



# 利用误差熵评价光斑中点云不确定性

陈西江<sup>1,2,3</sup> 花向红<sup>4</sup> 章光<sup>1</sup> 吴浩<sup>1</sup> 安庆<sup>5</sup>

1 武汉理工大学资源与环境工程学院,湖北 武汉,430079

2 武汉市测绘研究院博士后创新实践基地,湖北 武汉,430079

3 东华理工大学江西省数字国土重点实验室,江西 南昌,330013

4 武汉大学测绘学院,湖北 武汉,430079

5 武汉光谷北斗控股集团有限公司,湖北 武汉,430079

**摘要:**三维激光扫描点位精度受光斑影响较大,激光点在光斑中呈现了不确定性,该不确定性的准确描述关系到激光点位精度的评价。将误差熵模型引入到点位不确定性的评价中,利用激光点位在光斑中不确定性的概率密度函数,推导了激光点位信息熵,并依据误差熵与信息熵的关系得到了激光点位的误差熵。通过分析误差熵与光斑面积的关系,得到点云光斑平均误差熵,实现了将平均误差熵引入到点云不确定性的评价中。通过设置不同扫描间隔得到的点云数据,分析了平均熵模型进行基于光斑影响下的点云精度评价的可行性,最终实现了对光斑中点云不确定性的准确评价。

**关键词:**信息熵;误差熵;点云;光斑;不确定性

中图法分类号:P231

文献标志码:A

理论上激光射线是沿着发射光束中心线的方向,但实际上由于震动或系统误差的影响,激光射线可能会偏离激光束的中心方向,而激光束在目标物上会形成光斑,激光点的位置是光斑投影中的任意位置,从而体现了激光点位在光斑中的不确定性<sup>[1]</sup>。熵是信源平均不确定度的度量指标<sup>[2]</sup>,可以将信息熵引入到点位不确定性的评价中,对测量误差理论是很好的补充<sup>[3]</sup>。利用信息论综合法分析数字测量系统与量化误差之间的关系,克服了传统误差分析中不确定度与标准差之间的随意性,误差表达更合理。利用误差熵与方差之间的关系,实现测量不确定度的构建。激光束光斑对激光点位测量不确定度有很大影响<sup>[4,5]</sup>,确定光斑对点位不确定性的影响具有重要的意义。通过分析测量机制与测量结果的关系,可确定测量误差和测量结果的信息论数学模型<sup>[6]</sup>,信息熵模型为传统测量不确定度理论到测量信息论不确定度理论奠定了基础。目标颜色对点云不确定性也有较大的影响,构建该因素对点云精度影响模型具有重要价值<sup>[7]</sup>。在移动中扫描

的点云,Xu 从点、线、面三个方面计算了实验结果误差,确定了点云不确定性空间并对点云精度进行了评定<sup>[8]</sup>。

误差熵是一种广义上的不确定度评价方法,利用该方法对点云不确定性进行评价具有一定的普适意义。本文在文献[1]激光点位不确定性模型基础上,考虑入射角的影响,推导入射角影响下激光点位不确定性的概率密度函数,得到了激光点位信息熵。利用信息熵与误差熵的关系推导了激光点位误差熵模型,分析误差熵与光斑大小的关系。通过计算点云光斑的平均面积确定激光点位的平均信息熵和误差熵,分析平均熵模型进行点云精度评价的可行性。

## 1 光斑影响下的激光点位概率密度函数

### 1.1 光斑大小

光斑大小由激光波束宽度决定,是激光点位不确定性的范围。光斑大小的计算方法有很多

收稿日期:2016-10-17

项目资助:长江科学院开放研究基金(CKWV2015230/KY);国家自然科学基金(41501502, 41674005, 41304001, 41464001);东华理工大学江西省数字国土重点实验室开放研究基金(DLJ201601);武汉市测绘研究院博士后创新实践基地科研项目(WGF2016002);江西省教育厅科学技术研究项目(GJJ150592)。

第一作者:陈西江,博士,讲师,主要从事激光扫描数据处理理论与方法研究。jg\_0421@163.com

通讯作者:花向红,博士,教授。xxhua@sgg.whu.edu.cn

种,第一种光斑直径计算公式为<sup>[9]</sup>:

$$\delta = \sqrt{w_0^2 + c^2(S - R_0)} \quad (1)$$

式中,  $R_0$  为激光束腰半径;  $S$  为扫描距离;  $w_0$  为  $R_0$  处光斑直径;  $c$  为常数。在已知扫描距离  $S$  对应的光斑直径  $\delta$  的情况下,便可将  $c$  解算出来。

