



# 系数矩阵误差对地壳应变参数反演的影响

王乐洋<sup>1,2</sup> 许光煜<sup>1,3</sup>

1 东华理工大学测绘工程学院,江西 南昌, 330013

2 流域生态与地理环境监测国家测绘地理信息局重点实验室,江西 南昌, 330013

3 武汉大学测绘学院,湖北 武汉, 430079

**摘要:**针对地壳应变参数反演模型中系数矩阵含随机和非随机元素及观测数据存在相关性等情况,以部分变量误差(partial-errors-in-variables, PEIV)模型为基础,采用了地壳应变参数反演的加权总体最小二乘算法,该算法不受系数矩阵和权矩阵结构的限制,能够快速、有效解决系数矩阵含有随机误差的模型问题。结合推导得到的最小二乘改正项公式,对地壳反演模型中坐标点误差对反演参数求解的影响进行了分析。通过对模拟数据和川滇地区的实际数据进行处理,得出系数矩阵误差对地壳应变参数反演的影响主要受GPS站点坐标值量级以及应变参数量级的牵制。

**关键词:**大地测量反演;加权总体最小二乘;川滇地区;系数矩阵;地壳应变;部分变量误差模型

**中图法分类号:**P207

**文献标志码:**A

大地测量学科发展的总趋势是向地球科学纵深发展,深入到其他地学学科的交叉领域,其主要任务是监测和研究地球动力学现象,研究地球本体的各种物理场,认识与探索地球内部的各种物理过程并揭示其规律。以空间大地测量为标志的现代大地测量技术,不论在测量的空间尺度上还是已达到的精度水平方面,已经有能力监测地球动力学过程产生的运动状态和物理场的微变化<sup>[1]</sup>。利用GPS监测点复测资料所得的位移或速度研究区域地壳运动与应变是大地测量深入地球科学的研究最常用的方法之一<sup>[2-7]</sup>,在数据处理过程中基本都采用最小二乘方法(least squares, LS),没有考虑到反演模型中系数矩阵误差的影响。文献[8]采用总体最小二乘方法研究地壳应变参数的反演,考虑了系数矩阵的误差影响以及系数矩阵中含有非随机元素的情况,但是在公式推导时对公式进行了线性化处理,引入了模型误差,因此得到的参数结果存在偏差。目前关于地壳应变参数反演模型中系数矩阵误差对模型参数的具体影响情况,还没有明确的定论。

部分变量误差(partial-EIV, PEIV)模型作为变量误差(errors-in-variables, EIV)模型一般化的表达形式,既考虑了函数模型中观测向量的误差,又顾及了系数矩阵含有误差的情况,同时对系数矩阵的结构及组成无特殊限制,更适合用于EIV模型问题的求解。目前,国内外研究并使用PEIV模型的文献并不多。文献[9]在PEIV模型的基础上,推导出了加权总体最小二乘(weighted total least squares, WTLS)更一般化的解,该算法涵盖了一般 WTLS 算法需要特殊处理的各种情况,同时大大减少了模型的待估量,算法的简单形式使后续估计值的精度评定更加便利;文献[10]提出了基于PEIV模型的可靠性理论,并分析了模型中观测向量和系数矩阵可靠性的基本特点。本文以PEIV模型为基础,采用加权总体最小二乘算法进行地壳应变参数反演,进一步揭示GPS站点坐标误差对地壳应变模型参数估计的影响。同时本文算法可以很好地解决反演模型的系数矩阵中存在的随机元素、非随机元素和重复元素的情况,算法的推导公式中也避免了文献[8]

收稿日期:2016-08-19

项目资助:国家自然科学基金(41664001, 41204003);江西省杰出青年人才资助计划(20162BCB23050);测绘地理信息公益性行业科研专项(201512026);国家重点研发计划(2016YFB0501405);江西省教育厅科技项目(GJJ150595);流域生态与地理环境监测国家测绘地理信息局重点实验室开放基金(WE2015005);对地观测技术国家测绘地理信息局重点实验室开放基金(K201502);东华理工大学博士科研启动基金(DHDK201113)。

第一作者:王乐洋,博士,副教授,主要研究方向为大地测量反演及大地测量数据处理。wleyang@163.com

中存在的问题,结合推导得到的最小二乘改正项公式,对地壳反演模型中坐标点误差对反演参数求解的影响进行了分析。通过模拟数据和川滇地区的实际数据,分析了系数矩阵误差对地壳应变参数反演的影响,展示了更多反演过程的细节,对深入理解地壳应变反演机理有一定的价值。

## 1 由坐标位移反演地壳应变参数的PEIV模型算法

在假定介质均匀且邻近测点间应变均匀的情况下,可以建立邻近点间相对形变量与地壳应变量的线性关系。设第  $j$  点两期纵坐标位移  $u_j$ , 横坐标位移  $v_j$ , 网中共有  $m$  点, 由坐标位移反演应变参数的公式(二维)为<sup>[11]</sup>:

$$\begin{cases} u_j = u + x_j \epsilon_x + y_j \epsilon_{xy} - y_j w \\ v_j = v + x_j \epsilon_{xy} + y_j \epsilon_y + x_j w \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $x_j, y_j (j=1, 2, \dots, m)$  为第  $j$  点近似坐标;  $u, v$  为网的平移量;  $w$  为其转动量;  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{xy}$  为应变状态参数。

将式(1)改写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_m \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 & 0 & y_1 & -y_1 \\ 0 & 1 & 0 & y_1 & x_1 & x_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 1 & 0 & x_m & 0 & y_m & -y_m \\ 0 & 1 & 0 & y_m & x_m & x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \\ w \end{bmatrix} \quad (2)$$

