

全球 CGCS2000 坐标框架的构建理论研究

蒋志浩^{1,2} 刘经南^{1,3} 王 凡² 秘金钟⁴ 翟 曦²

1 武汉大学测绘学院,湖北 武汉,430079
2 国家基础地理信息中心,北京,100830
3 武汉大学卫星导航定位技术研究中心,湖北 武汉,430079
4 中国测绘科学研究院,北京,100830

摘 要:全球坐标参考框架是发展全球卫星导航系统最具重要性的基础设施之一,也是我国空间信息基础设施建设的迫切需求。研究了构建全球 CGCS2000(China Geodetic Coordinate System 2000)坐标参考框架的数学模型,研究了采用内约束理论构建全球 CGCS2000 框架理论和算法,最后证明了构建全球 CGCS2000 框架的二步法和一步法数学模型在一定条件下等价。内部约束算法根据框架转换参数及其速率变化量最小标准重新定义框架约束条件,经过坐标相似变化得到最佳网形,并保证最佳网形和初始网形的拟合度达到最高,最后得到最优网形中测站坐标估值,并能保持不同观测技术参考框架的内在纯粹性,发挥不同观测技术优势。本文研究结果可完善中国坐标框架构建基础理论体系,对 CGCS2000 框架的全球化实现提供科学方法。

关键词:坐标参考框架;CGCS2000 全球化;内约束理论;技术内综合;技术间联合

中图法分类号:P228 **文献标志码:**A

20 世纪 90 年代以来, IERS (International Earth Rotation and Reference Systems Service) 已经发布了多个国际地球参考框架(International Terrestrial Reference Frame, ITRF)^[1]。新的 ITRF2008 框架联合了各种空间大地测量技术时间序列的组合,提供了更高精度的坐标参考框架。中国于 2008 年 7 月 1 日启用了 CGCS2000 (China Geodetic Coordinate System 2000)坐标参考框架,是以 ITRF1997 参考框架为基础的区域性坐标参考框架^[2-3],尚未构建全球性的地球参考框架。中国北斗导航系统即将成为全球卫星导航系统,不能完全依赖 IERS 所提供的时空基准服务,必须有中国自主的地球参考框架作为支撑。因此当前迫切需要以 CGCS2000 为基础,建立和实现高精度、高可靠性的全球性动态参考框架。

目前国内学者对国际和区域参考框架的构建作了大量研究工作^[4-7],但均未系统介绍全球 CGCS2000 坐标框架的构建理论,也未对模型算法深入研究。本文在现有学术成果基础上,首先介绍构建全球 CGCS2000 坐标框架的数学模型,重点研究了两步法模型;其次分析研究了采用内

约束算法构建理论;最后证明两步法和传统的一步法数学模型在一定条件下等价。

1 全球 CGCS2000 坐标框架的数学模型

目前 CGCS2000 框架采用 2000.0 历元,虽然能够采用速度场模型实现 2000 历元至当前历元归算(ITRF2008 框架和瞬时历元),但是框架站的非线性变化^[8-10]和速度值误差都会降低坐标精度,不能满足高精度 GNSS 导航定位需要。本文利用不同空间观测技术坐标时序成果,采用观测技术内综合处理,观测技术间联合处理方式,建立了从观测历元框架到长期框架的数学模型,为全球 CGCS2000 框架的实时性、精确性奠定了理论基础。构建全球 CGCS2000 坐标框架数学模型主要包含 3 个方面内容:

1)坐标时序模型:从全球 CGCS2000 框架站有效数据中确定参数 a_i 的数学模型 $x_i(t) = F(a_i, t)$,通过参数 a_i 将测站 i 坐标 x_i 表示成时间 t 的函数;

2)坐标框架构建模型:实现各种观测技术(T)内综合处理,实现观测技术间联合处理,完成观测历元框架 S_k 、不同观测技术框架 S_T 和最终全球CGCS2000框架 S_{CGCS2000} 间参数转换;

3)内约束算法:选取约束条件消除框架转换方程秩亏影响,构建最优全球CGCS2000参考框架。

1.1 时间序列模型

通常采用的测站坐标时间序列模型为:

$$x_i(t) = F(a_i, t) = x_{0i} + (t - t_0)v_i \quad (1)$$

式中,测站参数 a_i 包含全球CGCS2000框架参考历元 t_0 时坐标值和恒定速度值 v_i 。目前在坐标框架构建中坐标时序模型仍采用线性模型,但也可以采用随机过程方法建模^[10],进行噪声分析,估计有色噪声、白噪声分量,也可结合确定性参数分析趋势项和零均值的随机过程,分析残余项的组合方式。

1.2 坐标框架转换模型

构建全球CGCS2000框架的基本参数是框架站坐标和速度值,通过对空间技术数据处理不能直接获取测站坐标,只是得到每个观测时段由点组成的观测网“网形”,只有进行参考框架转换后,才能得到选定框架下测站坐标值和速度值。

