

DOI:10.13203/j.whugis20160348



文章编号:1671-8860(2018)09-1320-08

三维坐标转换的高斯-赫尔默特模型及其抗差解法

刘超¹ 王彬² 赵兴旺¹ 余学祥¹

1 安徽理工大学测绘学院,安徽淮南,232001

2 武汉大学测绘学院,湖北武汉,430079

摘要:对三维坐标转换的高斯-赫尔默特(Gauss-Helmert, GH)模型,采用牛顿-高斯(Newton-Gauss)迭代算法构建了该模型的拉格朗日目标函数,推导了其解算方法,并给出了具体的计算步骤。在此基础上,考虑到可能出现的粗差对观测空间与结构空间的综合影响,基于标准化残差构造权因子函数,推导了该模型的抗差解法。仿真实验结果表明, GH 模型用于三维坐标转换时不受旋转角度大小和其他附加条件限制,解算结果与现有算法一致,且估计参数的维数大大降低,计算效率有一定程度的提高;所提出的抗差解法效果良好,与现有基于整体最小二乘的三维坐标转换的抗差解法相比,表现出了更好的稳健性。

关键词:三维坐标转换;高斯-赫尔默特模型;整体最小二乘;标准化残差;抗差估计

中图分类号:P207

文献标志码:A

三维坐标转换是测绘科学领域的一个重要问题^[1-3],经典方法采用诸如布尔萨-沃尔夫模型(Bursa-Wolf)、莫洛坚斯基模型(Molodensky)和武测模型等^[4],建立高斯-马尔科夫模型(Gauss-Markov, GM),基于最小二乘(least squares, LS)准则进行参数估计^[5]。虽然采用 GM 模型进行 LS 估计可以对参数进行有效估计,但考虑到三维坐标转换本质上是一个拟合问题,其系数矩阵同样存在随机误差,经典 LS 方法难以获得三维坐标转换参数的最优估值^[6]。误差变量模型(errors-in-variables, EIV)及整体最小二乘估计方法(total least squares, TLS)的提出为解决这一问题提供了一条有效途径^[7-10]。

引入 TLS 进行三维坐标转换,采用 Bursa-Wolf 模型,由于比例因子与旋转矩阵的非线性交互影响,以及系数矩阵中固定列的存在,难以获得其标准 EIV 模型。通过建立部分误差变量模型(partial errors-in-variables, PEIV)或虚拟观测值模型,可以解决上述问题^[11-14]。高斯-赫尔默特(Gauss-Helmert, GH)模型是 EIV 模型的一般性表达,其对于函数关系的处理不需要强加限制条件,采用 GH 模型建立 Bursa-Wolf 模型,理论上同样可以解决上述问题^[15-17]。文献[17]给出的 GH 模型简洁,本文基于牛顿-高斯(Newton-

Gauss)迭代算法,推导了其解算方法。

同时,考虑到观测向量和系数矩阵中可能存在粗差,有必要进一步研究 EIV 模型中粗差的处理方法。基于 LS 估计的粗差处理方法总体上可分为两类:(1)将粗差归于函数模型,研究粗差探测方法^[18-19]; (2)将粗差归于随机模型,研究抗差估计方法^[20-21]。将相关研究扩展至 TLS 领域,学者们也进行了一些有益的探讨,尤其是关于 TLS 的抗差估计方法——稳健加权整体最小二乘估计(robust weighted total least squares, RWTLS)^[22-25]。文献[22-25]主要采用残差进行权因子函数的构造,无法顾及结构空间的影响。文献[26]采用标准化残差构造权因子函数,提出的 RWTLS 算法实现了对观测空间和结构空间同时抗差,取得了更为理想的效果。本文在推导文献[17]给出的 GH 模型的基本解法的基础上,借鉴文献[26]的思路,推导该模型的残差协因数阵的表达式,获得标准化残差,并构造权因子函数,实现三维坐标转换参数的抗差估计。

1 三维坐标转换的 GH 模型及其解法

三维坐标转换的 GH 模型可以表示为^[17]:

收稿日期:2016-12-28

项目资助:国家自然科学基金(41404004, 41474026);安徽省博士后基金(2015B044);安徽理工大学科研启动基金(11152)。

第一作者:刘超,博士,副教授,主要从事变形数据分析理论与方法研究。chaoliu0202@gmail.com

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \mu \mathbf{M} \begin{bmatrix} x - e_x \\ y - e_y \\ z - e_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中, $[X \ Y \ Z]^T$ 和 $[e_x \ e_y \ e_z]^T$ 分别为目标坐标系下的观测向量和其随机误差; $[x \ y \ z]^T$ 和 $[e_x \ e_y \ e_z]^T$ 分别为原坐标系下的观测向量和其随机误差; $[X_0 \ Y_0 \ Z_0]^T$ 为平移参数; μ 为尺度参数; \mathbf{M} 为旋转矩阵, 且

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_3 \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} \cos\alpha_3 & \sin\alpha_3 & 0 \\ -\sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 & 0 & -\sin\alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha_2 & 0 & \cos\alpha_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ 0 & -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix}$$

