

# GPS RTK 点位测量随机误差二维空间分布模式研究

邓彩群<sup>1,2,3</sup> 刘兆礼<sup>1,2</sup>

1 中国科学院东北地理与农业生态研究所,吉林 长春,130102  
2 中国科学院大学,北京,100049  
3 吉林建筑大学测绘与勘查工程学院,吉林 长春,130118

**摘 要:**矢量空间数据的可用性取决于其空间位置不确定性,直接受控于点元位置误差的二维空间概率分布模式。应用 GPS RTK 技术,对选定测量点的空间位置进行重复观测,累积观测 20 d,采用一维、二维正态分布检验与数学模型拟合 3 种分析方法,研究了 GPS RTK 测点误差空间概率分布模式。结果表明,GPS RTK 测点误差空间分布呈现为具有一定方向的二维正态分布形式,并且这种分布形式的显著性随着点元位置观测时间的缩短而不断提升。所得到的 GPS RTK 测点误差空间概率分布模式可为其测点误差空间分布影响因素分析与数学预测模型构建奠定基础,并有助于推动矢量空间数据位置不确定性的理论研究。

**关键词:**空间位置不确定性;GPS RTK;测点随机误差;误差分布模式;正态分布检验

**中图分类号:**P228;P207      **文献标志码:**A

矢量空间数据利用点元、线元和面元描述空间实体,在各领域得到了广泛应用。矢量空间数据的位置不确定性具体表现为:点元用点位误差二维空间分布模型描述;线元、面元则用误差分布带描述,一般基于误差传播定律,结合点元误差二维分布模式,通过数学推导获得<sup>[1]</sup>。只有对矢量空间数据的位置不确定性进行有效描述,才能保证其产品在实际应用过程中的可靠性。点元位置的不确定性直接影响线元、面元位置的不确定性<sup>[1-4]</sup>,因此深入研究点元误差分布模型是非常必要的。

近年来,点元误差分布模式研究主要集中在数字化对点误差方面。早期研究表明,点元数字化误差服从正态分布,随后有学者发现其服从 NL 分布<sup>[5]</sup>,近期多位学者得出其服从  $P \approx 1.6$  的  $P$ -范分布<sup>[6]</sup>。上述点元误差分布模式的研究对象均为一维分布状况。在测量学领域,点元误差模型的表示方法大都利用点位协方差阵推算得到<sup>[7]</sup>。

关于全球卫星导航系统(global navigation satellite system, GNSS)的误差研究多集中在误差影响因素分析与误差降低方法上<sup>[8]</sup>。只有少数学者对其测点误差概率分布形式开展了初步研

究,通过对 GPS RTK 测点数据的  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  坐标分量进行分析,得出其误差分布形式既不符合正态分布也不完全符合  $P$ -范分布的结论<sup>[9-10]</sup>。由于 GNSS 测点原理不同于传统测量方式,其点元误差分布是否仍遵循以往的误差椭圆模式值得深入研究。本文利用 GPS RTK 定位技术,对选定测量点进行连续重复观测,采用一维、二维正态分布检验与数学模型拟合等分析方法,研究了 GPS RTK 测点误差空间分布模式,为下一步开展点位误差空间分布影响因素分析与数学预测模型构建奠定基础。

## 1 实验数据获取

本次实验选择了两个实验场地(图 1),一个是某农业大学的实验田(实验场地 1),另一个是某大学实验楼楼顶(实验场地 2)。两个实验场地距离约 960 m,地理坐标约为  $\varphi = 43^\circ 48' \text{N}$ ,  $\lambda = 125^\circ 24' \text{E}$ 。

影响 GPS 测量数据质量的主要因素包括大气层干扰、钟差、卫星星历误差、多路径效应、卫星几何分布等<sup>[11]</sup>,其中与观测点相关的因素主要是

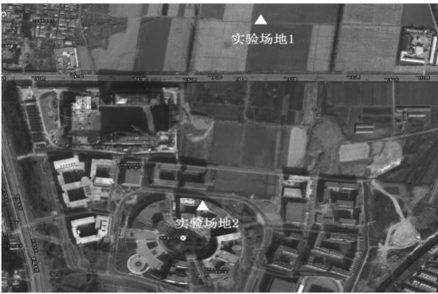


图 1 实验场地

Fig.1 Test Sites

多路径效应和卫星几何分布。为了降低多路径效应,观测点应远离强反射面;为了获得优化的卫星几何分布,观测点应远离可能形成遮挡的地物。实验场地 1 的面积为 2 km<sup>2</sup> 左右,附近没有强反射面,整个实验田只有玉米和大豆,观测点视野开阔;实验场地 2 整体被厚度约 10 mm 的黑色防水橡胶毡覆盖,四周也没有强反射物,楼顶较高,可确保观测点不被遮挡。