1.2.1 相似变换通用模型

参考框架间转换的通用数学模型为:

$$\tilde{x}(t) = (1 + \lambda(t))R(\psi(t))x_i(t) + g(t) \quad (2)$$

式中, ψ 、 λ 、 g 分别表示旋转、尺度和平移参数。如果框架间旋转角 ψ 数值较小,可近似表示为 $R(\psi(t)) \approx I - [\psi(t) \times]$, $[\psi \times]X = -[X \times]\psi$,式(2)可变换为:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &\approx (1 + \lambda(t))(I - [\psi(t) \times])x(t) + g(t) \\ &= (1 + \lambda(t))x(t) - [\psi(t) \times]x(t) - \lambda(t)[\psi(t) \times]x(t) + g(t) \approx \\ &1 + \lambda(t))x(t) - [\psi(t) \times]x(t) + g(t) \quad (3) \end{aligned}$$

舍去二阶项,并对位置求导得到测站速度和转换参数变化率。

$$\begin{aligned} \tilde{v}(t) &= v(t) + [x(t) \times]\dot{\psi}(t) + x(t)\dot{\lambda}(t) + \dot{g}(t) \\ &= v(t) + \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ (t) \\ \dot{g}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{bmatrix} \\ &= v(t) + E_{x(t)}\dot{P}(t) \quad (4) \end{aligned}$$

1.2.2 相似变换时序模型

在全球CGCS2000框架中函数模型须符

$$\begin{aligned} \tilde{\delta x}_i^k &= \delta x_{i0} + (t_k - t_0)\delta v_i + s_k x_{i0}^{ap} + [x_{i0}^{ap} \times]\theta_k + d_k + e_i^k = \\ [I(t_k - t_0)] [\delta x_{i0} \quad \delta v_i]^T &+ [[x_{i0}^{ap} \times]I \ x_{i0}^{ap}] [\theta_k \quad d_k \quad s_k]^T + e_i^k \quad (8) \end{aligned}$$

合 $x(t) = x_0 + (t - t_0)v$ 形式,带入式(4),并省略 λ 、 $\dot{\lambda}$ 、 ψ 、 $\dot{\psi}$ 和 v 的二阶项后可得:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= x_0 + (t - t_0)v + \lambda(t)x_0 + (t - t_0)\lambda(t)v + \\ [x_0 \times]\psi(t) &+ (t - t_0)[v \times]\psi(t) + g(t) \approx \\ x_0 + (t - t_0)v &+ \lambda(t)x_0 + [x_0 \times]\psi(t) + g(t) \quad (5) \end{aligned}$$

$$\tilde{v}(t) = v + \dot{\lambda}(t)x_0 + [x_0 \times]\dot{\psi}(t) + \dot{g}(t) \quad (6)$$

1.2.3 相似变换改正量模型

在数据处理过程中,不直接处理 x_0 和 v ,而是处理近似值 x_0^{ap} 、 v^{ap} 的改正量: $\delta x_0 = x_0 - x_0^{ap}$ 和 $\delta v = v - v^{ap}$,假定两个坐标框架采用共同近似值 x_0^{ap} (例如全球CGCS2000框架可采用ITRF2008)。

$$\begin{cases} \tilde{\delta x}_0 = \delta x_0 + \lambda_0 x_0^{ap} + [x_0^{ap} \times]\psi_0 + g_0 = \\ \delta x_0 + [[x_0^{ap} \times] \ I \ x_0^{ap}] [\psi_0 \quad g_0 \quad \lambda_0]^T = \\ \delta x_0 + E_{x_0^{ap}} P_0 \\ \tilde{\delta v} = \delta v + \dot{\lambda} x_0^{ap} + [x_0^{ap} \times]\dot{\psi} + \dot{g} = \\ \delta v + [[x_0^{ap} \times] \ I \ x_0^{ap}] [\dot{\psi} \quad \dot{g} \quad \dot{\lambda}]^T = \\ v + E_{x_0^{ap}} \dot{p} \end{cases} \quad (7)$$

1.3 坐标框架构建模型

构建全球CGCS2000坐标参考框架可采用两种数学模型:一步法模型即同步组合处理所有不同空间技术的有效时间序列(同步组合);二步法模型的第1步对不同观测技术有效时间序列分别进行综合处理(技术内综合),第2步联合第1步得到的各种观测技术有效参数估计,实现观测技术间成果联合处理(技术间联合),得到最终的全球CGCS2000框架成果。两步法模型的优势首先在于可以从不同空间技术成果中分别估计全球CGCS2000框架参数,通过比对分析可以揭示技术间系统偏差,例如尺度偏差、精度差异和观测粗差等;其次可对第1步获得的不同空间技术的框架参数进行方差分量估计并适当定权。

1.3.1 技术内综合处理模型

综合处理模型将不同观测技术时间序列分别处理,并且考虑独立历元间坐标参考框架的差异(例如24 h连续观测时段作为独立历元),综合处理观测方程式为:

把观测方程式(8)变为紧凑形式:

$$\delta x_i^k = \mathbf{A}_{ai} \mathbf{a}_i + \mathbf{A}_{zi} \mathbf{z}_k + e_i^k \quad (9)$$

式中, $\mathbf{a}_i = [\delta x_{i0} \ \delta v_i]^\top$ 包含测站 i 的全球 CGCS2000 框架参数 $\delta x_{i0}, \delta v_i$; $\mathbf{z}_k = [\theta_k \ d_k \ s_k]^\top$, 包含观测技术 T 参考框架 S_T 到独立观测历元 t_k 坐标框架 S_k 的转换参数; $\mathbf{A}_{ai} = [I \ (t_k - t_0)]$, $\mathbf{A}_{zi} = [[x_{i0}^a \times] \ I \ x_{i0}^p] = \mathbf{E}_i$ 。