在已知光束发散角  $\gamma$ ,发射孔直径  $D_0$  的情况

$$\delta = \begin{cases} \sqrt{w_0^2 + c^2(S - R_0)^2}, & S \leq 2R_0 \\ 2(S - 2R_0) \cdot \tan(\frac{\gamma}{2} \cdot 10^{-6}) \cdot 10^3 + D_0, & S > 2R_0 \end{cases} \quad (3)$$

组合光斑直径模型顾及了  $D_0$  及  $S$  处光斑直径的影响,能够较为准确地对光斑大小进行计算。假定入射角为 0,则光斑大小即对应第一种光斑;如果入射角不为 0,则光斑在物体表面上就会产生投影,即光斑的形状变为椭圆,光斑长轴长度随入射角变化的公式为<sup>[10]</sup>:

$$D = \frac{S\beta}{\cos(\alpha)} = \frac{\delta}{\cos(\alpha)} \quad (4)$$

式中,  $\beta$  为激光波束宽度;  $S$  为扫描距离;  $\alpha$  为入射角;  $\delta$  为光斑直径(光斑短轴)。

假设圆形光斑半径为  $r_1$ ,经过入射角投影后光斑短轴长度为  $r_2$ ,激光原点到投影前光斑的距离为  $s$ ,激光照射到物体表面上的距离为  $s+h$ ,则投影类型如图 1 所示。

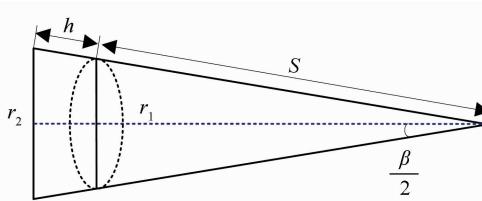


图 1 光斑短轴投影

Fig. 1 Short Axis Projection of Spot

根据图 1 中的三角关系,投影前后短轴长度的关系式为:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{s}{s+h} \quad (5)$$

由于  $s \gg h$ ,则有  $r_1 \approx r_2$ ,即光斑投影后的短轴长度与投影前光斑的直径相同。

## 1.2 激光点位概率密度函数

光斑大小直接影响角度及激光点位偏差,在入射角为 0 的情况下,光斑中激光点位概率密度函数为<sup>[1]</sup>:

$$P_b(\theta, \alpha) = \begin{cases} \frac{4}{\pi \delta^2}, & \alpha^2 + \theta^2 < \frac{\delta^2}{4} \\ 0, & \alpha^2 + \theta^2 \geq \frac{\delta^2}{4} \end{cases} \quad (6)$$

式中,  $\alpha$ 、 $\theta$  分别表示水平和垂直方向。

实际上入射角很多时候都不为 0,当入射角

下,距离  $S$  处的光斑直径为<sup>[10]</sup>:

$$\delta = 2S\tan(\frac{\gamma}{2} \cdot 10^{-6}) \cdot 10^3 + D_0 \quad (2)$$

在同时考虑  $D_0$ 、 $S$  及  $\delta$  影响的情况下,对两种不同光斑直径模型进行组合来计算光斑直径大小,其组合光斑直径模型为<sup>[10]</sup>:

$$\delta = \begin{cases} \sqrt{w_0^2 + c^2(S - R_0)^2}, & S \leq 2R_0 \\ 2(S - 2R_0) \cdot \tan(\frac{\gamma}{2} \cdot 10^{-6}) \cdot 10^3 + D_0, & S > 2R_0 \end{cases} \quad (3)$$

不为 0 的时候,光斑将会呈现椭圆状况。此时激光点位概率密度函数为<sup>[9]</sup>:

$$P_b(\theta, \alpha) = \begin{cases} \frac{4}{\pi D \delta}, \frac{\alpha^2}{D^2} + \frac{\theta^2}{\delta^2} \leq \frac{1}{4} \\ 0, \frac{\alpha^2}{D^2} + \frac{\theta^2}{\delta^2} > \frac{1}{4} \end{cases} \quad (7)$$