令  $\mathbf{y} = [u_1 \ v_1 \ \cdots \ u_m \ v_m]^T, \mathbf{y} \in R^{2m \times 1}$ ;  $\boldsymbol{\beta} = [u \ v \ \epsilon_x \ \epsilon_y \ \epsilon_{xy} \ w]^T, \boldsymbol{\beta} \in R^{6 \times 1}$ ;  $\mathbf{A} \in R^{2m \times 6}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 & 0 & y_1 & -y_1 \\ 0 & 1 & 0 & y_1 & x_1 & x_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 1 & 0 & x_m & 0 & y_m & -y_m \\ 0 & 1 & 0 & y_m & x_m & x_m \end{bmatrix}.$$

所以,式(2)可以表示为:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} \quad (3)$$

基于PEIV模型的坐标位移反演应变参数的思想是:不仅考虑坐标位移的误差,即  $\mathbf{y}$  的误差对应变参数的影响,以及系数矩阵  $\mathbf{A}$  误差的影响,同时考虑系数矩阵的元素并非全都是随机的,而部分是由 0 或者 1 等常数组成的,所以有<sup>[9]</sup>:

$$\begin{cases} \mathbf{y} = (\boldsymbol{\beta}^T \otimes \mathbf{I}_{2m})(\mathbf{h} + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{a}}) + \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}} + \boldsymbol{\varepsilon}_a \\ \text{vec}(\bar{\mathbf{A}}) = \mathbf{h} + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{a}} \end{cases} \quad (4)$$

式中,  $\mathbf{y} \in R^{2m \times 1}$  表示观测向量;  $\boldsymbol{\varepsilon} \in R^{2m \times 1}$  表示观测向量  $\mathbf{y}$  的随机误差;  $\mathbf{h} \in R^{12m \times 1}$  主要由系数矩阵  $\mathbf{A}$  中非随机元素组成;  $\mathbf{B} \in R^{12m \times t}$  是固定矩阵, 其阶数取决于系数矩阵  $\mathbf{A}$  中随机元素的数目(此处假设为  $t$ );  $\mathbf{I}_{2m} \in R^{2m \times 2m}$  为单位阵;  $\mathbf{a} \in R^{t \times 1}$  是系数矩阵  $\mathbf{A}$  中随机元素组成的列向量(若随机元素重复出现, 则只提取一次), 其真值用  $\bar{\mathbf{a}}$  表示;  $\boldsymbol{\varepsilon}_a \in R^{t \times 1}$  是  $\mathbf{a}$  中包含的随机误差;  $\bar{\mathbf{A}} \cdot \boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}^T \otimes \mathbf{I}_n) \text{vec}(\bar{\mathbf{A}})$ , 其中  $\bar{\mathbf{A}}$  表示系数矩阵  $\mathbf{A}$  的真值,  $\text{vec}(\cdot)$  表示矩阵拉直运算。

地壳应变参数反演的PEIV模型中各矩阵的具体形式表示为:

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= [\mathbf{h}_1^T \ \mathbf{h}_2^T \ \mathbf{h}_3^T \ \mathbf{h}_4^T \ \mathbf{h}_5^T \ \mathbf{h}_6^T]^T, \\ \mathbf{B} &= [\mathbf{B}_1^T \ \mathbf{B}_2^T \ \mathbf{B}_3^T \ \mathbf{B}_4^T \ \mathbf{B}_5^T \ \mathbf{B}_6^T]^T, \\ \mathbf{h}_1 &= [1 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0]^T, \\ \mathbf{h}_2 &= [0 \ 1 \ \dots \ 0 \ 1]^T, \\ \mathbf{h}_3 = \mathbf{h}_4 = \mathbf{h}_5 = \mathbf{h}_6 &= [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]^T, \\ \mathbf{h}_i &\in R^{2m \times 1}, (i = 1, 2, \dots, 5, 6), \\ \mathbf{B}_1 &= \mathbf{I}_m \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \mathbf{I}_m \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}_3 &= \mathbf{I}_m \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_4 = \mathbf{I}_m \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}_5 &= \mathbf{I}_m \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_6 = \mathbf{I}_m \otimes \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}_i &\in R^{2m \times 2m}, (i = 1, 2, \dots, 5, 6), \\ \mathbf{a} &= [x_1 \ y_1 \ \dots \ x_m \ y_m]^T, \mathbf{a} \in R^{2m \times 1}; \end{aligned}$$

其中  $\otimes$  表示直积运算。

平差的随机模型为:

$$\begin{cases} \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \mathbf{Q}_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon}_a) = \sigma^2 \mathbf{Q}_{\boldsymbol{\varepsilon}_a\boldsymbol{\varepsilon}_a} \end{cases} \quad (5)$$

式中,  $\mathbf{D}$  表示方差-协方差矩阵;  $\sigma^2$  为单位权方差;  $\mathbf{Q}_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{P}_1^{-1}$  为观测值的协因数阵;  $\mathbf{Q}_{\boldsymbol{\varepsilon}_a\boldsymbol{\varepsilon}_a} = \mathbf{P}_2^{-1}$  为系数矩阵中随机元素的协因数阵。

通过观测值  $\mathbf{y}$  和系数矩阵随机元素  $\mathbf{a}$  估计PEIV模型中  $\bar{\mathbf{a}}$  和  $\boldsymbol{\beta}$  的加权总体最小二乘平差准则为<sup>[9]</sup>:

$$\varphi = \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{P}_1 \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}_a^T \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\varepsilon}_a = \min \quad (6)$$

当初始权阵  $\mathbf{P}_1$  和  $\mathbf{P}_2$  已知时, 可以采用下面的步骤进行未知参数求解<sup>[9]</sup>:

第1步 初始值设定。给定观测向量  $\mathbf{y}$  和系数矩阵  $\mathbf{A}$ , 提取矩阵  $\mathbf{A}$  中随机元素组成列向量  $\mathbf{a}$ , 根据系数矩阵结构, 构造常数向量  $\mathbf{h}$  和固定矩阵  $\mathbf{B}$ , 计算参数初始值  $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(0)} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{y}$ ;