估计框架转换参数应考虑历元间 t_k 差异, 这是综合处理过程的基础。理论上在每个空间技术中, 对时间周期(日、周、时段)的不同 t_k 历元的处理结果存在差异。实际中在 t_k 时间周期内每种

$$\delta \mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} \delta x_1^k \\ \vdots \\ \delta x_i^k \\ \vdots \\ \delta x_{N_k}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{0,1} \\ \vdots \\ x_{0,i} \\ \vdots \\ x_{0,N_k} \end{bmatrix} + (t_k - t_0) \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_{N_k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_i \\ \vdots \\ E_{N_k} \end{bmatrix} \mathbf{Z}_k + \begin{bmatrix} e_1^k \\ \vdots \\ e_i^k \\ \vdots \\ e_{N_k}^k \end{bmatrix} = \mathbf{x}_{0(k)} + (t_k - t_0) \mathbf{v}_{(k)} + \mathbf{E}_{(k)} \mathbf{Z}_k + \mathbf{e}_k \quad (10)$$

式中, $\mathbf{x}_{0(k)}$ 和 $\mathbf{v}_{(k)}$ 是在历元 t_k 时刻所有 N 个测站的初始坐标 x_0 和速度 v 集合。可以通过伴随矩阵 $\mathbf{L}_k$ 的方法处理测站缺少个别历元数据情况, $N_k \times N$ 矩阵 $\mathbf{L}_k$ 是单位矩阵对应着历元 t_k 时的有效测站。历元 t_k 时刻的观测方程表示为:

$$\delta \mathbf{x}_k = \mathbf{L}_k \mathbf{x}_0 + (t_k - t_0) \mathbf{L}_k \mathbf{v}_{(k)} + \mathbf{L}_k \mathbf{E} \mathbf{Z}_k + \mathbf{e}_k \quad (11)$$

得到综合处理法方程为:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_a & N_{az} \\ N_{za} & N_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{x0} & N_{xv} & N_{xE} \\ N_{vx0} & N_v & N_{vE} \\ N_{zx0} & N_{zv} & N_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^M \bar{P}_k & \sum_{k=1}^M (t_k - t_0) \bar{P}_k & (\sum_{k=1}^M \bar{P}_k) E \\ \sum_{k=1}^M (t_k - t_0)^2 \bar{P}_k & (\sum_{k=1}^M (t_k - t_0) \bar{P}_k) E \\ \text{sym} & E^T (\sum_{k=1}^M \bar{P}_k) E \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_a \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{x0} \\ u_v \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^M u_k \\ \sum_{k=1}^M (t_k - t_0) u_k \\ E^T \sum_{k=1}^M u_k \end{bmatrix}, \quad u_k = \mathbf{L}_k^T \mathbf{P}_k \delta \mathbf{x}_k, \quad (13)$$

式中, $\bar{\mathbf{P}}_k = \mathbf{L}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{L}_k$ 是 $N \times N$ 加权矩阵, 当测站缺

技术的未知框架参数和地球定向参数等被假定为恒定的。

输入每个历元 t_k 的坐标 x_k 的协方差矩阵为 $\hat{\mathbf{c}}_k = \hat{\mathbf{c}}_{x_k} = \hat{\sigma}_k^2 \mathbf{Q}_{x_k}$, 其中 $\hat{\sigma}_k^2$ 为方差因子, 协因数阵 $\mathbf{Q}_{x_k}$ 是所有参数协因数阵 $\mathbf{Q}_k$ 子矩阵, 如果得到正确的 $\mathbf{Q}_{x_k}$, 它应该是奇异矩阵, 不能够通过转置得到加权矩阵 $\mathbf{P}_{x_k} = \mathbf{Q}_{x_k}^{-1}$, 因此通常利用坐标先验信息(先验协方差矩阵 $\mathbf{C}_{x_k}^{\text{prior}} = \sigma_{\text{prior}}^2 \mathbf{I}$)获得可以转置的 $\mathbf{Q}_{x_k}$, 进一步得到 $\mathbf{P}_{x_k} = \mathbf{Q}_{x_k}^{-1}$ 。由于两个不同历元的观测不相关, 堆栈的权矩阵是 $\mathbf{P}_{x_k}$ 的对角阵。集合每个历元中所有测站观测, 得到 N_k 个测站在 k 历元时的观测方程。

失观测历元 t_k 时, 需添加零元素到 L_k 对应 k 行 k 列。法方程 $\mathbf{N} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{u}$ 中矩阵 $\mathbf{N}$ 是奇异阵, 秩亏是由于坐标框架的转换参数未定义。法方程的无穷解对应参考框架无穷多的选择。需要采用内约束算法求得唯一参数估值得到特定参考框架。