其中, α_1, α_2 和 α_3 为旋转参数。

基于 Newton-Gauss 法, 采用非线性最小二乘法, 对待估参数 $(X_0, Y_0, Z_0, \mu, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 进行迭代计算^[10]。设第 i 次迭代计算后获得的参数估值为 $(X_0^i, Y_0^i, Z_0^i, \mu^i, \alpha_1^i, \alpha_2^i, \alpha_3^i)$, 预测残差为 (e_x^i, e_y^i, e_z^i) (上标 i 为迭代次数)。对式(1)等式右端在 $((X_0^i, Y_0^i, Z_0^i, \mu^i, \alpha_1^i, \alpha_2^i, \alpha_3^i), (e_x^i, e_y^i, e_z^i))$ 处进行泰勒级数展开, 并保留一阶项:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \mu^i \mathbf{M}^i \begin{bmatrix} x - e_x^i \\ y - e_y^i \\ z - e_z^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_0^i \\ Y_0^i \\ Z_0^i \end{bmatrix} + \mathbf{M}^i \begin{bmatrix} x - e_x^i \\ y - e_y^i \\ z - e_z^i \end{bmatrix} d\mu + \mu^i \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \alpha_3} d\alpha_3 \right) - \mu^i \mathbf{M}^i \begin{bmatrix} de_x \\ de_y \\ de_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dX_0 \\ dY_0 \\ dZ_0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\text{令 } \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_x^i \\ e_y^i \\ e_z^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} de_x \\ de_y \\ de_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} =$$

$[X_0 \ Y_0 \ Z_0 \ \mu \ \alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3]^T$, 对式(2)进行整理得:

$$\mathbf{X}_2 - \mathbf{e}_2 = (\mu^i \mathbf{M}^i \mathbf{X}_1 + \Delta \mathbf{X}_0^i) + \mathbf{A}^i d\mathbf{X} - \mu^i \mathbf{M}^i \mathbf{e}_1 \quad (3)$$

式中,

$$\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}; \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}; \mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \Delta \mathbf{X}_0^i = \begin{bmatrix} X_0^i \\ Y_0^i \\ Z_0^i \end{bmatrix}; \mathbf{A}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^i & \mu^i \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \alpha_1} & \mu^i \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \alpha_2} & \mu^i \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \alpha_3} \end{bmatrix} (\mathbf{X}_1 - \mathbf{e}_1);$$

$$d\mathbf{X} = [dX_0 \ dY_0 \ dZ_0 \ d\mu \ d\alpha_1 \ d\alpha_2 \ d\alpha_3]^T; \mathbf{e}_1 = [e_x \ e_y \ e_z]^T.$$

采用式(3)构建加权整体最小二乘问题的拉格朗日目标函数 Φ :

$$\Phi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{X}, \mathbf{K}) = \mathbf{e}_1^T \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2^T \mathbf{Q}_2^{-1} \mathbf{e}_2 + 2 \mathbf{K}^T \cdot (\mathbf{X}_2 - \mathbf{e}_2 - (\mu^i \mathbf{M}^i \mathbf{X}_1 + \Delta \mathbf{X}_0^i) - \mathbf{A}^i d\mathbf{X} + \mu^i \mathbf{M}^i \mathbf{e}_1) \quad (4)$$

式中, \mathbf{K} 为拉格朗日乘子; \mathbf{Q}_1 和 \mathbf{Q}_2 分别为 \mathbf{e}_1 和 \mathbf{e}_2 的协因数阵。不考虑 \mathbf{e}_1 和 \mathbf{e}_2 的相关性, 则观测值的协因数阵可表示为:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

通过构建的拉格朗日必要条件推导目标函数的解, 对各变量求导并令导数为零:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{e}_1} \Big|_{\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, d\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{K}}} = \mathbf{Q}_1^{-1} \tilde{\mathbf{e}}_1 + (\mathbf{M}^i)^T \mu^i \hat{\mathbf{K}} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{e}_2} \Big|_{\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, d\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{K}}} = \mathbf{Q}_2^{-1} \tilde{\mathbf{e}}_2 - \hat{\mathbf{K}} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, d\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{K}}} = -(\mathbf{A}^i)^T \hat{\mathbf{K}} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{K}} \Big|_{\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, d\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{K}}} = \mathbf{X}_2 - \tilde{\mathbf{e}}_2 - (\mu^i \mathbf{M}^i \mathbf{X}_1 + \Delta \mathbf{X}_0^i) - \mathbf{A}^i d\hat{\mathbf{X}} + \mu^i \mathbf{M}^i \tilde{\mathbf{e}}_1 = 0 \quad (9)$$

式(6)~(9)中, 上标 \sim 代表估计值; $\tilde{}$ 代表预测值。

由式(6)、(7)和(9)得:

$$\mathbf{X}_2 - \mathbf{Q}_2 \hat{\mathbf{K}} - \mu^i \mathbf{M}^i \mathbf{X}_1 - \Delta \mathbf{X}_0^i - \mathbf{A}^i d\hat{\mathbf{X}} - \mu^i \mathbf{M}^i \mathbf{Q}_1 (\mathbf{M}^i)^T \mu^i \hat{\mathbf{K}} = 0 \quad (10)$$

令 $\mathbf{L}^i = \mathbf{X}_2 - \mu^i \mathbf{M}^i \mathbf{X}_1 - \Delta \mathbf{X}_0^i$, $\mathbf{Q}_c^i = \mathbf{Q}_2 + \mu^i \mathbf{M}^i \mathbf{Q}_1 (\mathbf{M}^i)^T \mu^i$, 由式(10)得:

$$\hat{\mathbf{K}} = (\mathbf{Q}_c^i)^{-1} (\mathbf{L}^i - \mathbf{A}^i d\hat{\mathbf{X}}) \quad (11)$$

将式(11)代入式(8), 得:

$$(\mathbf{A}^i)^T (\mathbf{Q}_c^i)^{-1} (\mathbf{L}^i - \mathbf{A}^i d\hat{\mathbf{X}}) = 0 \quad (12)$$