观测基线布设为 100 m 左右,则基站与流动站的多项系统误差具有强相关性,通过差分技术可以有效削弱多项相关系统误差<sup>[12]</sup>,从而保证 GPS RTK 点位测量数据尽可能只含有随机误差项。由于两个实验场地的面积足够大,场地内部被较低反射率地物所覆盖,观测站点距离邻近较强反射性地物远大于 50 m,因此多路径误差(短基线观测时的主要系统误差)得到有效降低,可归入随机误差<sup>[13]</sup>。

本次实验日期为 2013 年 6 月到 10 月期间的 20 d,在实验场地 1 上观测 16 d,在实验场地 2 上观测 4 d,大致观测时间段为 09:00~16:00。实验使用仪器为 Spectra Precision Epoch 50 GPS,手簿软件为 Survey Pro V5.1,记录时间间隔为 2 s,截止高度角为 10°。实验过程中将流动站接收机固定在观测站点上,对选定观测点进行多次重复观测获取样本数据。

2 数据分析方法

2.1 一维正态分布统计检验

选取时间为 2013 年 10 月 9 日 13:00~14:00 的观测数据,观察 GPS RTK 点位测量随机误差分布情况(图 2),发现其分布存在两个极轴。通过点位协方差矩阵计算误差椭圆的几何参量,得到误差分布极轴的大致方向<sup>[14]</sup>。

为了深入分析点位测量误差在极轴方向上的一维概率分布特性,将观测点阵在两个极轴方向

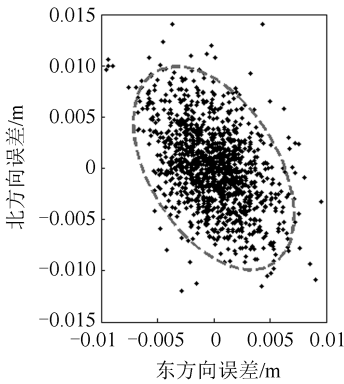


图 2 GPS RTK 观测点阵及正态置信椭圆  
Fig.2 Measured Points by GPS RTK and the Normal Confidence Ellipse

上进行等距离散化处理。具体方法为:①旋转观测点阵,使其分布的极轴方向与坐标轴方向重合;②推算与 95% 概率误差椭圆相切的矩形,矩形内部的观测点阵为进行统计检验的样本数据;③将矩形划分为 21 个(条带数通过反复实验确定)平行于极轴的等宽条带,利用这些条带将分析范围内的观测点阵进行等距离散化,如图 3 所示。

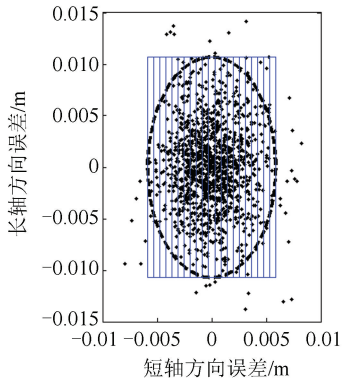


图 3 观测点阵离散化处理  
Fig.3 Discretization Processing of the Measured Points

将图 3 中纵横坐标两个方向(即长轴与短轴方向)每个条带内的观测点阵作为分析对象,应用 Matlab 软件中的 Lilliefors test 检验函数对其进行一维正态分布检验,统计所有条带的检验结果,确定观测点阵在该方向上是否通过检验。设定某方向上通过一维正态分布检验的衡量指标,用  $N$  表示:

$$N = \frac{\text{通过检验的条带个数}}{\text{参与检验的条带总数}}$$

(1)