1.3.2 技术间联合处理模型

在技术内综合处理阶段获得了每个观测技术 T 中测站初始坐标和速度值 $(\delta \hat{x}_{i0})_{T|T}, (\delta \hat{v}_i)_{T|T}$, $i = 1_T, 2_T, \dots, n_T$, 观测技术框架 S_T 到每个观测历元 $t_{1T}, \dots, t_{kT}, \dots, t_{mT}$ 框架 S_k 转换参数 $(\hat{z}_k)_{T|T}, k_T = 1_T, 2_T, \dots, m_T$, 它们作为联合处理阶段的观测量用以联合估计全球 CGCS2000 框架模型参数 $\delta \hat{x}_{i0}, \delta \hat{v}_i$ 和转换参数。

整体框架网测站改正量 $\delta x_{0i}, \delta v_i$ 是未知参数, 它是每个观测技术观测网和转换参数 $Z_{k,T}$ 的联合解。 $Z_{k,T}$ 是全球 CGCS2000 参考框架到每种观测技术 T 中所有观测历元 t_k 的转换参数。所有未知参数组成了新的共同的全球 CGCS2000 参考框架。另外参数 $Z_{k,T}$ 不是“冗余”参数, 它可以实现地球定向参数(EOPs)从初始全球 CGCS2000 框架到所有观测技术 T 的观测历元 t_k 框架转换。

为了估计从全球 CGCS2000 参考框架 A 到观测历元 t_k 参考框架 C 之间转换参数 $Z_{k,T}$, 需要建立 3 个框架转换参数之间的关系式(见图 1)。 $P_{A \rightarrow C} = P_{A \rightarrow B} + P_{B \rightarrow C}$, 其中 $P_{A \rightarrow C} = Z_{k,T}, P_{A \rightarrow B} = P_T(t_k), P_{B \rightarrow C} = (\hat{Z}_k)_{T|T}, Z_{k,T} = (\hat{Z}_k)_{T|T} + P_T(t_k),$

其中 $P_T(t_k)=P_{0T}+(t_k-t_0)\dot{P}_T$, 得到的观测方程为:

$$(\hat{Z}_k)_{T|T}=Z_{k,T}-P_{0T}-(t_k-t_0)\dot{P}_T+e_{(\hat{Z}_k)_{T|T}}$$

(14)

不同空间观测技术组成不同的观测网,下标 V、S、G、D、C(分别代表 VLBI、SLR、GPS、DORIS、COMPASS/BeiDou; i 代表测站; K 代表历元。

包含所有观测技术的技术间联合处理观测方程为:

$$\hat{a}_{P|P}=\begin{bmatrix}\hat{a}_{V|V}\\\hat{a}_{S|S}\\\hat{a}_{G|G}\\\hat{a}_{D|D}\\\hat{a}_{C|C}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_V\\a_S\\a_G\\a_D\\a_C\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}E_{aV}&0&0&0&0\\0&E_{aS}&0&0&0\\0&0&E_{aG}&0&0\\0&0&0&E_{aD}&0\\0&0&0&0&E_{aC}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_V\\P_S\\P_G\\P_D\\P_C\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}e_{\hat{a}_{V|V}}\\e_{\hat{a}_{S|S}}\\e_{\hat{a}_{G|G}}\\e_{\hat{a}_{D|D}}\\e_{\hat{a}_{C|C}}\end{bmatrix}=a+E_ap+e_{\hat{a}_T}\quad(15)$$

$$\hat{z}_{p|p}=\begin{bmatrix}\hat{z}_{V|V}\\\hat{z}_{S|S}\\\hat{z}_{G|G}\\\hat{z}_{D|D}\\\hat{z}_{C|C}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}z_V\\z_S\\z_G\\z_D\\z_C\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}E_{zV}&0&0&0&0\\0&E_{zS}&0&0&0\\0&0&E_{zG}&0&0\\0&0&0&E_{zD}&0\\0&0&0&0&E_{zC}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_V\\P_S\\P_G\\P_D\\P_C\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}e_{\hat{z}_{V|V}}\\e_{\hat{z}_{S|S}}\\e_{\hat{z}_{G|G}}\\e_{\hat{z}_{D|D}}\\e_{\hat{z}_{C|C}}\end{bmatrix}=a+E_zp+e_{\hat{z}_T}\quad(16)$$

在技术间联合处理阶段,需要将各种空间观测技术成果进行联合平差,获取观测站的全球 CGCS2000 框架参数。但是不同空间技术观测网没有公共观测点,观测方程中也不包含共同未知量。目前通常采取并置站方式,即选取相距较近 的两种或者两种以上观测技术测站,通过高精度测量获取不同观测技术 T_1 、 T_2 测站之间矢量值,

这些矢量值称为局部连接。

$$d_{T_1,T_2}(t)=x_{T_2}(t)-x_{T_1}(t)=[x_{0T_2}-x_{0T_1}]+(t-t_0)[v_{T_2}-v_{T_1}]\quad(17)$$

通过在不同时间历元 t 的重复观测,可估计局部连接的初值和变化率, $d_{T_1,T_2}^0=x_{0T_2}-x_{0T_1}$, $\dot{d}_{T_1,T_2}=v_{T_2}-v_{T_1}$ 。

局部连接观测方程为:

$$b_C=A_{CV}a_V+A_{CS}a_S+A_{CG}a_G+A_{CD}a_D+A_{CC}a_C+e_C=[A_{CV}\ A_{CS}\ A_{CG}\ A_{CD}\ A_{CC}][a_V\ a_S\ a_G\ a_D\ a_C]^T+e_C=A_Ca+e_C\quad(18)$$