则待求参数的改正数 $d\hat{\mathbf{X}}$ 在第 $i+1$ 次迭代的估计值为:

$$d\hat{\mathbf{X}}^{i+1} = ((\mathbf{A}^i)^T (\mathbf{Q}_c^i)^{-1} \mathbf{A}^i)^{-1} (\mathbf{A}^i)^T (\mathbf{Q}_c^i)^{-1} \mathbf{L}^i \quad (13)$$

更新的参数向量为:

$$\hat{\mathbf{X}}^{i+1} = \hat{\mathbf{X}}^i + d\hat{\mathbf{X}}^{i+1} \quad (14)$$

将式(11)代入式(6)、(7), 得到第 $i+1$ 次迭代的预测残差向量:

$$\tilde{\mathbf{e}}_1^{i+1} = -\mathbf{Q}_1 (\mathbf{M}^i)^T \mu^i (\mathbf{Q}_c^i)^{-1} (\mathbf{L}^i - \mathbf{A}^i d\hat{\mathbf{X}}^{i+1}) \quad (15)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_2^{i+1} = \mathbf{Q}_2 (\mathbf{Q}_c^i)^{-1} (\mathbf{L}^i - \mathbf{A}^i d\hat{\mathbf{X}}^{i+1}) \quad (16)$$

将式(14)和式(15)获得的更新后的参数向量

和原坐标系下坐标值的预测残差代入式(13)进行下一次迭代,直到 $\|d\hat{\mathbf{X}}^{i+1}\| < \epsilon_0$ (ϵ_0 为阈值,取 $\epsilon_0 = 1 \times 10^{-10}$),终止迭代,以获得最终的参数估

$$\sigma_0^2 = \frac{\bar{\mathbf{e}}_1^T \mathbf{Q}_1^{-1} \bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{\mathbf{e}}_2^T \mathbf{Q}_2^{-1} \bar{\mathbf{e}}_2}{3n - 7} = \frac{\mathbf{L}^T \mathbf{Q}_c^{-1} \mu \mathbf{M} \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{Q}_1 \mathbf{M}^T \mu \mathbf{Q}_c^{-1} \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \mathbf{Q}_c^{-1} \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_2^{-1} \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_c^{-1} \mathbf{L}}{3n - 7} = \frac{\mathbf{L}^T \mathbf{Q}_c^{-1} \mathbf{L}}{3n - 7} \quad (17)$$

式中, n 为参与计算的公共点位个数。由于迭代过程完成,所有符号的右上标去除。

2 三维坐标转换的 GH 模型的抗差解法

基于等价权抗差原理进行参数的抗差估计,需要构建检验量,其关键在于残差向量的协因数阵的推导。

由式(15)和式(16)得到第 $i+1$ 次迭代的预测残差向量:

$$\mathbf{R}^{i+1} = \mathbf{L}^i - \mathbf{A}^i d\hat{\mathbf{X}}^{i+1} = \mathbf{L}^i - \mathbf{A}^i \cdot ((\mathbf{A}^i)^T \cdot (\mathbf{Q}_c^i)^{-1} \cdot \mathbf{A}^i)^{-1} \cdot (\mathbf{A}^i)^T \cdot (\mathbf{Q}_c^i)^{-1} \cdot \mathbf{L}^i = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^i \cdot ((\mathbf{A}^i)^T \cdot (\mathbf{Q}_c^i)^{-1} \cdot \mathbf{A}^i)^{-1} \cdot (\mathbf{A}^i)^T \cdot (\mathbf{Q}_c^i)^{-1}) \cdot \mathbf{L}^i = (\mathbf{I} - \mathbf{F}^i) \cdot \mathbf{L}^i \quad (20)$$

式中,用 \mathbf{F} 代替对应位置的矩阵。则 \mathbf{R}^{i+1} 的协因数阵为:

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{R}^{i+1}} = (\mathbf{I} - \mathbf{F}^i) \cdot \mathbf{Q}_{\mathbf{L}^i} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{F}^i)^T \quad (21)$$

由式(10)有:

$$\mathbf{L}^i = \mathbf{X}_2 - \mu^i \mathbf{M}^i \mathbf{X}_1 - \Delta \mathbf{X}_0^i = [-\mu^i \mathbf{M}^i \quad \mathbf{I}] \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} - \Delta \mathbf{X}_0^i \quad (22)$$

则 \mathbf{L}^i 的协因数阵为:

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{L}^i} = [-\mu^i \mathbf{M}^i \quad \mathbf{I}] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} [-\mu^i \mathbf{M}^i \quad \mathbf{I}]^T \quad (23)$$

将式(23)代入式(21),并将式(21)代入式(19),即得到预测残差协因数阵的表达式。由于上述推导过程获得的预测残差协因数阵与迭代过程中的参数和系数阵残差有关,故预测残差协因数阵需要在迭代中不断更新。

在此基础上,对式(18)中的预测残差进行标准化:

$$\bar{v}_j = \frac{v_j}{\sigma_0 (\sqrt{q_{v_j}})} \quad (q_{v_j} \neq 0) \quad (24)$$

式中, \bar{v}_j 为标准化残差向量 $\tilde{\mathbf{V}}$ 中的第 j 个元素; v_j 表示预测残差向量 \mathbf{V} 中的第 j 个元素; σ_0 为单位权中误差; q_{v_j} 为残差协因数阵 \mathbf{Q}_v 中对角线上第 j 个元素。 σ_0 由中位函数计算,可表示为:

$$\sigma_0 = \text{med}_{j=1}^n (|v_j / \sqrt{q_{v_j}}|) \cdot 1.4826 \quad (q_{v_j} \neq 0) \quad (25)$$