式中,  $D$ 、 $\delta$  为光斑椭圆长轴和短轴。

要得到激光点位概率密度函数,将 § 1.1 中光斑长轴和短轴代入到激光点位概率密度函数中,确定顾及入射角情况下的激光点位概率密度函数为:

$$P_b(\theta, \alpha) = \begin{cases} \frac{4\cos(\alpha)}{\pi \delta^2}, \alpha^2 \cos^2(\alpha) + \theta^2 \leq \frac{\delta^2}{4} \\ 0, \alpha^2 \cos^2(\alpha) + \theta^2 > \frac{\delta^2}{4} \end{cases} \quad (8)$$

## 2 基于误差熵的点云不确定性分析

### 2.1 基于光斑影响的点位误差熵模型

由顾及入射角情况下的激光点位概率密度函数,根据信息熵的定义可以得到激光点位信息熵为:

$$P' = - \iint \frac{4\cos(\alpha)}{\pi \delta^2} \ln \frac{4\cos(\alpha)}{\pi \delta^2} d_\alpha d_\theta = - \ln \frac{4\cos(\alpha)}{\pi \delta^2} \quad (9)$$

由误差熵的定义<sup>[2]</sup>,计算激光点位的误差熵为  $\Delta = \frac{1}{2} e^{P'}$ 。

由信息熵,得到误差熵为:

$$\Delta_{P'} = \frac{1}{2} e^{P'} = \frac{1}{2} e^{-\ln \frac{4\cos(\alpha)}{\pi \delta^2}} = \frac{\pi \delta^2}{8\cos(\alpha)} \quad (10)$$

### 2.2 点云误差熵模型与分子

由顾及入射角情况下的激光点位概率密度函数的范围可知光斑大小为:

$$S_a = \pi \frac{1}{\cos(\alpha)} \cdot \frac{1}{2} \delta \cdot \frac{1}{2} \delta = \frac{\pi \delta^2}{4\cos(\alpha)} \quad (11)$$

根据式(11)和式(10)可知误差熵与光斑面积关系为:

$$\Delta_{P'} = \frac{1}{2} S \quad (12)$$

从而确定误差熵是光斑面积的一半。因此,

激光点位不确定性的误差熵是投影到物体表面光斑面积的一半。假设投影到物体表面的光斑有  $N$  个,所有光斑的总面积为  $S_{\text{总}}$ ,平均光斑面积  $S_{\text{均}}$  平均误差熵  $\bar{\Delta}_P$  为:

$$S_{\text{均}} = \frac{S_{\text{总}}}{N} \quad (13)$$

$$\bar{\Delta}_P = \frac{1}{2} S_{\text{均}} \quad (14)$$

### 3 点云不确定性分析

#### 3.1 入射角对激光点位不确定性的影响

根据光斑大小与距离的关系、点位不确定性与光斑大小和入射角的关系,计算距离及入射角对点位不确定性的影响,结果如图 2 所示。将本文考虑入射角及距离与传统没有考虑入射角的方法进行对比分析,如图 3 所示。

由图 2 可知,随着距离、入射角的增加,激光点位误差熵呈现增大的趋势。入射角影响的误差熵曲线明显陡峭于距离影响的误差熵曲线。入射角对激光点位不确定性影响的敏感度在增强。误差熵受入射角变化趋势影响较大,受距离的影响较小,即入射角对激光点位不确定性的影响大于距离对激光点位不确定性的影响。由图 3 可知,传统的方法没有考虑入射角对点位误差熵的影响,在入射角很大的情况下,其点位误差熵依然很小,与实际点位误差熵不相符合,本文考虑了入射角对点位误差熵的影响,其计算的点位误差熵更加接近实际点位误差熵。由入射角对激光点位误差熵的影响可知,在入射角小于  $9^{\circ}$  时,可以不考虑其对点位不确定性的影响。当入射角大于  $25^{\circ}$