第2步 迭代过程, 利用公式  $\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{S}_\beta^T \mathbf{P}_1 \mathbf{S}_\beta + \mathbf{P}_2)^{-1} (\mathbf{P}_2 \mathbf{a} - \mathbf{S}_\beta^T \mathbf{P}_1 (\sum_{i=1}^m \mathbf{h} \hat{\boldsymbol{\beta}}_i) + \mathbf{S}_\beta^T \mathbf{P}_1 \mathbf{y})$  计算  $\hat{\mathbf{a}}$ , 式中

$S_{\beta} = \sum_{i=1}^m \mathbf{B}_i \hat{\beta}_i$ ; 利用公式  $\hat{\beta} = (\hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{A}})^{-1} \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{y}$  计算  $\hat{\beta}^{(i+1)}$ , 式中  $\hat{\mathbf{A}} = \text{vec}^{-1}(\mathbf{h} + \mathbf{B} \hat{\mathbf{a}})$ , 其中  $\text{vec}^{-1}(\cdot)$  表示拉直运算的逆运算。

第 3 步 迭代终止。 $\|\hat{\beta}^{(i+1)} - \hat{\beta}^{(i)}\| \leq \delta_0$ , 其中  $\delta_0$  表示设定的阈值。

## 2 系数矩阵误差对 WTLS 估计值的影响

对基于 PEIV 模型的地壳应变参数加权总体

$$\hat{\beta}_{\text{WTLS}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{E}}_A + \hat{\mathbf{E}}_A^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A} + \hat{\mathbf{E}}_A^T \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{E}}_A)^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A} \hat{\beta}_{\text{LS}} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{e}}_y + \hat{\mathbf{E}}_A^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A} \hat{\beta}_{\text{LS}} + \hat{\mathbf{E}}_A^T \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{e}}_y) \quad (8)$$

令  $\mathbf{N}_1 = \mathbf{A}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{N}_2 = \mathbf{A}^T \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{E}}_A + \hat{\mathbf{E}}_A^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A} + \hat{\mathbf{E}}_A^T \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{E}}_A$ ,

$$\hat{\beta}_{\text{WTLS}} = (\mathbf{N}_1^{-1} - \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{N}_2 (\mathbf{I}_6 + \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{N}_2)^{-1} \mathbf{N}_1^{-1}) (\mathbf{N}_1 \hat{\beta}_{\text{LS}} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{e}}_y + \hat{\mathbf{E}}_A^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A} \hat{\beta}_{\text{LS}} + \hat{\mathbf{E}}_A^T \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{e}}_y) = \hat{\beta}_{\text{LS}} + \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{e}}_y + \mathbf{N}_1^{-1} \hat{\mathbf{E}}_A^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A} \hat{\beta}_{\text{LS}} + \mathbf{N}_1^{-1} \hat{\mathbf{E}}_A^T \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{e}}_y - \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{N}_2 (\mathbf{I}_6 + \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{N}_2)^{-1} \hat{\beta}_{\text{LS}} - \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{N}_2 (\mathbf{I}_6 + \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{N}_2)^{-1} \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{e}}_y - \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{N}_2 (\mathbf{I}_6 + \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{N}_2)^{-1} \mathbf{N}_1^{-1} \hat{\mathbf{E}}_A^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A} \hat{\beta}_{\text{LS}} - \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{N}_2 (\mathbf{I}_6 + \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{N}_2)^{-1} \mathbf{N}_1^{-1} \hat{\mathbf{E}}_A^T \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{e}}_y$$

对上式进行移项调整可以得到:

$$\mathbf{b} = \hat{\beta}_{\text{WTLS}} - \hat{\beta}_{\text{LS}} = (\mathbf{N}_1^{-1} \hat{\mathbf{E}}_A^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A} - \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{N}_2 (\mathbf{I}_6 + \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{N}_2)^{-1} - \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{N}_2 (\mathbf{I}_6 + \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{N}_2)^{-1} \mathbf{N}_1^{-1} \hat{\mathbf{E}}_A^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A}) \hat{\beta}_{\text{LS}} + \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{e}}_y + \mathbf{N}_1^{-1} \hat{\mathbf{E}}_A^T \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{e}}_y - \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{N}_2 (\mathbf{I}_6 + \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{N}_2)^{-1} \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{e}}_y - \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{N}_2 (\mathbf{I}_6 + \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{N}_2)^{-1} \mathbf{N}_1^{-1} \hat{\mathbf{E}}_A^T \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{e}}_y \quad (9)$$

$$\text{令 } \mathbf{H}_1 = \mathbf{N}_1^{-1} \hat{\mathbf{E}}_A^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A} - \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{N}_2 (\mathbf{I}_6 + \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{N}_2)^{-1} - \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{N}_2 (\mathbf{I}_6 + \mathbf{N}_2)^{-1} \mathbf{N}_1^{-1} \hat{\mathbf{E}}_A^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A}, \mathbf{H}_2 = \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{e}}_y + \mathbf{N}_1^{-1} \hat{\mathbf{E}}_A^T \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{e}}_y - \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{N}_2 (\mathbf{I}_6 + \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{N}_2)^{-1} \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{e}}_y - \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{N}_2 (\mathbf{I}_6 + \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{N}_2)^{-1} \mathbf{N}_1^{-1} \hat{\mathbf{E}}_A^T \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{e}}_y。$$