每个观测技术 $\hat{a}_{V|V}$ 、 $\hat{a}_{S|S}$ 、 $\hat{a}_{G|G}$ 、 $\hat{a}_{D|D}$ 独立建立法方程, $N_Tx=u_T$, 并置站 b_C 法方程为 $N_Cx=u_C$, 观

测方程应包括转换参数 z 、 p 。

$$b_C=A_Ca+e_C=[A_C\ 0\ 0][a\ z\ p]^T=[A_C\ 0\ 0]x+e_C\quad(19)$$

得到由不同空间观测组成法方法方程为 $N_T\hat{X}=(A_T^TP_TA_T)\hat{X}=A_T^TP_Tb_T=u_T$, 其中

$$N_T=A_T^TP_TA_T=\begin{bmatrix}I&0\\0&I\\E_a^T&E_z^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_a&P_{az}\\P_{az}^T&P_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I&0&E_a\\0&I&E_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_a&P_{az}&P_aE_a+P_{az}E_z\\P_{az}^T&P_z&P_{az}^TE_a+P_zE_z\\E_a^TP_a+E_z^TP_{az}^T&E_a^TP_{az}+E_z^TP_z&E_a^TP_aE_a+E_z^TP_{az}^TE_a+E_a^TP_{az}E_z+E_z^TP_zE_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}N_a&N_{az}&N_{ap}\\N_{az}^T&N_z&N_{zp}\\N_{ap}^T&N_{zp}^T&N_p\end{bmatrix}\quad(20)$$

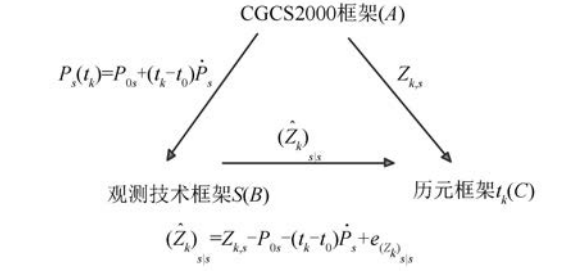


图1 坐标框架关系图

Fig.1 The Relational Graph of Coordinate Frame

$$u_T = A_T^T P_T b_T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ E_a^T & E_z^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_a & P_{az} \\ P_{az}^T & P_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_T \\ \hat{z}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_a \hat{a}_T + P_{az} \hat{z}_T \\ P_{az}^T \hat{a}_T + P_z \hat{z}_T \\ E_a^T P_a \hat{a}_T + E_z^T P_{az} \hat{a}_T + E_a^T P_{az} \hat{z}_T + E_z^T P_z \hat{z}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_a \\ u_z \\ u_p \end{bmatrix} \quad (21)$$

推导出的二步法联合处理法方程为:

$$\begin{bmatrix} N_a + N_c & N_{az} & N_{ap} \\ N_{az}^T & N_z & N_{zp} \\ N_{ap}^T & N_{zp}^T & N_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{z} \\ \hat{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_a + u_c \\ u_z \\ u_p \end{bmatrix} \quad (22)$$

其中

$$N_c = A_c^T P_c A_c, u_c = A_c^T P_c b_c \quad (23)$$

2 内部约束算法

通过数学模型组成的坐标框架构建模型,其观测方程系数阵的列秩亏数等于待求转换参数个数,获得的坐标框架网的所有最小二乘解集具有相同“网形”,但不具有唯一性。为此传统方法是设定一组外部约束条件(条件数等于秩亏数,并且不相关)实现框架定义,例如三角网中两个测站坐

$$\bar{a}_i = \begin{bmatrix} \delta \tilde{x}_{0i} \\ \delta \tilde{v}_i \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \delta x_{0i} + [x_{0i}^{ap} \times] \psi_0 + \lambda_0 x_{0i}^{ap} + g_0 \\ \delta v_i + [x_{0i}^{ap} \times] \dot{\psi} + \dot{\lambda} x_{0i}^{ap} + \dot{g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta x_{0i} \\ \delta v_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [x_{0i}^{ap} \times] & I & x_{0i}^{ap} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [x_{0i}^{ap} \times] & I & x_{0i}^{ap} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \psi_0 & g_0 & \lambda_0 & \dot{\psi} & \dot{g} & \dot{\lambda} \end{bmatrix}^T = a_i + E_{ai} p \quad (24)$$

建立每个观测历元 t_k 的转换参数关系式为:

$$\tilde{z}_k = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_k \\ \tilde{d}_k \\ \tilde{s}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_k - \psi_0 - (t_k - t_0) \dot{\psi} \\ d_k - g_0 - (t_k - t_0) \dot{g} \\ s_k - \lambda_0 - (t_k - t_0) \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_k \\ d_k \\ s_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -I & 0 & 0 & -(t_k - t_0)I & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 & -(t_k - t_0)I & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -(t_k - t_0) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \psi_0 & g_0 & \lambda_0 & \dot{\psi} & \dot{g} & \dot{\lambda} \end{bmatrix}^T \equiv z_k + E_{zi} p \quad (25)$$