当  $N > 0.85$  时,认定点位测量随机误差在某方向上通过一维正态分布检验。长轴与短轴方向通过一维正态分布检验的衡量指标分别用  $N_L$  和  $N_S$  表示。当  $N_L > 0.85$  并且  $N_S > 0.85$  时,则认定点位测量随机误差整体通过一维正态分布检验。

## 2.2 二维正态分布统计检验

二元正态分布检验方法至今没有形成普遍认可的理论体系<sup>[15-16]</sup>。目前,在 SPSS、SAS 等主流专业统计软件中均不含有二元正态分布检验工具<sup>[17]</sup>。R 软件作为开源软件,其统计工具得到快速更新,其中 ICS 程序包提供了两个分别基于峰度和偏度统计量的多元正态分布检验函数<sup>[18-19]</sup>,用来检验多元变量的正态性。其中,峰度统计量为两个散列矩阵间的比值,偏度统计量为两个位置向量的马氏距离,它们采用的检验方法比传统检验方法具有更高的分析效率<sup>[20]</sup>。本文选择基于偏度统计量的检验函数对点位测量随机误差进

$$Z = \frac{C}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\} \quad (2)$$

式中, $C$  为选定概率对应的常数; $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$  分别为随机向量  $x$ 、 $y$  的中误差; $\mu_x$ 、 $\mu_y$  分别为  $x$ 、 $y$  的数学期望; $\rho$  为  $x$  与  $y$  的相关系数。

可决系数  $R^2$  为度量模型拟合优度的主要指标,本文将用来评估二维正态分布模型拟合是否成功。在实际模型拟合过程中,对于  $R^2$  取多大值才算拟合成功,国内外没有统一标准,需要根据具体情况而定。本文设定:当  $R^2 \geq 0.85$  时,即为二维正态分布模型拟合成功。

## 3 结果与讨论

由于影响 GPS RTK 点位测量误差的诸多因素随观测时长发生变化,因此本文将观测数据按照不同时长进行分组。在进行分组处理时,观测时长过长将带来点位测量误差分布的不稳定性,故将最长分组时长设定为 60 min;同时,考虑到正态分布检验需要一定数量的样本点,故 5 min 被当作最短分组时长。在观测过程中,某些时刻无法得到固定解,为使分析结果具有代表性,选择超过 2/3 观测时长且有固定解的数据组作为分析对象。

### 3.1 一维正态分布统计检验

在 Matlab 中,设定显著性水平  $\alpha=5\%$ ,对分组观测数据进行一维正态分布统计检验。结合一维正态分布检验衡量指标  $N$ ,构建一维正态分布检验的整体通过率指标,用  $T$  表示:

$$T = \frac{\text{通过检验的分组个数}}{\text{参与检验的分组总数}} \times 100\% \quad (3)$$

表 1 给出了不同观测时长的点位观测随机误差一维正态分布检验结果。结果显示,在两极轴方向上,各观测时长的点位测量随机误差一维正态

行二元正态分布的统计检验。

### 2.3 二维正态分布模型拟合

本文拟利用数学模型拟合方法,判断 GPS RTK 点位测量随机误差是否遵循二维正态分布,具体步骤为:①将观测点阵进行网格化处理。既需保证网格具有足够的密度,又需使网格较少出现奇异值。②统计每个网格内观测点的个数,并将其作为观测点频率分布值  $Z$ ,每个网格中心作为其位置坐标点  $(x,y)$ 。③利用 Matlab 中的曲面拟合函数对点位测量随机误差进行二维正态分布模型拟合,本文用到的二维正态分布模型函数为:

分布检验通过率都很高,其  $T$  值均在 90% 以上,长轴的通过率比短轴略大;两者结合形成的一维正态分布检验整体通过率也很高,其均值接近 90%,因此从一维正态分布检验的角度可以推论 GPS RTK 测点误差具有较为明显的正态分布特征。

表 1 测点误差一维正态分布检验通过率( $\alpha=5\%$ )  
Tab.1 Test Passing Rates of Unidimensional Normal Distribution for Measured Points Errors( $\alpha=5\%$ )

观测时长	正态分布检验通过率 $T/\%$		
	长轴方向	短轴方向	长短轴结合
60 min	93.9	92.7	87.8
30 min	96.4	91.6	89.8
20 min	94.5	94.1	89.8
15 min	95.8	94.4	90.8
10 min	95.6	96.0	92.6
5 min	92.0	90.7	84.3
均值	94.7	93.2	89.2
标准差	2.6	3.9	8.1