因为标准化残差进行抗差估计可选的权因子

值 $\hat{\mathbf{X}}$ 和残差项 $\bar{\mathbf{e}}_1$ 和 $\bar{\mathbf{e}}_2$ 。

不考虑极小项残差 $\mathbf{A}^i d\hat{\mathbf{X}}^{i+1}$,由式(15)和式(16),可得验后单位权方差:

$$\mathbf{V}^{i+1} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_1^{i+1} \\ \bar{\mathbf{e}}_2^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{Q}_1 (\mathbf{M}^i)^T \mu^i (\mathbf{Q}_c^i)^{-1} \\ \mathbf{Q}_2 (\mathbf{Q}_c^i)^{-1} \end{bmatrix} \cdot$$

$$(\mathbf{L}^i - \mathbf{A}^i d\hat{\mathbf{X}}^{i+1}) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^i \\ \mathbf{D}^i \end{bmatrix} \cdot \mathbf{R}^{i+1} \quad (18)$$

式中,为了方便起见,用 \mathbf{C} 、 \mathbf{D} 、 \mathbf{R} 代替对应位置的矩阵。则第 $i+1$ 次迭代的预测残差向量的协因数阵为:

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{V}^{i+1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^i \\ \mathbf{D}^i \end{bmatrix} \cdot \mathbf{Q}_{\mathbf{R}^{i+1}} \cdot [(\mathbf{C}^i)^T \quad (\mathbf{D}^i)^T] \quad (19)$$

由式(13)和(18)可得:

函数众多^[27],本文采用 IGG III 权因子函数,为了计算方便,采用其对应协因数因子函数 R_{jj} ^[26]:

$$R_{jj} = \begin{cases} 1.0, & |\bar{v}_j| \leq k_0 \\ \frac{|\bar{v}_j|}{k_0} \left(\frac{k_1 - k_0}{k_1 - |\bar{v}_j|} \right)^2, & k_0 < |\bar{v}_j| \leq k_1 \\ 1 \times 10^{10}, & k_1 < |\bar{v}_j| \end{cases} \quad (26)$$

式中,第 3 段理论上应该为无穷大,为了方便计算,可采用极大值替代(如 1×10^{10}),可满足实际要求; k_0 取为 2.0~3.0; k_1 取为 4.5~8.5^[27]。采用双因子模型,由式(26)可得观测向量和系数矩阵中观测值的等价协因数:

$$\bar{q}_{j_k} = q_{j_k} \sqrt{R_{jj}} \sqrt{R_{kk}} \quad (27)$$

式中, \bar{q}_{j_k} 和 q_{j_k} 分别为观测值的等价协因数阵 $\bar{\mathbf{Q}}$ 和协因数阵 \mathbf{Q} 中对应位置元素。采用 $\bar{\mathbf{Q}}$ 替代 \mathbf{Q} ,构建类似于式(4)的加权整体最小二乘问题的拉格朗日目标函数,对各变量求导并令导数为零,类似于式(6)~(9),可得第 $i+1$ 次迭代的待求参数抗差估计的改正数为:

$$d\hat{\mathbf{X}}^{i+1} = ((\mathbf{A}^i)^T (\bar{\mathbf{Q}}_c^i)^{-1} \mathbf{A}^i)^{-1} (\mathbf{A}^i)^T (\bar{\mathbf{Q}}_c^i)^{-1} \mathbf{L}^i \quad (28)$$

式中, $\bar{\mathbf{Q}}_c^i = \bar{\mathbf{Q}}_2 + \mu^i \mathbf{M}^i \bar{\mathbf{Q}}_1 (\mathbf{M}^i)^T \mu^i$ 。采用类似于式(13)~(15)的迭代过程,在给定的阈值条件下,可获得参数的最终估计值及其精度评定指标。

3 算例分析

设有均匀分布的 25 个点,原坐标系下坐标为

(x_1, y_1, z_1) ; 坐标转换的 7 参数分别为平移参数 $(X_0, Y_0, Z_0) = (1\ 000, 1\ 000, 1\ 000)\text{m}$; 尺度因子 $\mu = 2.0$; 旋转参数 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1.0, 0.5, 1.5)$ rad; 计算得到目标坐标系下的坐标为 (x_2, y_2, z_2) 。

随机选择 18 个点作为公共点, 另外 7 个点作为检验点。采用正态分布函数, 对公共点在原坐标系和目标坐标系下的坐标真值加入不等精度的随机误差, 其数学期望为 0, 标准差在 $0 \sim 0.05\text{ m}$ 间随机产生, 表示为 $(dx_1, dy_1, dz_1), (dx_2, dy_2, dz_2)$, 进而获得 18 个点在两套坐标系下的仿真坐标 $(x_1 + dx_1, y_1 + dy_1, z_1 + dz_1), (x_2 + dx_2, y_2 + dy_2, z_2 + dz_2)$ 。粗差的位置随机产生, 大小为标准差的 5~20 倍, 加入粗差个数分别为 1、3、5。同样, 对 7 个检验点在原坐标系下的坐标真值加入随机误差, 随机误差的产生方式与公共点相同, 并保留其在目标坐标系下的坐标真值, 用于分析不同方案的性能; 仿真次数为 500。

采用 6 种方案进行参数估计, 无粗差情况下: (1) 方案 1, 经典最小二乘算法 (LS); (2) 方案 2, 文献 [14] 提出的通用整体最小二乘算法 (WTLS); (3) 方案 3, 本文提出的基于 GH 模型的整体最小二乘算法 (GH-WTLS)。有粗差情况下: (4) 方案 4, 本文提出的基于 GH 模型的整体最小二乘算法 (GH-WTLS); (5) 方案 5, 采用文献 [24] 提出的 RWTLS 方法对 GH 模型进行参数估计 (RWTLS); (6) 方案 6, 本文提出的 GH 模型的抗差估计算法 (GH-RWTLS)。