式(9)可以改写为:

$$\mathbf{b} = \mathbf{H}_1 \hat{\beta}_{\text{LS}} + \mathbf{H}_2 \quad (10)$$

式中,  $\mathbf{b}$  表示 WTLS 估值和 WLS 估值之间的改正项, 由于采用最小二乘求解地壳应变参数反演模型得到的是一个近似解, 在求解过程中未考虑函数模型中系数矩阵误差的影响, 且系数矩阵误差对 WLS 估计值的影响未知, 因此解算结果的优劣无法判断。采用总体最小二乘进行地壳应变参数的求解, 得到的是一个严密解, 此时在 WTLS 估值和 WLS 估值之间需要添加一个改正项。在式(10)的基础上进行模拟算例和实际算例的定量分析, 可以对最小二乘准则和总体最小二乘准则之间的差异性有一个初步的了解, 同时可以客观研究系数矩阵误差对地壳应变参数 WTLS 解的影响。

## 3 算例分析

### 3.1 模拟实验

对 3 个方案(见表 1)进行模拟实验, 以方案 1 为例, 在边长为 100 m<sup>2</sup> 的正方形区域, 沿  $x$  和  $y$  轴每隔 10 m 进行取样, 共得到 121 个坐标点, 如

最小二乘解的表达式进行相应调整可以得到<sup>[10]</sup>:

$$\hat{\beta}_{\text{WTLS}} = ((\mathbf{A} + \hat{\mathbf{E}}_A)^T \mathbf{P}_1 (\mathbf{A} + \hat{\mathbf{E}}_A))^{-1} (\mathbf{A} + \hat{\mathbf{E}}_A)^T \mathbf{P}_1 (\mathbf{A} \hat{\beta}_{\text{LS}} + \hat{\mathbf{e}}_y) \quad (7)$$

式中,  $\hat{\beta}_{\text{WTLS}}$  表示加权总体最小二乘估值;  $\hat{\beta}_{\text{LS}}$  表示加权最小二乘估值;  $\hat{\mathbf{E}}_A$  表示通过 WTLS 估计得到的系数矩阵误差的残差;  $\hat{\mathbf{e}}_y$  表示通过 WLS 估计得到的观测向量的残差。

将式(7)展开可以得到:

图 1。给定该区域应变参数  $\epsilon_x = 200 \times 10^{-8}$ ,  $\epsilon_y = -80 \times 10^{-8}$ ,  $\epsilon_{xy} = 1000 \times 10^{-8}$ ,  $\omega = 1100 \times 10^{-8}$  (模拟算例中未考虑平移量), 将坐标数据代入式(2)得到各点对应的位移量真值。分别给坐标点和位移量加入服从正态分布的随机误差, 此时函数模型式(4)中, 观测向量  $\mathbf{y}$  由加入误差后的位移量组成, 其中  $\mathbf{D}(\epsilon) = \sigma^2 \mathbf{Q}$ ,  $\sigma^2 = 1 \text{ cm}^2$ ,  $\mathbf{Q} = \text{diag}(0.1, 0.1, \dots, 0.1)$ ; 而系数矩阵中的随机元素  $\mathbf{a}$  由含有误差的坐标组成, 且满足  $\mathbf{D}(\epsilon_a) = \sigma^2 \mathbf{Q}_{\epsilon_a \epsilon_a}$ ,  $\mathbf{Q}_{\epsilon_a \epsilon_a} = \text{diag}(0.3, 0.3, \dots, 0.3)$ 。采用加权最小二乘(WLS)、基于 PEIV 模型的加权总体最小二乘法(PEIV-WTLS)两种方法求解表 1 中 3 种方案的应变参数, 同时计算相应的改正项  $\mathbf{b}$  用于衡量 WLS 与 PEIV-WTLS 法解算结果之间的差距。表 2 为方案 1、方案 2、方案 3 的应变参数计算结果。图 2 给出了利用基于 PEIV 模型的加权总体最小二乘法(PEIV-WTLS)求解得到的各方案观测向量和系数矩阵随机元素残差值。在算例模拟过程中, 为了使模拟的位移量符合实际情况, 在方案 2 和方案 3 中, 当模拟区域扩大时, 相应的应变参数需要进行调整。

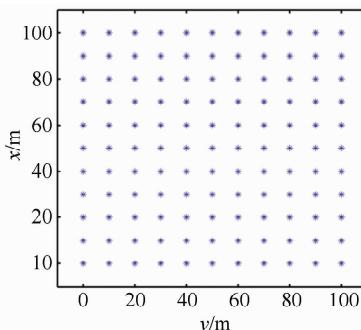


图1 方案1中地壳应变参数反演的模拟站点  
Fig. 1 Simulated Network Stations of the Inversion of Crustal Strain in Case 1

表1 各方案的情景设置

Tab. 1 The Scene of the Three Schemes

区域	方案1	方案2	方案3
采样间隔	沿x、y轴 每隔10 m	沿x、y轴 每隔20 m	沿x、y轴 每隔100 m
坐标点总数(采样)	121个	121个	121个
模拟应变参数真值	$\epsilon_x = 200 \times 10^{-8}$ $\epsilon_y = -80 \times 10^{-8}$ $\epsilon_{xy} = 1000 \times 10^{-8}$ $\omega = 1100 \times 10^{-8}$	$\epsilon_x = 200 \times 10^{-9}$ $\epsilon_y = -80 \times 10^{-9}$ $\epsilon_{xy} = 1000 \times 10^{-9}$ $\omega = 1100 \times 10^{-9}$	$\epsilon_x = 200 \times 10^{-10}$ $\epsilon_y = -80 \times 10^{-10}$ $\epsilon_{xy} = 1000 \times 10^{-10}$ $\omega = 1100 \times 10^{-10}$