文献[9-10]得到的结论为 GPS RTK 测量数据误差既不符合一维正态分布,也不完全符合  $P$ -范分布。该结论与本文截然不同,其产生的主要原因是两者是在不同坐标体系下进行的测点误差分布统计检验。如图 2、图 3 所示,文献中的误差分布统计检验对象是测点误差在南-北与东-西两个方向上的坐标分量,而本文则将两个极轴方向上的坐标分量作为统计检验的对象,显然两个坐标系之间存在一定的角度。本质区别在于本文分析的两个一维变量相互独立,由两个一维变量的正态分布可以推论出二维联合正态分布;而上述文献中没有考虑统计分析对象,因此其检验结果难以反映测点误差的真实分布情况。

比较表 1 中的检验结果,发现观测时长从 60 min 逐渐缩短到 10 min 过程中,点位观测随机误差的一维正态分布检验整体通过率不断升高;而



从 10 min 到 5 min,则呈现下降趋势。形成这一现象的原因可能是:在观测时长较长时,卫星几何分布等因素呈现趋势性变化,则点位观测随机误差存在较大变化;而在观测时长变短时,每一因素的影响都较小且量级相当,造成的误差当属于偶然误差<sup>[21]</sup>,因而具有较为显著的正态分布特征;当观测时长缩短为 5 min 时,由于观测点样本数量已变得不足以完整体现误差的正态分布形式,其检验通过率自然降低了。

3.2 二维正态分布统计检验

应用 R 软件中的多元正态分布检验函数对点位观测随机误差数据进行二元正态分布统计检验,显著性水平  $\alpha$  设为 5%。利用式(3)计算不同分组时长的检验整体通过率;另外,为了分析点位观测误差二维正态分布的稳定性,分别计算每天的二维分布检验通过率,结果见表 2。

表 2 点位测量随机误差二维正态分布检验  
整体通过率( $\alpha=5\%$ )

观测日期	正态分布检验通过率 $T/\%$					
	60 min	30 min	20 min	15 min	10 min	5 min
2013-06-04	0.0	71.4	66.7	60.0	63.0	84.5
2013-06-19	66.7	42.9	63.6	71.4	68.2	83.3
2013-06-25	33.3	50.0	88.9	71.4	66.7	92.7
2013-07-10	0.0	37.5	30.8	42.9	65.4	78.8
2013-07-11	100.0	66.7	50.0	50.0	58.3	58.6
2013-07-12	66.7	63.6	72.2	100.0	85.3	95.6
2013-09-04	100.0	25.0	40.0	42.9	70.0	78.3
2013-09-09	0.0	66.7	71.4	65.0	69.0	87.7
2013-09-11	66.7	77.8	80.0	75.0	71.0	88.6
2013-09-12	33.3	62.5	75.0	75.0	75.0	82.8
2013-09-16	83.3	76.9	83.3	79.2	78.9	82.9
2013-09-18	50.0	81.8	82.4	66.7	91.2	91.2
2013-09-19	25.0	55.6	54.5	66.7	78.6	86.0
2013-09-20	16.7	60.0	68.8	65.0	70.6	84.7
2013-09-22	50.0	33.3	68.8	57.9	61.8	71.8
2013-09-24	50.0	40.0	28.6	60.0	50.0	70.6
2013-09-26	0.0	37.5	63.6	58.3	66.7	80.4
2013-09-28	100.0	100.0	81.3	78.9	82.8	89.1
2013-09-30	75.0	77.8	50.0	68.8	60.0	69.6
2013-10-09	0.0	44.4	57.1	61.1	60.0	83.3
标准差	35.9	19.5	17.2	13.1	10.1	8.9
检验整体通过率	48.8	58.9	66.3	67.9	70.3	83.0

从表 2 可以看出,随着观测时长的缩短,点位观测随机误差检验的整体通过率  $T$  呈现不断升高的趋势,由 60 min 时的 48.8%上升到 5 min 时的 83.0%,由此可以判断某些影响因素引起的系统误差随着观测时间的变短会显著变小,而随机误差逐渐占据主导地位。这一规律与一维正态分布检验结果较为一致,两者的差异体现在:对于 5 min 观测时长分组数据,二维正态分布检验通过率继续升高,而一维正态分布检验通过率则转为