表 1~3 分别给出了加入不同数目粗差、6 种方案求得的参数估值的均方根误差。可知: (1) 方案 2 和 3 的均方根误差明显小于方案 1。即不含有粗差时, WTLS 方法的估计结果优于 LS, 说明了整体最小二乘顾及系数矩阵中随机误差的合理性; (2) 方案 2 与方案 3 的各项指标一致, 说明了本文方法的正确性, 且本文方法较文献 [14] 的方法, 估计参数数目由 61 个减少至 7 个, 矩阵计算维数大大降低; (3) 比较方案 3 与方案 4, 受粗差影响, 方案 4 参数估值的均方根误差明显增大, 即整体最小二乘算法抵抗粗差的能力较差; (4) 方案 5、6 与方案 4 相比较, 参数估值的均方根误差得到了不同程度的减小, 即采用抗差估计方法可以削弱粗差对参数估值的影响, 提高估计精度; (5) 无论加入几个粗差, 方案 6 估值的精确度均优于方案 5, 且随着粗差的增多, 优势更为明显。主要是由于在非等精度观测值条件下, 方案 5 构建的检验量未顾及结构空间的影响。进一步比较方案 5、6, 图 1 给出了加入 3 个粗差时, 方案 5、6 的参数估计值与真值的差值序列, 方案 6 对应的序列收敛程度明显优于方案 5, 参数估值更为稳健。

为了检验上述不同粗差个数条件下、不同方案求得的转换参数的外符合精度, 对 7 个检查点 (无粗差) 进行坐标转换, 并与对应的目标坐标下的坐标真值进行对比。重点比较方案 5 和方案 6 的转换结果, 表 4~6 分别给出了采用在 1 个粗差、3 个粗差和 5 个粗差情况下求得的转换参数, 进行检查点坐标转换, 以及在 X、Y、Z 3 个方向上

表 1 存在 1 个粗差时各方案的均方根误差对比

Tab.1 Root Mean Square Errors of Estimated Parameters for Different Schemes with One Outlier

方案	X_0/m	Y_0/m	Z_0/m	$\mu/(10^{-5}\text{ rad})$	$\alpha_1/(10^{-5}\text{ rad})$	$\alpha_2/(10^{-5}\text{ rad})$	$\alpha_3/(10^{-5}\text{ rad})$
方案 1	19.302 1	10.579 6	15.580 1	2.600	1.510	1.160	1.750
方案 2	3.922 1	2.666 3	3.613 2	0.632	0.405	0.351	0.366
方案 3	3.92 21	2.666 3	3.613 2	0.632	0.405	0.351	0.366
方案 4	6.470 3	3.981 9	5.938 8	1.010	0.644	0.557	0.570
方案 5	4.502 9	3.163 6	4.381 6	0.696	0.453	0.410	0.452
方案 6	4.194 9	2.907 2	4.106 6	0.666	0.435	0.382	0.407

表 2 存在 3 个粗差时各方案的均方根误差对比

Tab.3 Root Mean Square Errors of Estimated Parameters for Different Schemes with Three Outliers

方案	X_0/m	Y_0/m	Z_0/m	$\mu/(10^{-5}\text{ rad})$	$\alpha_1/(10^{-5}\text{ rad})$	$\alpha_2/(10^{-5}\text{ rad})$	$\alpha_3/(10^{-5}\text{ rad})$
方案 1	10.307 9	12.340 7	18.474 0	1.460	1.390	1.730	1.130
方案 2	3.752 9	2.956 4	2.844 9	0.507	0.289	0.311	0.417
方案 3	3.752 9	2.956 4	2.844 9	0.507	0.289	0.311	0.417
方案 4	8.797 8	6.880 5	6.709 9	1.230	0.664	0.770	0.952
方案 5	7.068 0	5.744 2	5.810 6	0.978	0.592	0.628	0.798
方案 6	4.695 8	3.896 1	3.931 2	0.671	0.404	0.413	0.518

表3 存在5个粗差时各方案的均方根误差对比

Tab.3 Root Mean Square Errors of Estimated Parameters for Different Schemes with Five Outliers

方案	X_0/m	Y_0/m	Z_0/m	$\mu/(10^{-5} \text{ rad})$	$\alpha_1/(10^{-5} \text{ rad})$	$\alpha_2/(10^{-5} \text{ rad})$	$\alpha_3/(10^{-5} \text{ rad})$
方案1	12.748 6	11.219 6	15.764 9	2.250	1.790	1.150	1.400
方案2	3.414 0	3.380 1	4.576 3	0.610	0.469	0.380	0.424
方案3	3.414 0	3.380 1	4.576 3	0.610	0.469	0.380	0.424
方案4	10.173 6	10.600 6	14.184 5	1.960	1.480	1.120	1.320
方案5	8.900 8	8.467 6	11.919 8	1.580	1.290	0.956	1.110
方案6	6.064 6	6.039 3	7.999 3	1.090	0.818	0.639	0.757

