

基于逆 Vening-Meinesz 公式的测高重力 中央区效应精密计算

李厚朴¹ 边少锋¹ 纪 兵¹ 陈永冰¹

1 海军工程大学导航工程系,湖北 武汉,430033

摘 要:为提高利用逆 Vening-Meinesz 公式反演测高重力中央区效应的精度,视中央区为矩形域,将垂线偏差分量表示成双二次多项式插值形式,引入非奇异变换,推导出了重力异常的计算公式。以低纬度区域 $2' \times 2'$ 的垂线偏差实际数据为背景场进行了计算,结果表明,当中央区包含 4 个网格时,传统公式与推导出的重力异常计算公式误差的最大值大于 1 mGal。推导出的公式可为高精度测高重力中央区效应的计算提供理论依据。
关键词:卫星测高;逆 Vening-Meinesz 公式;非奇异变换;重力异常;中央区效应
中图分类号:P223 **文献标志码:**A

20 世纪 70 年代,卫星测高技术的出现以及多个卫星测高任务的顺利实施为人们获取全球海域高精度、高分辨率的海面高数据提供了极大的便利。利用卫星测高数据推求海域重力异常是卫星测高在大地测量研究中的主要应用,国内外许多学者对此进行了大量的研究,取得了丰富的研究成果^[1-9]。其中,逆 Vening-Meinesz 公式法的输入量为垂线偏差,而垂线偏差是由测高观测值的一次差分求得,可以消除与地理位置相关的径向轨道误差和长波海面地形等类似系统误差,同时含有丰富的重力场高频成分,非常有利于高分辨率海洋重力场的恢复。因此,逆 Vening-Meinesz 公式在测高重力反演中的应用较为广泛^[10]。

在计算点本身及其附近区域计算重力异常时,积分区域包含计算点,导致逆 Vening-Meinesz 公式中的积分奇异,本文称该积分区域为中央区。Hwang^[5]将中央区视为圆域,推导出了中央区重力异常的计算公式;常晓涛等^[9]将中央区视为方形域,推导出了中央区效应的计算公式,指出中央区效应与奇异区内垂线偏差分量的梯度及奇异区面积的大小有关。由于实际数据通常为网格化分布,受子午线收敛的影响,中央区更接近于矩形域,因此,将中央区视为圆域和方形域的处理方法与数据真实分布情况并不相符,由此

产生的误差在高精度重力反演中能否忽略值得深入研究。鉴于此,本文推导出了视中央区为矩形域时的重力异常计算公式,并对导出公式和圆域与方形域下传统公式的误差进行了分析比较。

1 逆 Vening-Meinesz 公式的平面近似形式

略去详细的推导过程,根据文献[5],直接写出逆 Vening-Meinesz 公式如下:

$$\Delta g = \frac{\gamma_0}{4\pi\omega} \iint_{\sigma} H'(\psi_{PQ})(\xi_Q \cos \alpha_{QP} + \eta_Q \sin \alpha_{QP}) d\sigma \tag{1}$$

式中, $\gamma_0 = 979.8$ Gal 为地球平均重力; α_{QP} 代表流动点 Q 至计算点 P 的方位角; ψ_{PQ} 为 P 、 Q 之间的球面距离; ξ_Q 和 η_Q 分别代表流动点 Q 处的垂线偏差在子午圈方向和卯酉圈方向上的分量; $H'(\psi_{PQ})$ 为积分核函数,其表达式为:

$$H'(\psi_{PQ}) = -\frac{\cos \frac{\psi_{PQ}}{2}}{2 \sin^2 \frac{\psi_{PQ}}{2}} + \frac{\cos \frac{\psi_{PQ}}{2} (3 + 2 \sin \frac{\psi_{PQ}}{2})}{2 \sin \frac{\psi_{PQ}}{2} (1 + \sin \frac{\psi_{PQ}}{2})} \tag{2}$$

为对中央区进行计算,首先定义以计算点 P 为原点的局部切平面直角坐标系,如图 1 所示, x

轴指向北极, y 轴指向东, 且 xy 平面在 P 点与地球表面相切, $Q(x, y)$ 为中央区流动的积分点, l 为计算点与流动点的平面距离。由图 1 可知:

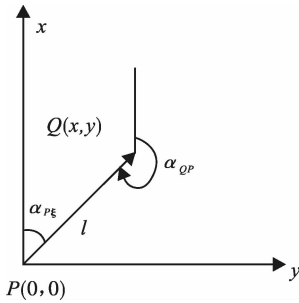


图 1 局部坐标系示意图

Fig. 1 The Sketch Map of the Local Coordinate System

$$\begin{cases} \cos\alpha_{QP} = -\frac{x}{l} \\ \sin\alpha_{QP} = -\frac{y}{l} \end{cases} \quad (3)$$

式中, $l = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。

当积分区域比较小时, 球面角距 φ_{PQ} 可以简化为:

$$\varphi_{PQ} \approx \frac{l}{R} \quad (4)$$

则式(1)中的积分核函数可以简化为:

$$\begin{aligned} H'(\varphi_{PQ}) &\approx -\frac{\cos \frac{\varphi_{PQ}}{2}}{2 \sin^2 \frac{\varphi_{PQ}}{2}} + \frac{3 \cos \frac{\varphi_{PQ}}{2}}{2 \sin \frac{\varphi_{PQ}}{2}} \approx - \\ &\frac{1}{2 \left(\frac{\varphi_{PQ}}{2}\right)^2} = -\frac{2}{\varphi_{PQ}^2} \approx -\frac{2R^2}{l^2} \end{aligned} \quad (5)$$

将式(3)和式(5)代入式(1), 顾及平面近似下积分面元为 $R^2 d\sigma = dxdy$, 可得中央区重力异常的计算公式为:

$$\begin{aligned} \Delta g &= \frac{\gamma_0}{4\pi\omega} \iint_{\sigma} \left(-\frac{2R^2}{l^2}\right) \left(-\frac{x}{l}\xi_Q + \left(-\frac{y}{l}\right)\eta_Q\right) \cdot \\ &\frac{1}{R^2} dxdy = \frac{\gamma_0}{2\pi\omega} \iint_{\sigma} \frac{\xi_Q x + \eta_Q y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dxdy \end{aligned} \quad (6)$$

可以看出, 式(6)中的积分在计算点 P 处奇异。为解决这一问题, 文献[5]将中央区视为圆域, 将中央区内的垂线偏差分量 ξ_Q 和 η_Q 展开为泰勒级数形式:

$$\begin{aligned} \xi(x, y) &= \xi_P + \xi_x x + \xi_y y + \frac{1}{2!}(\xi_{xx} x^2 + \\ &2\xi_{xy} xy + \xi_{yy} y^2) + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \eta(x, y) &= \eta_P + \eta_x x + \eta_y y + \frac{1}{2!}(\eta_{xx} x^2 + \\ &2\eta_{xy} xy + \eta_{yy} y^2) + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

式中, $\xi_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}$, $\xi_y = \frac{\partial \xi}{\partial y}$, $\xi_{xx} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$, $\xi_{yy} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}$,

$$\begin{aligned} \xi_{xy} &= \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}, \eta_x = \frac{\partial \eta}{\partial x}, \eta_y = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \eta_{xx} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \eta_{yy} \\ &= \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}, \eta_{xy} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}。 \end{aligned}$$

导出的中央区重力异常计算公式为:

$$\Delta g_1 = \frac{\gamma_0}{2} \sqrt{\frac{\Delta x \Delta y}{\pi}} (\xi_x + \eta_y) \quad (9)$$

式中, Δx 、 Δy 分别表示 x 方向和 y 方向的网格间距。

文献[9]将中央区视为方形域, 将垂线偏差分量同样表示为式(7)和式(8), 导出的重力异常计算公式为:

$$\Delta g_2 = \frac{2 \ln(1 + \sqrt{2})}{\pi} s \gamma_0 (\xi_x + \eta_y) \quad (10)$$

式中, s 为方形域长度的一半。

2 测高重力中央区效应的精密计算公式

首先将中央区垂线偏差分量表示为双二次多项式插值形式, 之后利用文献[11-13]提出的非奇异变换对逆 Vening-Meinesz 公式中的奇异积分进行了处理, 推导出了中央区重力异常的精密计算公式。

2.1 中央区垂线偏差分量双二次多项式插值表示

如图 2 所示, 设中央区为 $\sigma[-a < x < a, -b < y < b]$, 其中 $a = 1, b = \cos \varphi$ 。中央区共包含 4 个网格单元, 9 个网格节点。将垂线偏差子午分量 ξ_Q 、卯酉分量 η_Q 表示成双二次多项式插值形式:

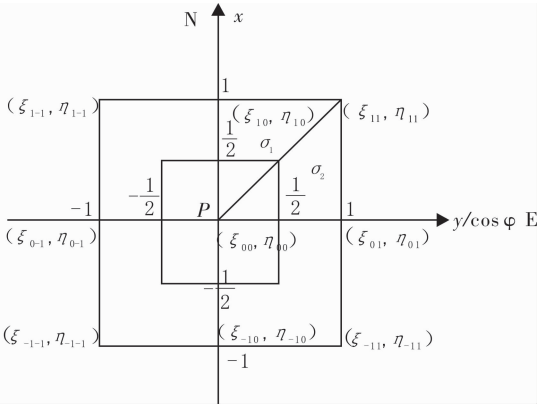


图 2 垂线偏差双二次多项式插值表示时的中央区

Fig. 2 The Innermost Area when the Components of Deflections of the Vertical are Expressed as Bi-quadratic Polynomials

$$\xi(x, y) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \alpha_{ij} x^i y^j = \sum_{i=0}^2 x^i \sum_{j=0}^2 \alpha_{ij} y^j \quad (11)$$

$$\eta(x,y) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \beta_{ij} x^i y^j = \sum_{i=0}^2 x^i \sum_{j=0}^2 \beta_{ij} y^j \quad (12)$$

为确定出待定系数 α_{ij} 和 β_{ij} , 将式(11)和式(12)改写为:

$$\xi(x,y) = \sum_{i=0}^2 x^i \sum_{j=0}^2 c_{ij} (y/\cos\varphi)^j = (1,x,x^2) \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y/\cos\varphi \\ y^2/\cos^2\varphi \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\eta(x,y) = \sum_{i=0}^2 x^i \sum_{j=0}^2 d_{ij} (y/\cos\varphi)^j = (1,x,x^2) \begin{pmatrix} d_{00} & d_{01} & d_{02} \\ d_{10} & d_{11} & d_{12} \\ d_{20} & d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y/\cos\varphi \\ y^2/\cos^2\varphi \end{pmatrix} \quad (14)$$

则有:

$$\alpha_{ij} = c_{ij} (1/\cos\varphi)^j \quad (15)$$

$$\beta_{ij} = d_{ij} (1/\cos\varphi)^j \quad (16)$$

将图 2 中网格节点处的垂线偏差子午分量 $\xi_{ij} = \xi(i,j\cos\varphi)$ 和卯酉分量 $\eta_{ij} = \eta(i,j\cos\varphi)$ ($i,j = -1,0,1$) 作为插值条件代入式(13)和式(14),可得:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{-1-1} & \xi_{-10} & \xi_{-11} \\ \xi_{0-1} & \xi_{00} & \xi_{01} \\ \xi_{1-1} & \xi_{10} & \xi_{11} \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{00} & d_{01} & d_{02} \\ d_{10} & d_{11} & d_{12} \\ d_{20} & d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_{-1-1} & \eta_{-10} & \eta_{-11} \\ \eta_{0-1} & \eta_{00} & \eta_{01} \\ \eta_{1-1} & \eta_{10} & \eta_{11} \end{pmatrix} \quad (18)$$

式(17)、(18)可以简化为:

$$\mathbf{A}(c_{ij})\mathbf{A}^T = (\xi_{ij}) \quad (19)$$

$$\mathbf{A}(d_{ij})\mathbf{A}^T = (\eta_{ij}) \quad (20)$$

其中,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

系数矩阵 \mathbf{A} 非奇异、可逆,并且:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (22)$$

因此有:

$$(c_{ij}) = \mathbf{A}^{-1}(\xi_{ij})(\mathbf{A}^{-1})^T \quad (23)$$

$$(d_{ij}) = \mathbf{A}^{-1}(\eta_{ij})(\mathbf{A}^{-1})^T \quad (24)$$

将式(23)和式(24)代入式(15)和式(16)即可确定出待定系数 α_{ij} 和 β_{ij} 。

2.2 中央区重力异常的解析计算公式

为推导方便,记式(6)中的奇异积分为:

$$IV = \iint_{\sigma} \frac{\xi_Q x + \eta_Q y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx dy = IV_{\xi} + IV_{\eta} \quad (25)$$