降低,主要原因是在参与统计检验的测量数据中,前者包括 5 min 时段内的所有测量数据,而后者则只含有每个条带内少量的测量数据。总之,根据二维正态分布检验的整体通过率,也可以确定 GPS RTK 测点随机误差分布具有二维正态分布特性。

表 2 显示不同观测日的点位观测随机误差二维正态分布检验通过率存在一定差异,特别是在观测时长为 60 min 时,该差异较大。产生的原因主要有:①有些观测日长时间没有固定解,导致该天参与统计检验的分组数据特别少,容易出现极端情况;②每天气象等外界环境条件差别较大,由此产生的随机误差差别也就较大<sup>[8]</sup>。随着观测时长的逐渐变短,各日期之间通过正态分布统计检验的差异也在不断缩小,变动标准差由 60 min 时的 35.9%减小到 5 min 时的 8.9%,这时点位观测随机误差的正态分布特征表现得愈加稳定。

3.3 二维正态分布模型拟合

在 Matlab 中,利用式(2)对分组点位测量数据进行二维正态分布模型拟合。应用可决系数  $R^2$  判断误差分布是否具有二维正态分布特征。在此基础上,对各观测时长的测点误差拟合结果进行统计分析,引入二维正态分布模型拟合整体成功率指标进行评判,用  $F$  表示:

$$F = \frac{\text{成功拟合的分组个数}}{\text{参与拟合的分组总数}} \times 100\% \quad (4)$$

对各观测时长的所有测点误差分组数据进行拟合,统计结果见表 3。表 3 显示,所有观测时长的点位测量随机误差二维正态分布模型拟合的整体成功率都超过 90%,并且  $R^2$  均值都大于 0.95,由此说明 GPS RTK 点位测量随机误差较好地遵循了二维正态分布规律。随着观测时长从 60 min 逐步缩短至 5 min,模型拟合整体成功率呈现不断上升的趋势;尽管  $R^2$  整体水平很高,但也随着观测时长的缩短呈现缓慢增加的趋势。值得注意的是,因短时段内观测数据数量有限,则由此得到的拟合结果可靠性不高;但本文最终结论综合了 3 种方法的分析结果,因此具有较高的可信度。

利用二维正态分布模型拟合参数可以计算得到误差椭圆的几何参量,其中椭圆的长、短半轴大小是衡量点位测量随机误差大小的重要指标,分别用  $E$ 、 $F$  表示,长、短半轴变动标准差分别用  $\sigma_E$  和  $\sigma_F$  表示。表 3 统计了分布模型拟合成功时,利用拟合参数计算得到的  $1\sigma$  标准误差椭圆的长、短半轴情况。表 3 显示,不同观测时长的  $E$ 、 $F$  均值较接近,其标准差也较小,说明 GPS RTK 的点

位测量精度较为稳定,其随机误差空间分布情况也很稳定。

表 3 点位测量随机误差二维正态分布模型拟合结果  
Tab.3 Fitting Results of Two-Dimensional Normal Distribution for Measured Points Errors

观测 时长 /min	拟合结果		1σ 误差椭圆几何参量			
	拟合成功 率 F/%	R <sup>2</sup>	E/mm	F/mm	σ <sub>E</sub> /mm	σ <sub>F</sub> /mm
60	93.9	0.965	3.5	2.2	0.721	0.440
30	97.6	0.966	3.7	2.2	0.923	0.518
20	97.6	0.970	3.7	2.2	0.895	0.481
15	97.9	0.983	3.8	2.3	0.902	0.456
10	99.4	0.971	3.7	2.2	0.903	0.463
5	99.4	0.990	3.8	2.3	0.866	0.505

3.4 应用分析

本文选择实验区 2013 年 6 月 25 日 10:00~11:00 期间的 GPS RTK 点位测量数据进行随机误差二维正态分布模型拟合(见图4),其中可决

系数  $R^2=0.967$ 。在该时间段内,同时对一多边形地物进行测量,获取矢量图形数据,如图 5 所示。表 4 列出了模型拟合的结果以及依据拟合参数计算的误差椭圆(置信概率为 95.6%,即  $2.5\sigma$ )的相关参量(长轴与坐标纵轴方向夹角用  $\theta$  表示)。在此基础上,利用线元广义误差带构建多边形矢量数据空间分布模型(详见文献[1])。图 5 显示了多边形各顶点的误差椭圆和各条线段的误差带,给出了多边形图形数据的空间位置不确定性状况。