组合式(24)、式(25)得到:

$$E^T \begin{bmatrix} a \\ z \end{bmatrix} = [E_a^T \quad E_z^T] \begin{bmatrix} a \\ z \end{bmatrix} = E_a^T a + E_z^T z = \begin{bmatrix} E_{ai}^T & \cdots & E_{aN}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{zi}^T & \cdots & E_{zN}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_M \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N E_{ai}^T a_i + \sum_{i=1}^M E_{zi}^T z_i = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^N [xap_{0i} \times] \delta x_{0i} - \sum_{k=1}^M \theta_k \\ \sum_{i=1}^N \delta x_{0i} - \sum_{k=1}^M d_k \\ \sum_{i=1}^N (xap_{0i})^T \delta x_{0i} - \sum_{k=1}^M s_k \\ -\sum_{i=1}^N [xap_{0i} \times] \delta v_i - \sum_{k=1}^M (t_k - t_0) \theta_k \\ \sum_{i=1}^N \delta v_i - \sum_{k=1}^M (t_k - t_0) d_k \\ \sum_{i=1}^N (xap_{0i})^T \delta v_i - \sum_{k=1}^M (t_k - t_0) s_k \end{bmatrix} = 0 \quad (26)$$

标,导线测量中需要一个测站坐标和一个方位角。在空间观测技术中,至少需要 3 个测站精确坐标值,通过赋予已知测站位置和速率强约束,估计秩亏法方程唯一网解。但如果未恰当选择约束条件,会引起框架网网形变化,参数估计产生偏差。内部约束方法只需全球 CGCS2000 框架参数和测站定向、平移和尺度参数及其速率变化量满足最小条件,保证成果的数值稳定性,保持不同观测技术参考框架的内在纯粹性,发挥不同观测技术优势(比如 SLR 技术的地心,VLBI 技术的尺度等)。为确定内部约束矩阵,需要根据全球 CGCS2000 框架转换模型 $\tilde{x} = x + Ep$,建立框架站参数和框架转换中旋转角度 $\psi(t) = \psi_0 + (t - t_0) \dot{\psi}$,尺度参数 $\lambda(t) = \lambda_0 + (t - t_0) \dot{\lambda}$,位移量 $g(t) = g_0 + (t - t_0) \dot{g}$ 等变化量间函数关系。每个测站转换方程组合表示为:

由此建立了由未知参数(比例、平移、旋转)引起的秩亏自由网的最完整的一套内部约束算法,有些情况下,如果比例或平移参数通过有效数据来估计(例如通过 SLR 建立地心坐标框架),则需要取消对应的内部约束条件。

在二步法的综合阶段中约束条件分别应用于不同观测技术 T 的时间序列,表示为 $\delta x_{T,0i}$ 、 $\delta v_{T,i}$ 、 $\theta_{T,k}$ 、 $d_{T,k}$ 、 $s_{T,k}$ 。在全球 CGCS2000 框架建立的一步法同步组合中待估参数为 δx_{0i} 、 δv_i 、 $\theta_{T,k}$ 、 $d_{T,k}$ 、 $s_{T,k}$,为保持对应的最优化的最小标准,上述约束条件需要附加到 K 种空间观测技术中,需要增加 $\sum_{T=1}^K$ 项,将二步法综合阶段的 $\sum_{k=1}^M$ 替换为 $\sum_{T=1}^K \sum_{k=1}^M$ 。

内部约束算法根据框架转换参数及其速率变化量最小标准重新定义框架约束条件,经过坐标相似变化得到最佳网形,并保证最佳网形和初始网形的拟合度达到最高,最后得到最优网形中测站坐标估值,并能保持不同观测技术参考框架的内在纯粹性,发挥不同观测技术优势。需要注意的是当比例、地心、平移等参数,能够从有效观测数据中获取,或者有特殊历元定义时,对应的约束应该取消。

3 两种模型比较

构建地球参考框架的一步法数学模型采取同步组合算法,首先分别构建不同观测技术时间序列数据组成的法方程;其次同步组合不同观测技术法方程构成整体法方程,通过解算整体法方程得到全球 CGCS2000 框架参数最优解。两步法模型的第 1 步采用技术内综合算法,分别解算不同技术时间序列数据组成的法方程,估计全球 CGCS2000 框架参数初值;第 2 步采用技术间联合算法,联合第 1 步得到的全球 CGCS2000 框架参数初值,联合构建法方程并解算,求得全球 CGCS2000 框架参数最优解。

坐标框架转换模型 $\hat{x}=x+E p$ 是线性模型,可以表达为 $b=A x+e$ 形式。

下面以包含并置站局部连接的两个独立观测网为例(见图 2),证明两种算法的一致性。采用不同观测技术的观测网 a 、观测网 b 和局部连接观测表达形式分别为:

$$\begin{cases} b_a = [A_{a1} & A_{a2}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + v_a = A_a x_a + v_a \\ v_a \sim (0, \sigma^2 P_a^{-1}) \\ b_b = [A_{b3} & A_{b4}] \begin{bmatrix} x_3 & x_4 \end{bmatrix} + v_b = A_b x_b + v_b \\ v_b \sim (0, \sigma^2 P_b^{-1}) \\ b_c = A_{c2} x_2 + A_{c4} x_4 + v_c \quad v_c \sim (0, \sigma^2 P_c^{-1}) \end{cases} \quad (27)$$