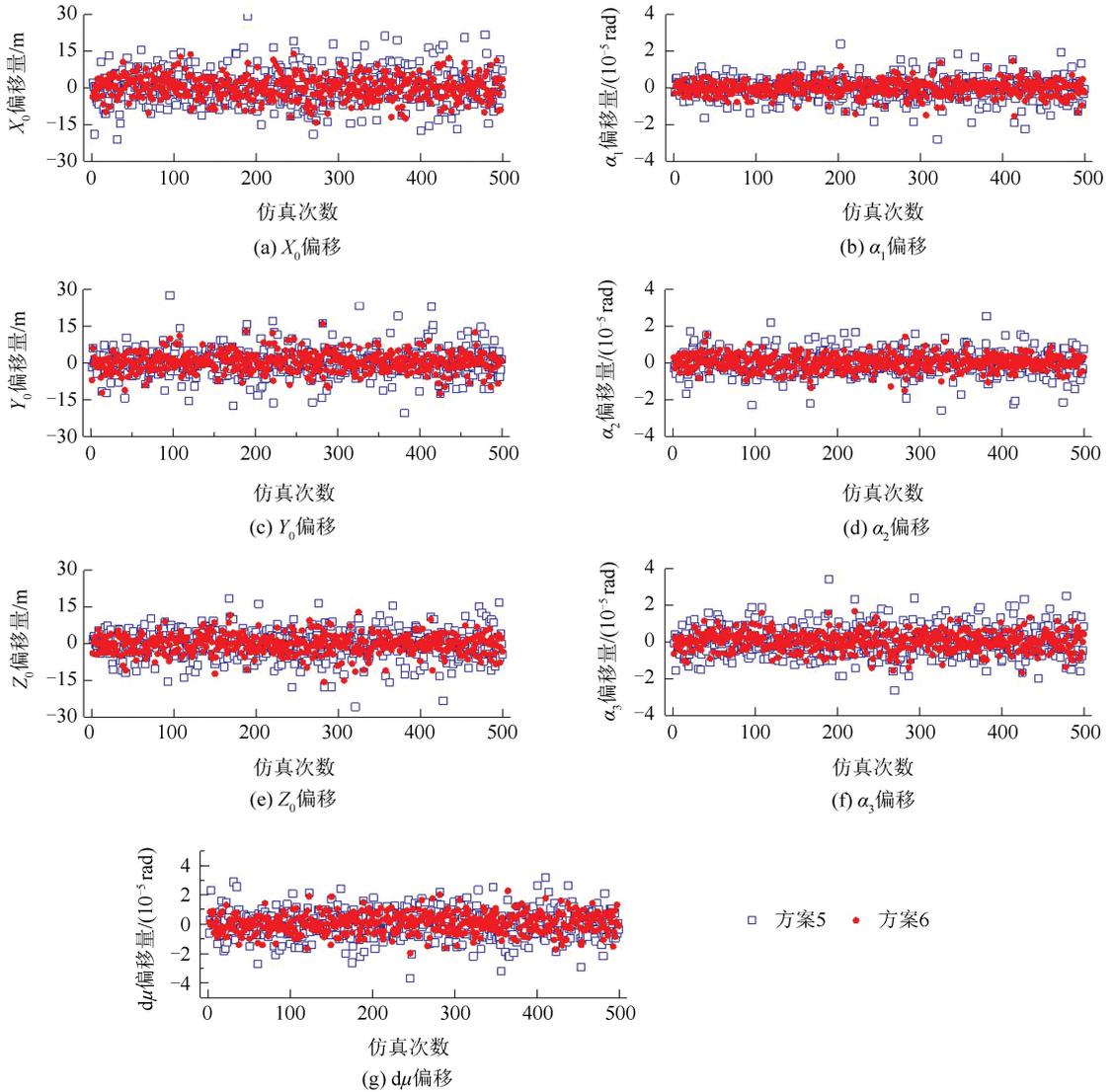


图1 方案5和6估值与真值的差值序列(3个粗差)

Fig.1 Difference Values Between Truth Values and Estimated Results of Schemes 5 and 6 with Three Outliers

的均方根误差。总体上,对于不同的粗差数目,采用方案6得到的转换参数进行坐标转换,结果的均方根误差小于方案5;且随着粗差数目的增加,方案6的优势越显著,这与表1~3结果基本一致,表明了方案6的内外符合性均优于方案5,具有更好的抗差性能。

4 结 语

对三维坐标转换的GH模型,本文采用Newton-Gauss迭代算法,推导了该模型解算方法。在此基础上,基于标准化残差构造权因子函

表 4 方案 5 和方案 6 计算检查点的均方根误差(1 个粗差)/m

Tab.4 Root Mean Square Errors of Check Points for Schemes 5 and 6 with One Outlier/m

方向	方案	点位 1	点位 2	点位 3	点位 4	点位 5	点位 6	点位 7
X	方案 5	0.079 2	0.081 3	0.072 9	0.077 6	0.081 5	0.080 3	0.080 3
	方案 6	0.078 4	0.080 3	0.072 4	0.077 1	0.080 8	0.079 0	0.078 7
Y	方案 5	0.096 2	0.040 7	0.076 9	0.039 8	0.065 6	0.068 2	0.041 0
	方案 6	0.095 9	0.039 1	0.077 0	0.038 6	0.065 3	0.068 2	0.040 1
Z	方案 5	0.084 8	0.052 2	0.067 5	0.059 8	0.077 6	0.082 8	0.057 3
	方案 6	0.084 7	0.052 2	0.066 8	0.058 3	0.076 4	0.081 9	0.056 1

表 5 方案 5 和方案 6 计算检查点的均方根误差(3 个粗差)/m

Tab.5 Root Mean Square Errors of Check Points for Schemes 5 and 6 with Three Outliers/m