表2 各方案参数计算结果

Tab. 2 Results of Parameters in Each Case

		$\epsilon_x$	$\epsilon_y$	$\epsilon_{xy}$	$\omega$
方案1	真值	$200 \times 10^{-8}$	$-80 \times 10^{-8}$	$1000 \times 10^{-8}$	$1100 \times 10^{-8}$
	WLS	$189 \times 10^{-8}$	$-86 \times 10^{-8}$	$1006 \times 10^{-8}$	$1097 \times 10^{-8}$
	PEIV-WTLS	$189 \times 10^{-8}$	$-86 \times 10^{-8}$	$1006 \times 10^{-8}$	$1097 \times 10^{-8}$
方案2	$b$	$-1.5 \times 10^{-18}$	$2.6 \times 10^{-17}$	$-1.5 \times 10^{-17}$	$-1.7 \times 10^{-17}$
	真值	$200 \times 10^{-9}$	$-80 \times 10^{-9}$	$1000 \times 10^{-9}$	$1100 \times 10^{-9}$
	WLS	$195 \times 10^{-9}$	$-81 \times 10^{-9}$	$1005 \times 10^{-9}$	$1100 \times 10^{-9}$
方案3	PEIV-WTLS	$195 \times 10^{-9}$	$-81 \times 10^{-9}$	$1005 \times 10^{-9}$	$1100 \times 10^{-9}$
	$b$	$-3.2 \times 10^{-21}$	$8.9 \times 10^{-21}$	$-4.8 \times 10^{-21}$	$-7.1 \times 10^{-21}$
	真值	$200 \times 10^{-10}$	$-80 \times 10^{-10}$	$1000 \times 10^{-10}$	$1100 \times 10^{-10}$
方案3	WLS	$202 \times 10^{-10}$	$-83 \times 10^{-10}$	$999 \times 10^{-10}$	$1103 \times 10^{-10}$
	PEIV-WTLS	$202 \times 10^{-10}$	$-83 \times 10^{-10}$	$999 \times 10^{-10}$	$1103 \times 10^{-10}$
	$b$	$-2.9 \times 10^{-23}$	$9.8 \times 10^{-23}$	$-1.0 \times 10^{-22}$	$-1.2 \times 10^{-22}$

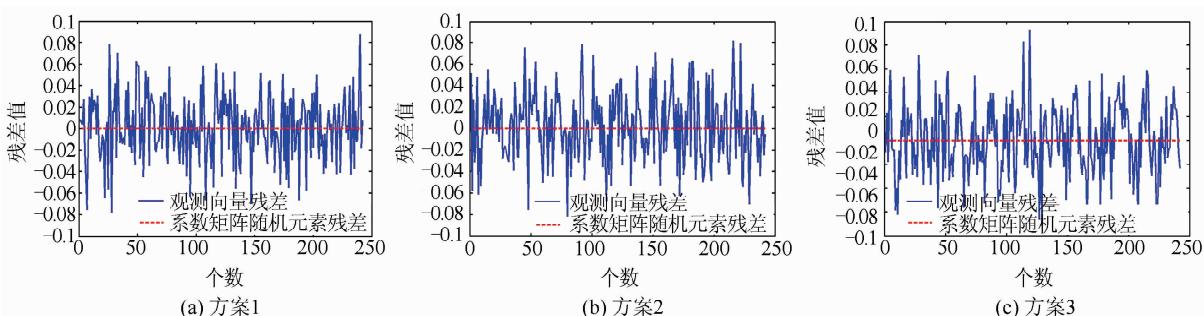


图2 各方案观测向量和系数矩阵随机元素残差值(PEIV-WTLS)  
Fig. 2 Residuals of Observation Vector and Coefficient Matrix in Each Case(PEIV-WTLS)

从表2中可以看出,采用WLS和PEIV-WTLS这两种算法求解得到的应变参数估值基本相同,无法看出两者之间的区别,因此通过分析表格中的改正项b对这种现象进行探索。从式(10)中可以看出,影响改正项b大小的主要因素来自地壳应变参数的加权最小二乘估值 $\hat{\beta}_{WLS}$ ,以及矩阵 $\mathbf{H}_1$ 和 $\mathbf{H}_2$ 中的元素(主要为系数矩阵的残差 $\hat{\mathbf{E}}_A$ 和WLS估计得到的观测向量的残差 $\hat{\mathbf{e}}_y$ )。在地壳应变参数反演模型中,系数矩阵的随机元素是由观测站点的坐标组成的,站点坐标所含误

差的量级一般为 $10^{-3} \sim 10^{-2}$ ,观测向量元素由位移量组成,残差 $\hat{\mathbf{e}}_y$ 的量级一般在 $10^{-3} \sim 10^{-2}$ ,应变参数估值的量级一般与观测站点坐标的量级呈负相关。从表1中可以看出,随着模拟区域扩大,站点坐标值增大,应变参数随之减小。比较方案1和方案2可以看出,当模拟区域扩大4倍,即坐标点观测值量级扩展到 $10^2$ 时,相应的改正项减小 $10^{-4}$ 个量级;比较方案2和方案3,当模拟区域扩大25倍,即坐标点观测值量级扩展到 $10^3$ 时,相应的改正项减小 $10^{-2}$ 个量级,产生这一现象的

主要原因随着坐标点观测值量级的增大,求解得到的应变参数变小,从式(3)中可以看出,系数矩阵中随机元素的误差是通过与应变参数的乘积形式对函数模型产生影响的,因此当应变参数减小的同时也会削弱系数矩阵中随机元素对模型解算的影响。也可以解释为,由于反演模型系数矩阵基本是由监测点坐标组成的,数值一般在 $10^6$ 量级,坐标观测值中含有的误差被坐标值本身淹没,导致计算结果与 WLS 结果基本相同。在许多研究坐标转换的文献中也存在相同的问题<sup>[12]</sup>。从图 2 可以看出,采用严密的 PEIV-WTLS 算法可以求解得到观测向量的残差值,却无法恢复系数矩阵中随机元素的残差值。区域性形变研究是一个长期的过程,任何微小的变化经过长时间的积累都会达到一个可观的量级,因此在监测地壳形变和运动时,再微小的变化也需要考虑在内,地壳应变参数反演模型中系数矩阵的误差随着观测区域的扩大会逐渐减小其对整个模型参数估计的贡献,却不能忽略其微小的影响,需要采用严密的方法将其考虑在内。