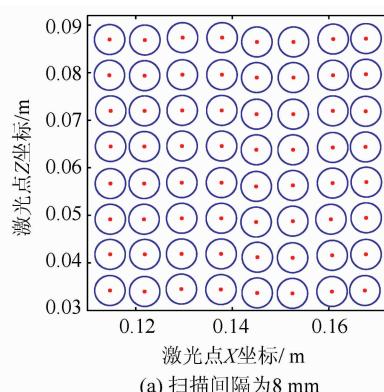


图 4 不同扫描间隔对应的光斑  
Fig. 4 Spot with Different Scan Interval

由图 4 可知,扫描间隔为 8 mm 时,相邻光斑无交集;扫描间隔为 5 mm 时,相邻光斑存在交

集。对点位不确定性的影响超过了 10%,此时需要考虑入射角的影响。由图 3 左图可知,在 10 m 以内可以不考虑距离对激光点位不确定性的影响。

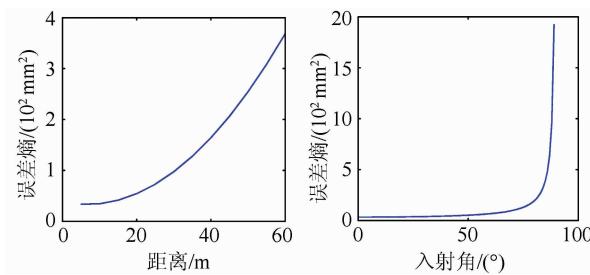


图 2 距离、入射角对点位误差熵的影响

Fig. 2 Laser Position Error Entropy under the Influence of Range and Incidence Angle

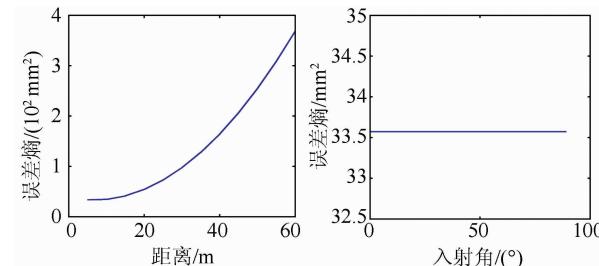
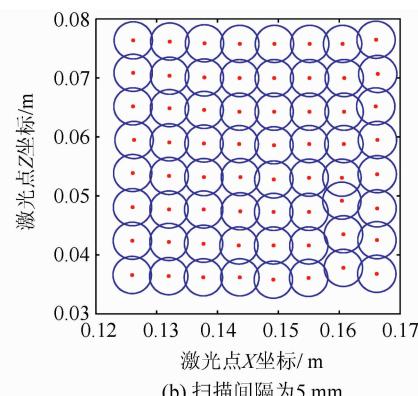


图 3 距离对点位误差熵的影响

Fig. 3 Laser Position Error Entropy under the Influence of Range

#### 3.2 点云不确定性实例分析

采用 RIEGL VZ-400 三维激光扫描仪对某个平面进行扫描,扫描间隔分别设置为 5 mm,8 mm,由激光波束宽度  $\beta$  及扫描距离  $S$  经过  $S\beta$  计算得到不考虑光斑投影下的光斑短轴  $\delta$ ,由式(5)可知,入射角对光斑短轴基本没有影响,从而得到考虑入射角情况下的光斑短轴,由式(4)计算每个点光斑的长轴,如图 4 所示。



集。利用式(9)、式(10)计算不同扫描间隔下每个点对应的信息熵及误差熵,结果如表 1 所示。

由表 1 可知,扫描间隔为 5 mm 与 8 mm 的信息熵和误差熵相差很小。因此在相同距离扫描同一个目标,扫描间隔对单个激光点位的信息熵和误差熵的影响可忽略不计。

表 1 激光点位熵

Tab. 1 Laser Point Entropy

扫描间隔	激光点				
	1	2	...	64	
5 mm	$p'$	3.546 8	3.546 8	...	3.546 7
	$\Delta p'$	17.351 6	17.351 2	...	17.35
8 mm	$p'$	3.546 7	3.546 7	...	3.546 7
	$\Delta p'$	17.348 8	17.349 3	...	17.35