表 4 GPS RTK 测点误差模型拟合结果以及误差椭圆的几何参量

拟合参数			2.5σ 误差椭圆几何参量		
σ <sub>x</sub> /mm	σ <sub>y</sub> /mm	ρ	E/mm	F/mm	θ/(°)
2.33	3.87	0.45	10.15	4.96	20.2

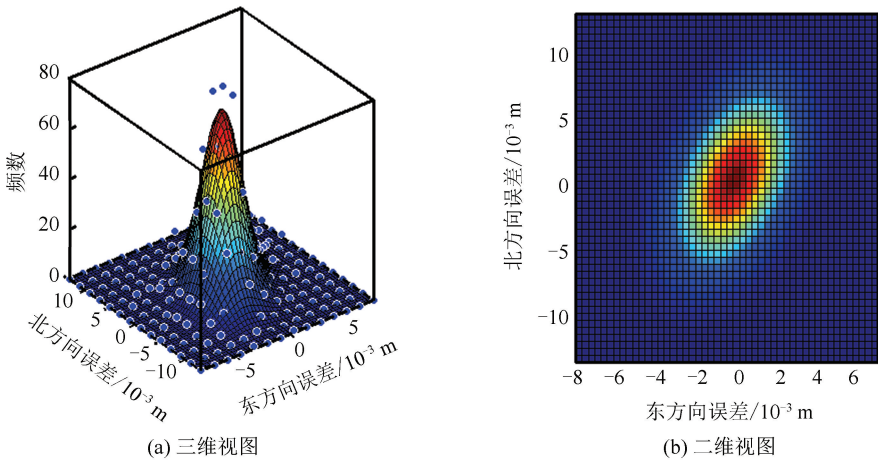


图 4 点位测量随机误差二维正态分布拟合结果  
Fig.4 Fitting Results of Two-Dimensional Normal Distribution for Measured Points Errors

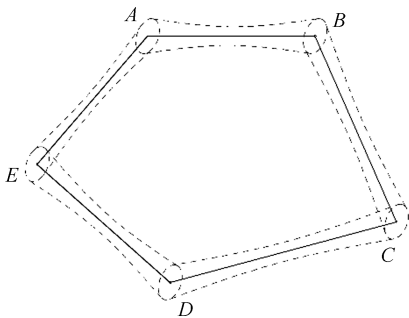


图 5 GPS RTK 测绘多边形地物的图形数据随机误差分布(置信概率为 95.6%)  
Fig.5 Error Zone of Polygon Feature Surveyed by GPS RTK (Confidence Probability is 95.6%)

4 结 语

本文对 GPS RTK 点位测量随机误差空间分布模式进行了深入分析。采用的数学分析方法包括一维与二维正态分布统计检验以及二维正态分布模型拟合。

1)通过一维正态分布统计检验,发现在两个极轴方向上,GPS RTK 点位测量随机误差分布具有较好的一维正态分布特性;同时,正态分布特性随着观测时长的逐步缩短而变得更加显著,这种趋势在 5 min 观测时长时发生逆转,主要原因是由于条带内稀少样本数量造成一维正态分布统

计检验难以通过。

2) 二维正态分布统计检验的结果揭示了 GPS RTK 点位测量随机误差具有较好的二维正态分布特性, 相比于一维正态分布统计检验, 其检验整体通过率相对差一些。二维正态分布检验整体通过率也与观测时长密切相关, 随着观测时长的缩短, 其整体检验通过率也在逐步提升。

3) 采用模型拟合方法, 得出 GPS RTK 点位测量随机误差的正态分布模型拟合整体成功率在 93.9% 以上,  $R^2$  平均值不小于 0.965, 并且随着观测时长的逐步缩短, 两项指标均呈现不断上升趋势, 说明测点随机误差空间分布与二维正态分布模型之间具有很好的契合度。