### 3.2 川滇地区地壳应变参数反演

在实际情况中, GPS 监测站点的分布一般比较分散,且数量较少,站点质量存在差异。这也给区域性地壳形变研究带来了更多的不确定性。本文采用 GPS 速度场数据对川滇地区 8 个块体的应变率参数进行反演,以此来探索在实际情况中是否也存在上述 3 个模拟方案中相同的情况。川滇地区主要包括北纬 $20^{\circ}\sim 34^{\circ}$ 、东经 $96^{\circ}\sim 106^{\circ}$ 的中国大陆西南区域的青藏高原东南部,分布于其中的大量活动断层将该区域分成了许多块体,主要的断层有红河断层、小江断层、腾冲-景洪断层、鲜水河断层、安宁河断层、丽江断层、金沙江断层和龙门山断层等,这些断层所分割成的块体有马尔康块体(I)、川西北块体(II1)、滇中块体(II2)、保山块体(III1)、景谷块体(III2)、勐腊块体(III3)、羌塘块体(IV)和华南块体(V)<sup>[13]</sup>,各块体与断层之间的空间关系见图 3。

本文所用的 GPS 水平速度场的数据来自于文献[15],即 1998~2004 年中国地壳运动观测网络的 GPS 水平速度场及其方差-协方差矩阵数据,主要来源于中国地壳运动观测网络。在应变率参数反演过程中,首先将每个 GPS 速度场数据对应的测站的经、纬度坐标经过高斯投影转换为高斯平面直角坐标(区域坐标),在坐标转换过程中,选取每个块体中心单独投影<sup>[16]</sup>。由于 GPS 测站的经纬度坐标的测定必然含有误差,而且在

坐标转换中也会引入其他误差,而本文采用的地壳应变参数反演的 PEIV 模型求解方法可以顾及这些坐标误差。利用式(10)计算各个块体的改正项  $b$ ,具体计算结果见表 3。此处需要明确,当采用的观测数据为位移时,计算得到的是地壳应变参数;当采用的观测数据为速度时,计算得到的是应变率参数。图 4 给出了利用基于 PEIV 模型的加权总体最小二乘法求解得到的各个块体反演过程中观测向量和系数矩阵随机元素残差值,图中实线表示观测向量残差,虚线表示系数矩阵残差。

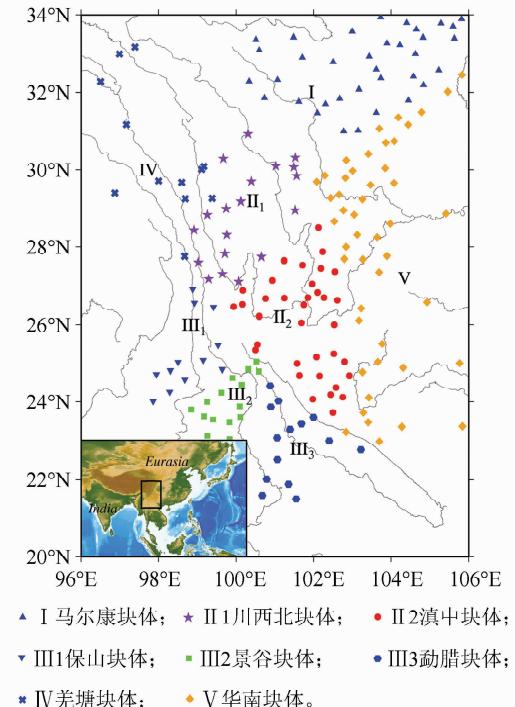


图 3 川滇地区 GPS 监测点分布图<sup>[14]</sup>

Fig. 3 The Distribution of GPS Stations in the Region of Sichuan and Yunnan<sup>[14]</sup>

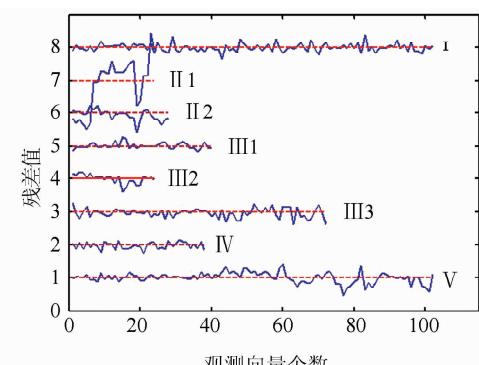


图 4 川滇地区地壳应变参数反演过程中观测向量和系数矩阵随机元素残差值

Fig. 4 Residuals of Observation Vector and Coefficient Matrix in the Region of Sichuan and Yunnan