采用一步法算法时,式(27)可表达为法方程形式 $N \hat{x} = u$,其中

$$\begin{cases} N = \begin{bmatrix} N_{a11} & N_{a12} & 0 & 0 \\ N_{a12}^T & N_{a22} + A_{c2}^T P_c A_{c2} & 0 & A_{c2}^T P_c A_{c4} \\ 0 & 0 & N_{b33} & N_{b34} \\ 0 & A_{c4}^T P_c A_{c2} & N_{b34}^T & N_{b44} + A_{c4}^T P_c A_{c4} \end{bmatrix} \\ u = \begin{bmatrix} A_{a1}^T P_a b_a \\ A_{a2}^T P_a b_a + A_{c2}^T P_c b_c \\ A_{b3}^T P_b b_b \\ A_{b4}^T P_b b_b + A_{c4}^T P_c b_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{a1} \\ u_{a2} + A_{c2}^T P_c b_c \\ u_{b3} \\ u_{b4} + A_{c4}^T P_c b_c \end{bmatrix} \end{cases} \quad (28)$$

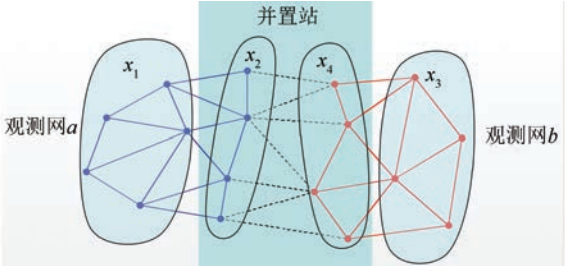


图 2 包含并置站的两个观测网
Fig.2 Network Included Co-location Sites

二步法中第 2 步联合算法需要利用第 1 步已求得参数初值,并表示为分块矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \\ b_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + E_1 p_a + e_1 \\ x_2 + E_2 p_a + e_2 \\ x_3 + E_3 p_b + e_3 \\ x_4 + E_4 p_b + e_4 \\ A_{c2} x_2 + A_{c4} x_4 + v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & E_3 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & E_4 \\ 0 & A_{c2} & 0 & A_{c4} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ p_a \\ p_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ v_c \end{bmatrix} \quad (29)$$

将上述分块矩阵表示为紧凑形式:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_a \\ \hat{x}_b \\ b_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_a + E_a p_a \\ x_b + E_b p_b \\ b_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_a & E_a & 0 \\ D_b & 0 & E_b \\ A_c & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p_a \\ p_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ b_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_a & 0 & 0 \\ 0 & W_b & 0 \\ 0 & 0 & P_c \end{bmatrix} \quad (30)$$

由于框架转换约束条件和法方程式线性无关,所以 $N_a E_a = 0, N_b E_b = 0$,最终法方程为:

$$\begin{bmatrix} D_a^T N_a D_a + D_b^T N_b D_b + A_c^T P_c A_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p_a \\ p_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_a^T N_a \hat{x}_a + D_b^T N_b \hat{x}_b + A_c^T P_c b_c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

式中, $P_a、P_b$ 做为“冗余”参数消除,将 D 展开后得到:

$$\begin{bmatrix} N_{a11} & N_{a12} & 0 & 0 \\ N_{a12}^T & N_{a22} + A_{c2}^T P_c A_{c2} & 0 & A_{c2}^T P_c A_{c4} \\ 0 & 0 & N_{b33} & N_{b34} \\ 0 & A_{c4}^T P_c A_{c2} & N_{b34}^T & N_{b44} + A_{c4}^T P_c A_{c4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{a11} \hat{x}_{a1} + N_{a12} \hat{x}_{a2} \\ N_{a12}^T \hat{x}_{a1} + N_{a22} \hat{x}_{a2} + A_{c2}^T P_c b_c \\ N_{b33} \hat{x}_{b3} + N_{b34} \hat{x}_{b4} \\ N_{b34}^T \hat{x}_{b3} + N_{b44} \hat{x}_{b4} + A_{c4}^T P_c b_c \end{bmatrix} \quad (32)$$

式(32)结果与式(28)相等。

一步法方法可理解为首先各观测子网独立构建法方程,再利用独立法方程的系数阵做为权阵,加权平均估计全球 CGCS2000 框架参数(解算法方程)。如果把一步法同步处理分为两个过程,它的第一个过程与两步法中第一步等价。所以一步法和两步法主要差异在第二步。当采用不同观测技术独立组成的法方程系数阵作为定权矩阵时,一步法和两步法结果具有一致性。

4 结 语

本文介绍了全球 CGCS2000 坐标框架的构建数学模型,实现了基于不同技术坐标时序成果的历元框架到长期框架的转换数学模型。重点研究了观测技术内综合和技术间联合处理的两步法模型,分析了内约束算法理论,内部约束算法根据框架转换参数及其速率变化量最小标准重新定义框架约束条件,保证最佳网形和初始网形的拟合度达到最高,保持不同观测技术参考框架的内在纯粹性,发挥不同观测技术优势。最后证明了两步法和传统的一步法数学模型在一定条件下等价。