综合上述 3 种方法的分析结果, 可以得出 GPS RTK 点位测量随机误差呈现为具有一定方向的二维正态分布形式, 并且这种分布形式的显著性随着观测时长的缩短而不断提升。Santerre 提出, GPS 卫星构型是测定点位置信椭圆方向的决定性因素<sup>[22]</sup>。因此可以推论, GPS RTK 测点误差分布形态形成的主要原因是 GPS 卫星构型。

基于以上研究结论, 通过 GPS RTK 点位测量随机误差二维正态分布模型拟合, 并结合 GPS 点位测量的影响因素分析, 可以建立 GPS RTK 点位测量随机误差空间分布的通用预测模型。另外, GPS RTK 点位测量随机误差空间分布模型也是建立线元和面元空间误差分布模型的理论基础和研究前提, 由此形成的线元和面元不确定性空间分布模型就不再是基于前提假设的数学推论, 而是基于实际点元误差分布模式的实用模型, 因而具有较大的应用前景。

参 考 文 献

[1] Shi Wenzhong. Principle of Modelling Uncertainties in Spatial Data and Analysis[M]. Beijing: Science Press, 2005(史文中.空间数据与空间分析不确定性原理[M].北京:科学出版社,2005)

[2] Li Deren, Peng Meiyun, Zhang Juqing. Modelling Positional Uncertainty of Line Primitives in GIS[J]. *Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping*, 1995, 20(4):283-288(李德仁, 彭美云, 张菊清. GIS 中线要素的定位不确定性模型研究[J]. 武汉测绘科技大学学报, 1995, 20(4): 283-288)

[3] Zhang Guoqin, Zhu Changqing, Li Guozhong. A Positional Uncertainty  $\epsilon_E$  Model for Line Segment Considering Error Ellipse Long Semi-axis as Error Band Width[J]. *Geomatics and Information Science*

*of Wuhan University*, 2010, 35(4):495-499(张国芹, 朱长青, 李国重. 以误差椭圆长半轴表示带宽的线元位置不确定性  $\epsilon_E$  模型[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2010, 35(4):495-499)

[4] Bian Yuxia, Liu Xuejun, Zhen Yan. Uncertainty Measurment Model of Three-Dimensional Polygon[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2015, 40(1):26-31(卞玉霞, 刘学军, 甄艳. 三维空间多边形的位置不确定性度量模型[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2015, 40(1):26-31)

[5] Meng Xiaolin, Shi Wenzhong, Liu Dajie. Statistical Tests of the Distribution of Errors in Manually Digitized Cartographic Lines[J]. *Geographic Information Sciences*, 1998, 4(1): 52-58

[6] Lan Yueming, Yang Xiaomei. The Distribution Test of Manual Digitization Map Error[J]. *Bulletin of Surveying and Mapping*, 2003(4):42-44(蓝悦明, 杨晓梅. 手工数字化地图误差的分布检验[J]. 测绘通报, 2003(4):42-44)

[7] Yang Yuanxi. Discussion on “A New Measure of Positional Error”[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2009,38(8): 280-282(杨元喜.关于“新的点位误差度量”的讨论[J]. 测绘学报, 2009,38(8):280-282)

[8] Luo X, Mayer M, Heck B. On the Probability Distribution of GNSS Carrier Phase Observations[J]. *GPS Solution*, 2011, 15(4):369-379

[9] Lan Yueming, Wang Nan. The Study of Probability Density Function for GPS RTK Observations[J]. *Bulletin of Surveying and Mapping*, 2011(2):6-7(蓝悦明, 王楠. GPS RTK 观测数据的概率密度函数研究[J]. 测绘通报, 2011(2):6-7)

[10] Zhou Fangbin, Zhu Jianjun, Chen Yongqi. Analysis of Error Distribution for GPS RTK Observations by Entropy[J]. *Bulletin of Surveying and Mapping*, 2012(11): 19-20(周访滨, 朱建军, 陈永奇. GPS RTK 观测数据误差分布的熵分析[J]. 测绘通报, 2012(11):19-20)

[11] Militino A F, Ugarte M D, Iribas J, et al. Mapping GPS Positional Errors Using Spatial Linear Mixed Models[J]. *Journal of Geodesy*, 2013, 87(7):675-685