表3 各块体应变率参数计算改正项b结果

Tab. 3 The Calculation Results of Each Block Strain Rate Parameter

改正项	$u/a$	$v/a$	$\epsilon_x/a$	$\epsilon_y/a$	$\epsilon_{xy}/a$	$\omega/a$
$b_1$	$-5.6 \times 10^{-16}$	$-2.2 \times 10^{-15}$	$-4.4 \times 10^{-22}$	$8.7 \times 10^{-24}$	$1.9 \times 10^{-23}$	$6.9 \times 10^{-23}$
$b_{III}$	$2.2 \times 10^{-15}$	$-1.2 \times 10^{-15}$	$3.1 \times 10^{-23}$	$-1.6 \times 10^{-23}$	$-3.4 \times 10^{-23}$	$-5.0 \times 10^{-23}$
$b_{II2}$	$2.2 \times 10^{-15}$	$7.5 \times 10^{-18}$	$1.2 \times 10^{-24}$	$-4.5 \times 10^{-25}$	$-2.7 \times 10^{-24}$	$-4.3 \times 10^{-24}$
$b_{III1}$	$-2.7 \times 10^{-15}$	$9.4 \times 10^{-15}$	$1.6 \times 10^{-20}$	$-1.1 \times 10^{-21}$	$-2.7 \times 10^{-21}$	$-2.5 \times 10^{-21}$
$b_{III2}$	$8.6 \times 10^{-16}$	$2.1 \times 10^{-15}$	$1.7 \times 10^{-23}$	$-2.4 \times 10^{-23}$	$-2.8 \times 10^{-24}$	$-1.2 \times 10^{-24}$
$b_{III3}$	$-3.4 \times 10^{-13}$	$5.4 \times 10^{-13}$	$5.3 \times 10^{-22}$	$2.2 \times 10^{-22}$	$3.0 \times 10^{-22}$	$1.8 \times 10^{-22}$
$b_{IV}$	$1.8 \times 10^{-13}$	$1.8 \times 10^{-13}$	$-1.3 \times 10^{-20}$	$-4.8 \times 10^{-22}$	$-6.9 \times 10^{-21}$	$-6.4 \times 10^{-21}$
$b_V$	$-5.6 \times 10^{-16}$	$-3.7 \times 10^{-16}$	$-1.9 \times 10^{-24}$	$7.1 \times 10^{-25}$	$5.4 \times 10^{-26}$	$1.2 \times 10^{-24}$

1)在利用GPS监测点复测资料所得的位移、速度反演应变或应变率参数时,用最小二乘方法未考虑由监测点坐标组成的反演模型系数矩阵的误差影响,而PEIV-WTLS算法考虑了观测向量的误差,同时考虑了反演模型系数矩阵的扰动对反演应变参数的影响,从理论上,PEIV模型算法更加合理。

2)结合图3和表3可以看出,保山块体(III1)区域内的GPS监测点分布较为集中,且覆盖区域较小,因此相比于其他块体,改正项b的量级更大些;滇中块体(II2)和羌塘块体(IV)区域内的GPS监测点覆盖范围较广,因此相比于其他块体,改正项b的量级更小些,这也与上述模拟方案中得到的结论相一致。

3)表3中的改正项b主要用于衡量WLS与PEIV-WTLS算法解算结果之间的差距。通过比较不同块体地壳应变率参数反演改正项b的大小,可以更直观地分析影响地壳应变率参数反演过程的因素。地壳应变率参数反演模型中系数矩阵的随机元素由监测点坐标组成,含有随机误差,若不考虑其影响,则会导致解算结果存在偏差。

4)从图4中可以看出,利用PEIV-WTLS算法可以估算出各块体相应区域中GPS监测站点位移中包含的随机误差,而无法估算出GPS监测站点坐标含有的随机误差,即系数矩阵中的随机误差,这与模拟方案中的结果相同,主要是由于GPS监测站点坐标值量级过大,相应的应变参数偏小,较小的应变参数抑制了系数矩阵中的随机误差对模型估计的贡献度。

5)区域性地壳应力应变研究需要极高的测量精度,因此在进行地壳应变率参数求解时必须采用理论严密的算法。虽然系数矩阵中随机元素的误差相对于随机元素本身量级过小,但在一定程度上也会影响模型估计过程,因此必须将其考虑在内。

## 4 结语

本文将以PEIV模型为基础的加权总体最小二乘算法应用于地壳应变参数反演,该算法考虑了以往一直被忽略的系数矩阵误差的影响,得到了合理的参数解。通过改正项b定量分析系数矩阵误差对参数估计的影响。通过对模拟数据和川滇地区的实际数据进行处理,可以得知系数矩阵误差对地壳应变参数反演的影响主要受到GPS站点坐标值量级以及应变参数量级的牵制。同时存在加权总体最小二乘算法无法恢复系数矩阵随机元素误差这一问题,对于这一问题的解决方法还有待进一步研究。

## 参 考 文 献

- [1] Xu Caijun. Progress of Joint Inversion on Geodesy and Geophysics [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2001, 26(6): 555-561 (许才军. 大地测量联合反演理论和方法研究进展[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2001, 26(6): 555-561)
- [2] Jiang Zaisen, Zhang Xi, Wang Shuangxu, et al. The Method of Solving Horizontal Crustal Strain Field by Using Crustal Deformation Observation [J]. *Earthquake*, 1999, 19(1): 41-48 (江在森, 张希, 王双绪等. 利用地形变观测量求解地壳水平应变场的方法[J]. 地震, 1999, 19(1): 41-48)
- [3] Li Yanxing, Hu Xinkang, Shuai Ping, et al. The Velocity Fields and Strain Fields of Horizontal Crust Motion of the Mainland of China [J]. *Recent Developments in World Seismology*, 2002, (7): 1-9 (李延兴, 胡新康, 帅平, 等. 中国大陆地壳水平运动速度场与应变场[J]. 国际地震动态, 2002(7): 1-9)
- [4] Yang Guohua, Li Yanxing, Han Yueping, et al. Current Horizontal Strain Field in Chinese Mainland Derived from GPS Data [J]. *Acta Seismologica Sinica*, 2002, 24(4): 337-347 (杨国华, 李延兴, 韩月