目前 CGCS2000 只是满足我国区域性坐标参考框架应用服务,随着北斗卫星全球化应用的逐步开展,必须要有中国独立自主的全球坐标参考框架做为基础,本文研究结果可完善中国坐标框架构建基础理论体系,为 CGCS2000 框架的全球化实现提供科学方法。

参 考 文 献

[1] Altamimi Z, Dermanis A. Theoretical Foundations of ITRF Determination, the Algebraic and the Kinematic Approach[C]. Presented at the VII Hotine-Marussi Symposium on Mathematical Geodesy, Rome, 2009

[2] Yang Yuanxi. Main Progress of Geodetic Coordinate System in China[J]. *Bulletin of Surveying and Mapping*, 2005(1): 6-9(杨元喜. 中国大地坐标系建设主要进展[J]. 测绘通报, 2005(1): 6-9)

[3] Yang Yuanxi. China Geodetic Coordinate System 2000[J]. *Bulletin of Science*, 2009, 54(16): 2 271-2 276(杨元喜. 2000 中国大地坐标系[J]. 科学通报, 2009, 54(16): 2 271-2 276)

[4] Zou Rong. The Research of Key Technology on the Realization and Maintainance of TRF[D]. Wuhan: Wuhan University, 2009(邹蓉. 地球参考框架建立和维持的关键技术研究[D]. 武汉: 武汉大学, 2009)

[5] Zhang Xiguang. Theory and Algorithms of Terrestrial Reference Frame[D]. Zhengzhou: Information Engineering University, 2009(张西光. 地球参考框架的理论与方法[D]. 郑州: 信息工程大学, 2009)

[6] Wang Peng, Lv Zhiping, Zhang Xiguang. Application of Similarity Transformation in Datum Realization of TRF[J]. *Surveying and Mapping*, 2010, 33(1): 3-7(王鹏, 吕志平, 张西光. 相似变换模型在参考框架基准实现中的应用[J]. 测绘, 2010, 33(1): 3-7)

[7] Wei Na, Shi Chuang, Geng Changjiang, et al. Helmert Transformation of Reference Frame[J]. *Journal of Geodesy and Geodynamics*[J]. 2010, 30(4): 109-112(魏娜, 施闯, 耿长江, 等. 参考框架的

HELMERT 转换[J].大地测量与地球动力学, 2010,30(4):109-112)

[8] Jiang Zhihao,Zhang Peng, Bei Jinzhong, et al. The Model of Crustal Horizontal Movement Based on CGCS2000 Frame[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*. 2009,(6):471-476(蒋志浩,张鹏,秘金钟,等.基于CGCS2000的中国地壳水平运动速度场模型研究[J].测绘学报,2009,(6):471-476)

[9] Jiang Zhihao, Zhang Peng. Characteristics of the Non-linear Movement of CORS Network in China Based on the CGCS2000 Frame[J]. *Chinese journal of Geophysics*, 2012,55(3):841-850(蒋志浩,张鹏,基于非线性运动分析的CGCS2000下我国CORS站运动特征[J].地球物理学报,2012,55(3):841-850)

[10] Jiang Zhihao,Zhang Peng,Bei Jinzhong, et al. Velocity Estimation on the Colored Noise Properties of CORS Network in China Base on the CGCS2000 Frame[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica(in Chinese)*, 2010,39(4):355-363(蒋志浩,张鹏,秘金钟,等.顾及有色噪声性质的CGCS2000下我国CORS站速度估计[J].测绘学报,2010,39(4):355-363)

Research on Construction Theory of Global CGCS2000 Coordinate Frame

JIANG Zhihao^{1,2} LIU Jingnan^{1,3} WANG Fan² BEI Jinzhong⁴ ZHAI Xi²

- 1 School of Geodesy and Geomatics,Wuhan University, Wuhan 430079,China
- 2 National Geomatics Center of china, Beijing 100830, China
- 3 GNSS Research Center, Wuhan University Wuhan 430079, China
- 4 China Academy of Surveying and mapping,Beijing 100830, China;

Abstract: The global coordinate reference frame is one of the most important infrastructures for the development of global satellite navigation system, but also an urgent demand in China’s construction of spatial information facilities. This paper focuses on the mathematical model for a Global CGCS2000 Coordinate Frame, analyzes the theory and algorithm of the inner constraints required for Global CGCS2000 Coordinate Frame formulation, and shows that under certain conditions, a two-step method and one-step method are identical. The Inner constraints algorithm redefines the constraint conditions of the coordinate reference frame according to minimum standard for parameter transformation and its rate. Coordinate similarity transformation yields an adjusted network, which ensures the highest degree of fit with the initial network shape, maintaining the coordinate network from the effects of different observation technologies. The results of this study can deepen the theoretical foundations of coordinate frame determination, and provides a scientific method for the realization of the CGCS2000 globalization.

Key words: terrestrial reference frame; CGCS2000 globalization; inner constraints algorithm; intra-technology combination; inter-technique integration

First author: JIANG Zhihao, PhD candidate, senior engineer, specializes in GNSS data processing and result analysis. E-mail: zhjiang@ngcc.cn

Foundation support: The National Natural Science Foundation of China, No. 41304008.