合反演序贯算法及其应用[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2012, 37(10):1140-1145)
- [9] Xu Caijun, Ding Kaihua, Cai Jianqiang, et al. Methods of Determining Weight Scaling Factors for Geodetic-Geophysical Joint Inversion[J]. *Journal of Geodynamics*, 2009, 47(1):39-46
- [10] Wang Leyang, Yu Hang. Study on the Applicability of Total Least Squares Method in Surveying Adjustment[J]. *Journal of Geodesy and Geodynamics*, 2014, 34(3):121-124(王乐洋,余航. 总体最小二乘方法的适用性研究[J]. 大地测量与地球动力学, 2014, 34(3):121-124)
- [11] Wang Leyang, Xu Caijun. Total Least Square Adjustment with Weight Scaling Factor[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2011, 36(8):887-884(王乐洋,许才军. 附有相对权比的总体最小二乘平差[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2011, 36(8):887-884)
- [12] Wang Leyang, Xu Guangyu, Chen Xiaoyong. Total Least Squares Adjustment of Partial Errors-in-Variables Model with Weight Scaling Factor[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2017, 42(6):857-863(王乐洋,许光煜,陈晓勇. 附有相对权比的PEIV模型总体最小二乘平差[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2017, 42(6):857-863)
- [13] Yao Yibin, Kong Jian. A New Combined LS Method Considering Random Errors of Design Matrix[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2014, 39(9):1028-1032(姚宜斌,孔建. 顾及设计矩阵随机误差的最小二乘组合新解法[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2014, 39(9):1028-1032)
- [14] Zhou Yongjun, Fang Xing. A Mixed Weighted Least Squares and Weighted Total Least Squares Adjustment Method and Its Geodetic Applications[J]. *Survey Review*, 2016, 48(351):421-429
- [15] Fang Xing. Weighted Total Least Squares: Necessary and Sufficient Conditions, Fixed and Random Parameters[J]. *Journal of Geodesy*, 2013, 87(8):733-749
- [16] Jazaeri S, Amiri-Simkooei A R, Sharifi M A. Iterative Algorithm for Weighted Total Least Squares Adjustment[J]. *Survey Review*, 2014, 46(334):19-27
- [17] Zeng Wenxian. Effect of the Random Design Matrix on Adjustment of an EIV Model and Its Reliability Theory[D]. Wuhan: Wuhan University, 2013(曾文宪. 系数矩阵误差对EIV模型平差结果的影响研究[D]. 武汉:武汉大学, 2013)
- [18] Wang Leyang, Yu Hang. Total Least Squares Joint Adjustment[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2016, 41(12):1683-1689(王乐洋,余航. 总体最小二乘联合平差[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2016, 41(12):1683-1689)
- [19] Amiri-Simkooei A R. Application of Least Squares Variance Component Estimation to Errors-in-Variables Models[J]. *Journal of Geodesy*, 2013, 87(10-12):935-944
- [20] Xu Peiliang, Liu Jingnan. Variance Components in Errors-in-Variables Models: Estimability, Stability

- and Bias Analysis[J]. *Journal of Geodesy*, 2014, 88(8): 719-734
- [21] Wang Leyang, Xu Guangyu. Variance Component Estimation for Partial Errors-in-Variables Models [J]. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 2016, 60(1): 35-55
- [22] Amiri-Simkooei A R. Non-negative Least-Squares Variance Component Estimation with Application to GPS Time Series[J]. *Journal of Geodesy*, 2016, 90(5): 451-466
- [23] Li Bofeng. Variance Component Estimation in the Seamless Affine Transformation Model [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2016, 45(1): 30-35(李博峰. 无缝仿射基准转换模型的方差分量估计[J]. 测绘学报, 2016, 45(1):30-35)
- [24] Cui Xizhang, Yu Zongchou, Tao Benzao, et al. Generalized Surveying Adjustment [M]. 2nd ed. Wuhan: Wuhan University Press, 2009(崔希璋, 於宗俦, 陶本藻, 等. 广义测量平差[M]. 2版. 武汉: 武汉大学出版社, 2009)

## Weighted Total Least Squares Method for Joint Adjustment Model with Weight Scaling Factor

WANG Leyang<sup>1,2</sup> YU Hang<sup>2,3</sup>

1 College of Geomatics, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590, China

2 Faculty of Geomatics, East China University of Technology, Nanchang 330013, China

3 School of Environment Science and Spatial Informatics, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China

**Abstract:** In regard to the joint adjustment problem with different types of dataset, the functional model of each type of dataset is affected by random errors, which indicates the observation vector and coefficient matrix are not error-free. In this paper, the weight total least squares (WTLS) method is applied to joint adjustment model. An iterative WTLS method for joint adjustment model is derived, which uses the weight scaling factor to adjust the contribution of each type of dataset. In view of the determination of the weight scaling factor, more schemes are designed, which includes the minimum discrimination function method. The results show that the prior unit weight variance method and the total least squares variance component estimation (TLS-VCE) method have their limitations. When the prior information is inaccurate or the variance components are not estimable while using the TLS-VCE method, the minimum discriminate function method with  $\sum_{i=1}^{n_1} |\hat{e}_{1i}| + \sum_{j=1}^{n_2} |\hat{e}_{2j}|$  as its discriminate function can achieve the relative effective results.

**Key words:** weighted total least squares; joint adjustment; weight scaling factor; discriminate function

**First author:** WANG Leyang, PhD, professor, specializes in geodetic inversion and geodetic data processing. E-mail: wleyang@163.com

**Foundation support:** The National Natural Science Foundation of China, Nos.41874001, 41664001, 41204003; Outstanding Youth Talents in Jiangxi Province, No.20162BCB23050; the National Key Research and Development Program of China, No.2016YFB0501405; Science and Technology Project of the Education Department of Jiangxi Province, No.GJJ150595.