- 萍,等. 由 GPS 观测结果推导中国大陆现今水平应变场[J]. 地震学报,2002, 24(4):337-347
- [5] Lü Jiangning, Shen Zhengkang, Wang Min. Contemporary Crustal Deformation and Active Tectonic Block Model of The Sichuan-Yunnan Region, China [J]. *Seismology and Geology*, 2003, 25(4): 543-554 (吕江宁,沈正康,王敏. 川滇地区现代地壳运动速度场和活动块体模型研究[J]. 地震地质, 2003, 25(4):543-554)
- [6] Wang Xiaoqiang, Li Jie, Alexanderz, et al. Horizontal Movement and Strain Characteristics in Tianshan and Its Adjacent Region with GPS Deformation Data[J]. *Acta Seismologica Sinica*, 2007, 29(1): 31-37 (王晓强,李杰,Alexander Z,等. 利用 GPS 形变资料研究天山及邻近地区地壳水平位移与应变特征[J]. 地震学报,2007,29(1):31-37)
- [7] Wang Yanzhao, Wang Enning, Shen Zhengkang, et al. GPS-constrained Inversion of Present-day Slip Rates along Major Faults of The Sichuan-Yunnan Region, China[J]. *Science in China Series D: Earth Sciences*, 2008, 38(5): 582-597 (王阎昭,王恩宁,沈正康,等. 基于 GPS 资料约束反演川滇地区主要断裂现今活动速率[J]. 中国科学(D辑),2008, 38 (5):582-597)
- [8] Wang Leyang. Inversion of Crustal Strain Parameters Based on Total Least Squares[J]. *Journal of Geodesy and Geodynamics*, 2013, 33(3): 106-110 (王乐洋. 地壳应变参数反演的总体最小二乘方法[J]. 大地测量与地球动力学,2013, 33(3): 106-110)
- [9] Xu P L, Liu J N, Shi C. Total Least Squares Adjustment in Partial Errors-in-variables Models: Algorithm and Statistical Analysis[J]. *Journal of Geodesy*, 2012, 86(8):661-675
- [10] Zeng Wenxian. Effect of the Random Design Matrix on Adjustment of an EIV Model and Its Reliability Theory[D]. Wuhan: Wuhan University, 2013 (曾文宪. 系数矩阵误差对 EIV 模型平差结果的影响研究[D]. 武汉:武汉大学, 2013)
- [11] Tao Benzao. Free Network Adjustment and Deformation Analysis[M]. Wuhan: Wuhan Technical University of Surveying and Mapping Press, 2011 (陶本藻. 自由网平差与变形分析[M]. 武汉:武汉测绘科技大学出版社, 2011)
- [12] Schaffrin B, Felus Y A. On the Multivariate Total Least-squares Approach to Empirical Coordinate [J]. *Journal of Geodesy*, 2008, 82(6): 373-383
- [13] Xu Xiwei, Wen Xueze, Zheng Rongzhang, et al. Pattern of Latest Tectonic Motion and Its Dynamics for Active Blocks in Sichuan-Yunnan Region, China [J]. *Science in China Series D: Earth Sciences*, 2003, 33 (Suppl 1): 151-162 (徐锡伟,闻学泽,郑荣章,等. 川滇地区活动块体最新构造变动样式及其动力来源[J]. 中国科学(D辑),2003, 33(S1): 151-162)
- [14] Xu C J, Wen Y M. Identification and Analyze of Crustal Motion and Deformation Models in The Sichuan-Yunnan Region[J]. *Journal of Applied Geodesy*, 2007, 1(4):213-222
- [15] Shen Z K, Lv J N, Wang M, et al. Contemporary Crustal Deformation Around The Southeast Borderland of The Tibetan Plateau[J]. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 2005, 110(B11)
- [16] Wang Leyang. Research on Theory and Application of Total Least Squares in Geodetic Inversion[D]. Wuhan: Wuhan University, 2011 (王乐洋. 基于总体最小二乘的大地测量反演理论及应用研究[D]. 武汉:武汉大学, 2011)

## The Effect of the Random Coefficient Matrix on Adjustment of the Inversion of Crustal Strain Parameters Model

WANG Leyang<sup>1,2</sup> XU Guangyu<sup>1,3</sup>

1 Faculty of Geomatics, East China Institute of Technology, Nanchang 330013, China

2 Key Laboratory of Watershed Ecology and Geographical Environment Monitoring, NASG, Nanchang 330013, China

3 School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan 430079, China

**Abstract:** The weighted total least squares method based on partial errors-in-variables (PEIV for short) model is used to solve the inversion parameters of crustal strain model. It not only considers the error of observation (displacement or velocity field), but also the error effects from the coefficient matrix, generally composed of monitoring points coordinates. When taking the special structure of the coefficient matrix in the geodetic inversion model into account, we insure that the repeated coordinates

have the same residual and that the constants are not allocated any correction. The method used in this paper can meet these requirements as it separates the random elements from the constant elements taking advantage of the partial errors-in-variables model. All calculation formulae for crust strain (rate) parameters inversion based on partial errors-in-variables using monitoring point displacement or velocity fields are deduced. In addition, the derivate correction of weighted least squares (WLS) is used to analyze the effect of the random coefficient. The discrepancy between the weighted least squares solution and WTLS solution was also investigated. Because of the complexity of the WTLS solution, we propose a formulation to relate the WLS\ and WTLS solutions based on Xu (J Geod 86:661-675, 2012). A simulation using data from the Sichuan-Yunnan region permits a comparison and analysis of the effect of the random design matrix. The experimental results reveal that the effect of the random coefficient matrix on adjustment of the inversion of crustal strain (rate) parameters model is mainly depend on the order of value of the GPS coordinates and the crustal strain parameters themselves.

**Key words:** geodetic inversion; weighted total least squares; Sichuan-Yunnan region; coefficient matrix; crustal strain; partial errors-in-variables

**First author:** WANG Leyang, PhD, associate professor, specializes in geodetic inversion and data processing. E-mail: wleyang@163.com

**Foundation support:** The National Natural Science Foundation of China, Nos. 41664001, 41204003; the Support Program for Outstanding Youth Talents in Jiangxi Province, No. 20162BCB23050; the National Department Public Benefit Research Foundation (Surveying, Mapping and Geoinformation), No. 201512026; the National Key Research and Development Program No. 2016YFB0501405; the Science and Technology Project of the Education Department of Jiangxi Province, No. GJJ150595; the Project of Key Laboratory of Watershed Ecology and Geographical Environment Monitoring, No. WE2015005; the Project of Key Laboratory of Mapping from Space, NASG, No. K201502; the Scientific Research Foundation of ECIT, No. DHBK201113.