其中,

$$IV_{\xi} = \iint_{\sigma} \frac{\xi_Q x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx dy \quad (26)$$

$$IV_{\eta} = \iint_{\sigma} \frac{\eta_Q y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx dy \quad (27)$$

将式(11)和式(12)分别代入式(26)和式(27),并考虑到奇偶函数的积分性质,则有:

$$IV_{\xi} = \iint_{\sigma} \frac{(\alpha_{10} + \alpha_{12} y^2) x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx dy \quad (28)$$

$$IV_{\eta} = \iint_{\sigma} \frac{(\beta_{01} + \beta_{21} x^2) y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx dy \quad (29)$$

由计算点 P 向右上顶点作连线分右上象限为 $\sigma_1 [0 < x < 1, 0 < y < bx]$ 和 $\sigma_2 [0 < x < b^{-1} y, 0 < y < b]$ (见图 2)。

对 σ_1 引入非奇异变换^[11-13]:

$$\begin{cases} x = x \\ y = kx \end{cases} \quad (30)$$

对 σ_2 引入非奇异变换^[11-13]:

$$\begin{cases} x = \lambda y \\ y = y \end{cases} \quad (31)$$

则三角形 σ_1 映射为矩形 $\sigma'_1 [0 < x < 1, 0 < k < b]$, 三角形 σ_2 映射为矩形 $\sigma'_2 [0 < \lambda < b^{-1}, 0 < y < b]$ 。将式(30)和式(31)分别代入式(28)和式(29),并注意到两式中的被积函数均为偶函数,因此有:

$$IV_{\xi} = 4 \iint_{\sigma_1} \frac{(\alpha_{10} + \alpha_{12} y^2) x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx dy + 4 \iint_{\sigma_2} \frac{(\alpha_{10} + \alpha_{12} y^2) x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx dy = 4 \int_0^b \int_0^1 \frac{\alpha_{10} + \alpha_{12} k^2 x^2}{(1 + k^2)^{3/2}} dx dk + 4 \int_0^{b^{-1}} \int_0^b \frac{(\alpha_{10} + \alpha_{12} y^2) \lambda^2}{(1 + \lambda^2)^{3/2}} dy d\lambda = 4 \int_0^b \frac{\alpha_{10} + \frac{1}{3} \alpha_{12} k^2}{(1 + k^2)^{3/2}} dk + 4b(\alpha_{10} + \frac{1}{3} \alpha_{12} b^2) \int_0^{b^{-1}} \frac{\lambda^2}{(1 + \lambda^2)^{3/2}} d\lambda \quad (32)$$

$$IV_{\eta} = 4 \iint_{\sigma_1} \frac{(\beta_{01} + \beta_{21}x^2)y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx dy + 4 \iint_{\sigma_2} \frac{(\beta_{01} + \beta_{21}x^2)y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx dy = 4 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(\beta_{01} + \beta_{21}x^2)k^2}{(1 + k^2)^{3/2}} dx dk +$$
$$4 \int_0^{b^{-1}} \int_0^b \frac{\beta_{01} + \beta_{21}\lambda^2 y^2}{(1 + \lambda^2)^{3/2}} dy d\lambda = 4(\beta_{01} + \frac{1}{3}\beta_{21}) \int_0^b \frac{k^2}{(1 + k^2)^{3/2}} dk + 4b \int_0^{b^{-1}} \frac{\beta_{01} + \frac{1}{3}\beta_{21}\lambda^2 b^2}{(1 + \lambda^2)^{3/2}} d\lambda \quad (33)$$

可以看出,在非奇异变换下,原来含有 $x、y$ 两变量的二维积分转换为只含 $k(\lambda)$ 变量的一维积分,利用 Mathematica 计算机代数系统^[14-15]可求得:

$$IV_{\xi} = 4 \left(\frac{b}{\sqrt{1+b^2}} \alpha_{10} + \frac{1}{3} \alpha_{12} (\operatorname{arsh}(b) - \frac{b}{\sqrt{1+b^2}}) + \right.$$
$$\left. b(\alpha_{10} + \frac{1}{3} \alpha_{12} b^2) (\operatorname{arsh}(b^{-1}) - \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}) \right) \quad (34)$$