[12] Ragheb A E, Clarke P J, Edwards S J. GPS Side-real Filtering: Coordinate- and Carrier-Phase-Level Strategies[J]. *Journal of Geodesy*, 2007, 81(5): 325-335

[13] Yuan Linguo, Huang Dingfa, Ding Xiaoli, et al. On the Influence of Signal Multipath Effects in GPS Carrier Phase Surveying[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2004, 33(3):210-215(袁林

果,黄丁发,丁晓利,等. GPS载波相位测量中的信号多路径效应影响研究[J]. 测绘学报, 2004, 33(3):210-215)

[14] Teunissen P J G, Odolinski R, Odijk D. Instantaneous BeiDou + GPS RTK Positioning with High Cut-Off Elevation Angles[J]. *Journal of Geodesy*, 2014,88(4):335-350

[15] Gao Huixuan. Applied Multivariate Statistical Analysis[M]. Beijing:Peking University Press,2005(高惠璇. 应用多元统计分析[M].北京:北京大学出版社,2005)

[16] Szekely G J, Rizzo M L. A New Test for Multivariate Normality[J]. *Journal of Multivariate Analysis*,2005, 93(1): 58-80

[17] Zhu Ning, Zhao Xiaoxiao, Tang Qinghua. Comparison of Three Methods for Multivariate Normality Test and SAS Program Design [J]. *Journal of Suzhou University (Natural Science Edition)*, 2012,28(3):20-25(朱宁,赵肖肖,唐庆华.多元正态性检验三种方法的比较及 SAS 程序设计[J].苏州大学学报(自然科学版), 2012, 28(3):20-25)

[18] Nordhausen K, Oja H, Tyler D E.Tools for Exploring Multivariate Data: The Package ICS[J]. *Journal of Statistical Software*, 2008, 28(6):1-31

[19] Ilmomen P, Oja H, Serfling R.On Invariant Coordinate System (ICS) Functionals[J]. *International Statistical Review*, 2012, 80(1):93-110

[20] Kankainen A, Taskinen S, Oja H. Test of Multinormality Based on Location Vectors and Scatter Matrices[J]. *Statistical Methods & Applications*, 2007,16(3):357-379

[21] Zhang Zhenglu, Fan Guoqing, Zhang Songlin, et al. General Reliability of Measurement [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2012, 37(5):577-581(张正禄,范国庆,张松林,等. 测量的广义可靠性研究[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2012, 37(5):577-581)

[22] Santerre R. Impact of GPS Satellite Sky Distribution [J]. *Manuscripta Geodaetica*, 1991, 16:28-53

A Two-Dimensional Spatial Distribution Model for the Positioning Random Error of GPS RTK

DENG Caiqun<sup>1,2,3</sup> LIU Zhaoli<sup>1,2</sup>

1 Northeast Institute of Geography and Agroecology, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130102, China  
2 University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China  
3 School of Geomatics and Prospecting Engineering, Jilin Jianzhu University, Changchun 130118, China

**Abstract:** The spatial position uncertainty influences the availability of the vector spatial data, which is directly controlled by the two-dimensional probability distribution model of the point’s position errors. This paper studies the spatial distribution model of GPS RTK positioning random error, which has repeatedly measured the selected points for 20 days. Then the one- and two-dimensional normal distribution tests and two-dimensional normal distribution fitting are employed to analyze the distribution model. The results show that the GPS RTK positioning random error fits directional two-dimensional normal distribution model and the significance is enhanced constantly along with the observation time shorten. The research results can build foundation for analyzing the influencing factors of the distribution model of positioning random error and establishing the mathematic forecasting model. Besides, contribute to promote the theoretical research of position uncertainty for spatial vector data.

**Key words:** spatial position uncertainty; GPS RTK; positioning random error; error distribution model; normal distribution test

**First author:** DENG Caiqun, PhD candidate, specializes in the positional uncertainty of the spatial data. E-mail: dengcaiqlun@163.com

**Corresponding author:** LIU Zhaoli, PhD, professor. E-mail: liuzhaoli2002@163.com

**Foundation support:** The National Key Research and Development Program of China, Nos. 2016YFC0501201,2016YFC0501204; the Science and Technology Research Plan Project of the 12th Five-Year for the Education Department of Jilin Province, No. [2015]264.