方向	方案	点位 1	点位 2	点位 3	点位 4	点位 5	点位 6	点位 7
X	方案 5	0.078 5	0.081 1	0.073 9	0.082 2	0.082 7	0.080 3	0.082 9
	方案 6	0.077 8	0.078 5	0.071 7	0.078 2	0.080 4	0.078 5	0.078 0
Y	方案 5	0.098 7	0.048 1	0.082 7	0.044 6	0.065 1	0.073 0	0.044 9
	方案 6	0.094 6	0.041 9	0.078 4	0.038 7	0.063 9	0.070 7	0.039 2
Z	方案 5	0.089 3	0.056 9	0.068 3	0.061 8	0.076 8	0.083 4	0.059 3
	方案 6	0.087 1	0.052 9	0.066 2	0.057 6	0.076 2	0.082 1	0.057 2

表 6 方案 5 和方案 6 计算检查点的均方根误差(5 个粗差)/m

Tab.6 Root Mean Square Errors of Check Points for Schemes 5 and 6 with Five Outliers/m

方向	方案	点位 1	点位 2	点位 3	点位 4	点位 5	点位 6	点位 7
X	方案 5	0.084 4	0.09 22	0.080 6	0.089 3	0.087 3	0.090 7	0.097 6
	方案 6	0.079 7	0.083 5	0.075 0	0.082 1	0.081 3	0.081 6	0.085 5
Y	方案 5	0.104 0	0.057 7	0.087 7	0.052 2	0.072 8	0.079 4	0.057 6
	方案 6	0.097 9	0.047 5	0.083 1	0.041 9	0.069 5	0.072 1	0.046 8
Z	方案 5	0.099 5	0.066 1	0.078 1	0.073 4	0.085 4	0.087 9	0.068 1
	方案 6	0.091 9	0.060 1	0.070 8	0.062 1	0.078 9	0.083 5	0.060 0

数,给出了该模型的抗差解法。通过理论推导和仿真实验分析,可得出:(1)GH 模型不受限制条件影响,适用于大角度的三维坐标转换问题,且相较于文献[14],解算结果完全一致,而待估参数的数目大大降低,其计算效率有一定程度的提高;(2)本文提出的抗差解法综合考虑了非等精度条件下可能出现的粗差对观测空间与结构空间的影响,仿真结果表现出了良好的稳健性。

参 考 文 献

[1] Grafarend E W. Nonlinear Analysis of the Three-Dimensional Datum Transformation [J]. *Journal of Geodesy*, 2003,77(1):66-76

[2] Yao Yibin, Huang Chengmeng, Li Chengchun, et al. A New Algorithm for Solution of Transformation Parameters of Big Rotation Angle's 3D Coordinate [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2012, 37(3): 253-256 (姚宜斌, 黄承猛, 李程春, 等. 一种适用于大角度三维坐标转换参数求解算法[J]. *武汉大学学报·信息科学版*, 2012, 37(3):253-256)

[3] Yang Yuanxi, Xu Tianhe. The Combined Method of

Datum Transformation Between Different Coordinate Systems [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2001, 26(6): 509-513 (杨元喜, 徐天河. 不同坐标系综合变换法[J]. *武汉大学学报·信息科学版*, 2001, 26(6): 509-513)

[4] Liu Dajie, Shi Yimin, Guo Jingjun. The Theory and Data Processing of Global Positioning System (GPS) [M]. Shanghai: Tongji University Press, 1996 (刘大杰, 施一民, 过静珺. 全球定位系统(GPS)的原理与数据处理[M]. 上海: 同济大学出版社, 1996)

[5] Zeng Wenxian, Tao Benzao. Non-linear Adjustment Model of Three-Dimensional Coordinate Transformation [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2003, 28(5): 566-568 (曾文宪, 陶本藻. 三维坐标转换的非线性模型[J]. *武汉大学学报·信息科学版*, 2003, 28(5): 566-568)

[6] Lu Jue, Chen Yi, Zheng Bo. Total Least Squares to Three-Dimensional Datum Transformation [J]. *Journal of Geodesy and Geodynamics*, 2008, 28(5): 77-81 (陆珏, 陈义, 郑波. 总体最小二乘方法在三坐标转换中的应用[J]. *大地测量学与地球动力学*, 2008, 28(5): 77-81)