$$IV_{\eta} = 4 \left(\frac{b}{\sqrt{1+b^2}} \beta_{01} + (\beta_{01} + \frac{1}{3} \beta_{21}) (\operatorname{arsh}(b) - \right.$$
$$\left. \frac{b}{\sqrt{1+b^2}}) + \frac{1}{3} \beta_{21} b^3 (\operatorname{arsh}(b^{-1}) - \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}) \right) \quad (35)$$

$$\operatorname{arsh}(b) = \ln(b + \sqrt{1+b^2}) \quad (36)$$

$$\operatorname{arsh}(b^{-1}) = \ln(b^{-1} + \sqrt{1+b^{-2}}) \quad (37)$$

因此,式(6)中的奇异积分可以表示为:

$$IV = 4 \left(\frac{b}{\sqrt{1+b^2}} (\alpha_{10} + \beta_{01}) + (\frac{1}{3} \alpha_{12} + \beta_{01} + \frac{1}{3} \beta_{21}) \cdot \right.$$
$$\left. (\operatorname{arsh}(b) - \frac{b}{\sqrt{1+b^2}}) + b(\alpha_{10} + \frac{1}{3} \alpha_{12} b^2 + \frac{1}{3} \beta_{21} b^2) \cdot \right.$$
$$\left. (\operatorname{arsh}(b^{-1}) - \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}) \right) \quad (38)$$

将式(38)代入式(6),可得中央区包含 4 个网格时,垂线偏差双二次多项式插值表示下重力异常的计算公式为:

$$\Delta g_3 = \frac{2\gamma_0}{\pi} \left(\frac{b}{\sqrt{1+b^2}} (\alpha_{10} + \beta_{01}) + (\frac{1}{3} \alpha_{12} + \beta_{01} + \right.$$
$$\left. \frac{1}{3} \beta_{21}) (\operatorname{arsh}(b) - \frac{b}{\sqrt{1+b^2}}) + b(\alpha_{10} + \frac{1}{3} \alpha_{12} b^2 + \right.$$
$$\left. \frac{1}{3} \beta_{21} b^2) (\operatorname{arsh}(b^{-1}) - \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}) \right) \quad (39)$$

若将积分区域取为 $\sigma'[-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}b < y < \frac{1}{2}b]$,则计算点 P 所在的 1 个网格对重力异常的贡献可采用类似方法得到:

$$\Delta g_4 = \frac{\gamma_0}{2\pi} \left(\frac{2b}{\sqrt{1+b^2}} (\alpha_{10} + \beta_{01}) + (\frac{1}{6} \alpha_{12} + 2\beta_{01} + \right.$$
$$\left. \frac{1}{6} \beta_{21}) (\operatorname{arsh}(b) - \frac{b}{\sqrt{1+b^2}}) + b(2\alpha_{10} + \frac{1}{6} \alpha_{12} b^2 + \right.$$
$$\left. \frac{1}{6} \beta_{21} b^2) (\operatorname{arsh}(b^{-1}) - \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}) \right) \quad (40)$$

3 中央区效应计算分析

选定中国南海 12°N ~ 18°N, 112°E ~ 118°E 海域作为试算区,以 EGM2008 地球重力场模型计算得到的 2' × 2' 分辨率的垂线偏差数据作为背景场,计算了该区域的中央区效应。

试算区共 179 × 179 个网格,假定中央区为 4' × 4', 即包含 4 个网格,利用式(9)、式(10)、式(39)计算了该区域的中央区效应,结果分别为 $\Delta g_1、\Delta g_2、\Delta g_3$, 计算结果之间的比较情况如表 1 所示。 $\Delta g_1 - \Delta g_3、\Delta g_2 - \Delta g_3$ 计算结果分别如图 3 和图 4 所示。

表 1 3 种方法计算结果之间的比较/mGal

Tab. 1 Comparisons of the Innermost Effects Computed by Three Methods/mGal

差值	最小值	最大值	标准差
$\Delta g_1 - \Delta g_3$	-1.229	1.276	0.142
$\Delta g_2 - \Delta g_3$	-1.192	1.156	0.129
$\Delta g_2 - \Delta g_1$	-0.199	0.128	0.024