[7] Golub H G, Vanloan F C. An Analysis of the Total

- Least Squares Problem[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1980, 17(6): 883-893
- [8] Schaffrin B, Felus Y A. On the Multivariate Total Least-Squares Approach to Empirical Coordinate Transformations[J]. *Journal of Geodesy*, 2008, 82(6): 373-383
- [9] Felus F, Burtch R. On Symmetrical Three-Dimensional Datum Conversion[J]. *GPS Solutions*, 2009, 13(1): 65-74
- [10] Shen Yunzhong, Li Bofeng, Chen Yi. An Iterative Solution of Weighted Total Least-Squares Adjustment[J]. *Journal of Geodesy*, 2011, 85(4): 229-238
- [11] Xu Peiliang, Liu Jingnan, Shi Chuang. Total Least Squares Adjustment in Partial Errors-in-Variables Models: Algorithm and Statistical Analysis [J]. *Journal of Geodesy*, 2012, 86(8): 661-675
- [12] Xu Peiliang, Liu Jingnan. Variance Components in Errors-in-Variables Models: Estimability, Stability and Bias Analysis[J]. *Journal of Geodesy*, 2014, 88(8): 719-734
- [13] Wei Erhu, Yin Zhixiang, Li Guangwen, et al. On 3D Coordinate Transformation with Virtual Observation Method[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2014, 39(2): 152-156 (魏二虎, 殷志祥, 李广文, 等. 虚拟观测值法在三维坐标转换中的应用研究[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2014, 39(2): 152-156)
- [14] Fang Xing, Zeng Wenxian, Liu Jingnan, et al. A General Total Least Squares Algorithm for Three-Dimensional Coordinate Transformations [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2014, 43(11): 1 139-1 143 (方兴, 曾文宪, 刘经南, 等. 三维坐标转换的通用整体最小二乘算法[J]. 测绘学报, 2014, 43(11): 1 139-1 143)
- [15] Neitzel F. Generalization of Total Least-Squares on Example of Unweighted and Weighted 2D Similarity Transformation [J]. *Journal of Geodesy*, 2010, 84(12): 751-762
- [16] Fang Xing, Zeng Wenxian, Liu Jingnan, et al. Mixed LS-TLS Estimation Based on Nonlinear Gauss-Helmert Model[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2016, 45(3): 291-296 (方兴, 曾文宪, 刘经南, 等. 基于非线性高斯-赫尔默特模型的混合整体最小二乘估计[J]. 测绘学报, 2016, 45(3): 291-296)
- [17] Chang Guobin. On Least-Squares Solution to 3D Similarity Transformation Problem Under Gauss-Helmert Model[J]. *Journal of Geodesy*, 2015, 89(6): 573-576
- [18] Ou Jikun. A New Method to Detect Gross Errors: Quasi-Accurate Detection Method [J]. *Chinese Science Bulletin*, 1999, 44(16): 1 777-1 781 (欧吉坤. 一种检测粗差的新方法——拟准测定法[J]. 科学通报, 1999, 44(16): 1 777-1 781)
- [19] Ou Jikun. Quasi-Accurate Detection of Gross Errors (QUAD) [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 1999, 28(1): 15-20 (欧吉坤. 粗差的拟准检定法(QUAD法)[J]. 测绘学报, 1999, 28(1): 15-20)
- [20] Yang Yuanxi. Robust Estimation of Geodetic Datum Transformation [J]. *Journal of Geodesy*, 1999, 73(5): 268-274
- [21] Zhou Jiangwen, Huang Youcai, Yang Yuanxi, et al. Robust Least Squares Method [M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 1997 (周江文, 黄幼才, 杨元喜, 等. 抗差估计最小二乘法[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1997)
- [22] Chen Yi, Lu Jue. Performing 3D Similarity Transformation by Robust Total Least Squares [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2012, 41(5): 715-722 (陈义, 陆珏. 以三维坐标转换为例解算稳健总体最小二乘方法[J]. 测绘学报, 2012, 41(5): 715-722)
- [23] Lu Jue, Chen Yi, Li Bofeng, et al. Robust Total Least Squares with Reweighting Iteration for Three-Dimensional Similarity Transformation [J]. *Survey Review*, 2014, 46(334): 28-36
- [24] Mahboub V, Amirismkooei A R, Sharifi M A. Iteratively Reweighted Total Least Squares: A Robust Estimation in Errors-in-Variables Models [J]. *Survey Review*, 2013, 45(329): 92-99
- [25] Gong Xunqiang, Li Zhilin. A Robust Weighted Total Least Squares Method [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2014, 43(9): 888-894 (龚循强, 李志林. 稳健加权总体最小二乘法[J]. 测绘学报, 2014, 43(9): 888-894)
- [26] Wang Bin, Li Jiancheng, Gao Jingxiang, et al. Newton-Gauss Algorithm of Robust Weighted Total Least Squares Model [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2015, 44(6): 602-608 (王彬, 李建成, 高井祥, 等. 抗差加权整体最小二乘模型的牛顿-高斯算法[J]. 测绘学报, 2015, 44(6): 602-608)
- [27] Yang Yuanxi. Robust Estimation for Correlated Observations Based on Bifactor Equivalent Weights [J]. *Journal of Geodesy*, 2002, 76(6): 353-358

Three-Dimensional Coordinate Transformation Model and Its Robust Estimation Method Under Gauss-Helmert Model

LIU Chao¹ WANG Bin² ZHAO Xingwang¹ YU Xuexiang¹

1 School of Surveying and Mapping, Anhui University of Science and Technology, Huainan 232001, China

2 School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan 430079, China

Abstract: For three-dimensional coordinate transformation, it's impossible using the Gauss-Markov model to obtain optimal parameter estimation from the functional model with error in its coefficient matrix. On the other hand, errors-in-variables model has difficulty expressing the functional model, and partial errors-in-variables model is complex as well as too much parameters to be estimated for the quasi-observation method. Therefore, Gauss-Helmert model is employed for three-dimensional coordinate transformation. The target function of the proposed model is established based on Newton-Gauss iterative algorithm, and the estimated method and its derivation procedure also are presented in this paper. Beyond the above process, we proposed a new robust estimation method for the proposed model, which is based on the normalized residual error and takes the influence of gross error on both observation and structure spaces into consideration. Meanwhile, derivational process of statistical tests and iterative algorithm are presented. The simulation experiment results show that the proposed estimation method has the same accuracy as the traditional method, which has robust with angular dimension and other additional conditions, but less estimation parameters. In addition, the new robust estimation method has effective robustness when comparing with the other existing robust total least square methods for the coordinate transformation.

Key words: 3D coordinate transformation; Gauss-Helmert model; total least squares; normalized residual error; robust estimation

First author: LIU Chao, PhD, associate professor, specializes in deformation monitoring data analysis. E-mail: chaoliu0202@gmail.com

Foundation support: The National Natural Science Foundation of China, Nos. 41404004, 41474026; the Postdoctoral Science Foundation of Anhui Province of China, No. 2015B044; the Anhui University of Science and Technology Foundation, No. 11152.