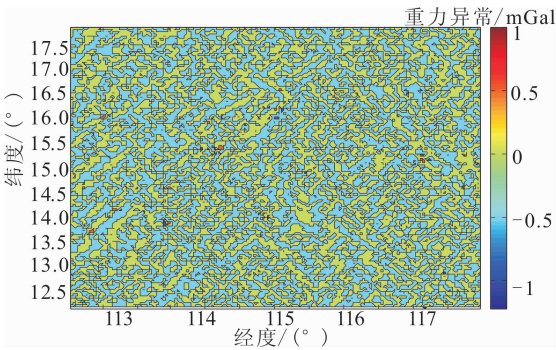


图 3 $\Delta g_1 - \Delta g_3$ 示意图

Fig. 3 The Sketch Map of $\Delta g_1 - \Delta g_3$

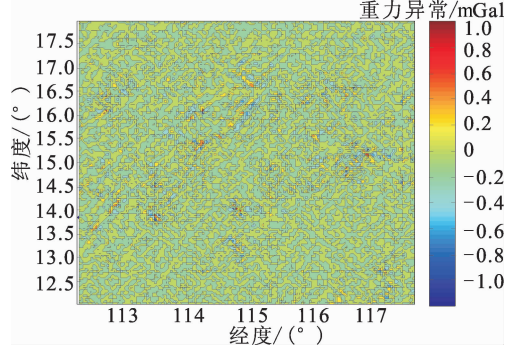


图 4 $\Delta g_2 - \Delta g_3$ 示意图

Fig. 4 The Sketch Map of $\Delta g_2 - \Delta g_3$

由表1、图3和图4可以看出,当中央区包含4个网格时,文献[5]给出的式(9)与本文导出的式(39)计算得到的中央区重力异常差值的标准差均为0.142 mGal,最大值达1.276 mGal;文献[9]给出的式(10)与本文导出的式(39)计算得到的中央区重力异常差值的标准差均为0.129 mGal,最大值达1.156 mGal。

4 结 语

为提高利用逆 Vening-Meinesz 公式反演中央区重力异常的精度,本文将中央区垂线偏差表示成双二次多项式插值形式,推导出了与实际数据分布更为相符的矩形域中央区效应精密计算公式,并利用模型数据计算分析了导出公式和传统公式的误差。研究表明:

1)非奇异变换可化逆 Vening-Meinesz 公式中的奇异积分为非奇异积分,可在其他地球重力场奇异积分问题中推广使用。

2)低纬度试算区 $2' \times 2'$ 分辨率垂线偏差数据下的中央区效应分析表明,当中央区包含4个网格时,传统公式与本文导出公式计算结果差值的均方差和标准差大于0.1 mGal,最大值大于1 mGal,需要在高精度测高重力计算中加以考虑。

参 考 文 献

- [1] Wang Zhenmin, Zang Baomin, Jiang Weiping, et al. Ocean Mass Variations in the South China Sea Inferred from Satellite Altimetry, GRACE, Oceanographic and Meteorological Data[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2018, 43(4): 571-577 (王泽民, 张保军, 姜卫平, 等. 联合卫星测高、GRACE、海洋和气象资料研究南海海水质量变化[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2018, 43(4): 571-577)
- [2] Wang Haihong, Luo Bei. Fast Numerical Algorithm for the Calculation of Altimetric Crossovers from Satellite Ground Tracks[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2017, 42(3): 293-298(汪海洪, 罗北. 计算测高卫星地面轨迹交叉点的快速数值算法[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2017, 42(3): 293-298)
- [3] Li Dawei, Li Jiancheng, Jin Taoyong, et al. Monitoring Global Sea Level Change from 1993 to 2011 Using TOPEX and Jason Altimeter Missions[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2012, 37(12): 1 421-1 424(李大伟, 李建
- 成, 金涛勇, 等. 利用多代卫星测高资料监测 1993—2011 年全球海平面变化[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2012, 37(12): 1 421-1 424)
- [4] Huang Motao, Ouyang Yongzhong, Liu Min, et al. Practical Methods for the Downward Continuation of Airborne Gravity Data in the Sea Area[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2014, 39(10): 1 147-1 152(黄漠涛, 欧阳永忠, 刘敏, 等. 海域航空重力测量数据向下延拓的实用方法[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2014, 39(10): 1 147-1 152)
- [5] Hwang C. Inverse Vening Meinesz Formula and Deflection-Geoid Formula: Applications to the Predictions of Gravity and Geoid over the South China Sea[J]. *Journal of Geodesy*, 1998, 72: 304-312
- [6] Wang Rui, LI Houpu. Calculation of Innermost Area Effects in Altimetry Gravity Recovery Based on the Inverse Stokes Formula[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2010, 35(4): 467-470 (王瑞, 李厚朴. 基于逆 Stokes 公式的测高重力反演中央区效应计算[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2010, 35(4): 467-470)
- [7] Li Houpu, Bian Shaofeng. The Improved Method of Calculating the Geoid Innermost Area Effects Using Deflections of the Vertical[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2011, 40(6): 730-735(李厚朴, 边少锋. 利用垂线偏差计算大地水准面中央区效应的改进方法[J]. 测绘学报, 2011, 40(6): 730-735)
- [8] Huang Motao, Wang Rui, Zhai Guojun, et al. Integrated Data Processing for Multi-satellite Missions and Recovery of Marine Gravity Field[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2007, 32(11): 988-993(黄漠涛, 王瑞, 翟国君, 等. 多代卫星测高数据联合平差及重力场反演[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2007, 32(11): 988-993)
- [9] Chang Xiaotao, Li Jiancheng, Zhang Chuanyin, et al. Deduction and Estimation of Innermost Zone Effects in Altimetry Gravity Algorithm[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2005, 48(6): 1 302-1 307(常晓涛, 李建成, 章传银, 等. 测高重力内区效应的推导与计算[J]. 地球物理学报, 2005, 48(6): 1 302-1 307)
- [10] Li Jiancheng, Chen Junyong, Ning Jinsheng, et al. The Approximation Theory of the Earth's Gravity Field and Determination of the 2000 Quasi Geoid in China[M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2003 (李建成, 陈俊勇, 宁津生, 等. 地球重力场逼近理论与中国 2000 似大地水准面的确定[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2003)

[11] Bian S F, Sun H Q. The Expression of Common Singular Integrals in Physical Geodesy[J]. *Manuscripta Geodaetica*, 1994, 19: 62-69

[12] Bian Shaofeng. Numerical Solution for Geodetic Boundary Value Problem and the Earth's Gravity Field Approximation[D]. Wuhan: Wuhan Technical University of Surveying and Mapping, 1992(边少锋. 大地测量边值问题数值解法与地球重力场逼近[D]. 武汉:武汉测绘科技大学, 1992)

[13] Bian Shaofeng . Some Cubature Formulas for Singular Integrals in Physical Geodesy [J]. *Journal of Geodesy*, 1997, 71: 443-453

[14] Bian Shaofeng, Xu Jiangning. The Computer Algebra System and Mathematical Analysis in Geodesy [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2004(边少锋, 许江宁. 计算机代数系统与大地测量数学分析[M]. 北京: 国防工业出版社, 2004)

[15] Li Houpu, Bian Shaofeng, Zhong Bin. Precise Analysis Theory of Geographic Coordinate System by Computer Algebra[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2015(李厚朴, 边少锋, 钟斌. 地理坐标系计算机代数精密分析理论[M]. 北京: 国防工业出版社, 2015)

Precise Calculation of Innermost Area Effects in Altimetry Gravity Based on the Inverse Vening-Meinesz Formula

LI Houpu¹ BIAN Shaofeng¹ JI Bing¹ CHEN Yongbing¹

¹ Department of Navigation, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China

Abstract: In order to improve the precision of the innermost area effects in altimetry gravity computed by the inverse Vening-Meinesz formula, deflections of the vertical are expressed as bi-quadratic polynomials regarding the innermost area as a rectangular one, and the formulas to calculate gravity anomaly of this area are derived after the non-singular transformation is introduced. A practical calculation is done based on deflections of the vertical data with a resolution of in the low latitude area. The results indicate that the maximal difference between the contributions of the innermost area including four grids calculated by traditional formulas and this paper's formulas is greater than 1 mGal. The formulas derived in this paper can provide theoretical basis for the innermost area effects in altimetry gravity with high precision.

Key words: satellite altimetry; inverse Vening-Meinesz formula; non-singular transformation; gravity anomaly; innermost area effects

First author: LI Houpu, PhD, associate professor, specializes in the mathematical analysis of geodesy. E-mail: lihoupu1985@126.com

Corresponding author: BIAN Shaofeng, PhD, professor. E-mail: sfbian@sina.com

Foundation support: The National Natural Science Foundation of China, Nos. 41631072, 41771487, 41474061.