根据每个光斑误差熵的计算结果,在不考虑光斑相交的情况下,利用式(14)计算平均误差熵,结果如图 5(a)所示。

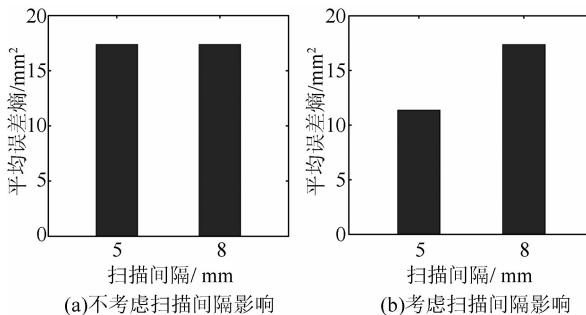


图 5 激光点云平均误差熵

Fig. 5 Average Error Entropy of Laser Point

由图 5(a)可知,不同扫描间隔的平均误差熵几乎相同,由激光点位不确定性所造成的点云不确定性相同。由图 4 可知,光斑与光斑之间存在交集,即存在重复面积,而由误差熵与光斑面积的关系可知,误差熵反应的是光斑面积的一半,如果单纯的利用总的光斑误差熵的平均数作为平均误差熵,就会造成误差熵的重合。为了准确的表示平均误差熵,利用扫描物体包围的光斑实际面积来计算平均光斑面积,再根据误差熵与光斑面积的关系得到平均误差熵,由图 3 光斑大小及椭圆相交面积的计算原则可解得扫描物体包围的光斑实际面积,再由计算的实际面积得到平均误差熵,结果如图 5(b)所示。

由图 5(b)可知,虽然总误差熵相等,但在考虑了光斑相交情况下,扫描间隔为 5 mm 的平均误差熵要小于扫描间隔为 8 mm 的平均误差熵。即扫描间隔为 5 mm 的光斑造成的误差带要小于扫描间隔为 8 mm 的情况。因此在相同距离扫描情况下,扫描间隔为 5 mm 的点云不确定性更小,整个点云的误差区间更小。

## 4 结语

激光光斑造成了点位在光斑中的不确定性,由于误差熵是信息量不确定性的度量指标。本文将误差熵引入到光斑影响下点云不确定性的评价中。利用点位概率密度函数,推导了激光点位在光斑中的误差熵,从而得到误差熵与光斑面积的函数关系;在相邻光斑存在交集的情况下,通过计算点云光斑平均面积得到平均误差熵,实现了对基于光斑影响的点云不确定性的评价。

在相邻光斑存在交集的情况下,利用误差熵与光斑面积的关系式,得到不同扫描间隔的点云所对应的平均误差熵。光斑相交面积越大,平均误差熵也就越小,受光斑影响的点云误差空间也就越小,点云不确定性也就越小。

将点云平均误差熵作为点云不确定性的度量指标,该度量指标考虑了相邻光斑重合的情况,是一种平均意义上的度量指标。采用误差熵可以更加准确的对光斑中点位不确定性进行评价,能够描述点云误差区间实际情况。

在入射角影响下,光斑投影到目标上的大小呈现不平衡的特点,利用误差熵对点云不确定性进行研究可以反映点云误差区间的实际情况,具有统一的评价指标。

## 参 考 文 献

- [1] Lichti D D, Gordon S J. Error Propagation in Directly Georeferenced Terrestrial Laser Scanner Point Clouds for Cultural Heritage Recording[C]. Proc. of FIG Working Week, Athens, Greece, 2004
- [2] Zhou Fangbing. Entropy of Surveying Data Error Distribution and Application[D]. Changsha: Central South University, 2014(周访滨. 测量数据误差分布的熵及其应用研究[D]. 长沙:中南大学,2014)
- [3] Cai Jianhong. A New Measure of Positional Error [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2009, 38(3): 276-279(蔡剑红. 一种新的点位误差度量[J]. 测绘学报, 2009, 38(3): 276-279)
- [4] Chen Xijiang, Hua Xianghong, Qiu Weining, et al. Accuracy Evaluation of Point Cloud Angular Resolution[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2013, 38(9): 1 044-1 047(陈西江,花向红,邱卫宁,等. 点云角度分辨率精度评定[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2013, 38(9): 1 044-1 047)
- [5] Yang Ronghua, Hua Xianghong, Qiu Weining, et al. Research on the Point Cloud Angular Resolution

- of Terrestrial Laser Scanners [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*. 2012, 37(7):851-853(杨荣华,花向红,邱卫宁,等.地面三维激光扫描点云角度分辨率研究[J].武汉大学学报·信息科学版,2012,37(7):851-853)
- [6] Tong Ling, Chen Guangyu, Lv Wen. Information Entropy and Error Entropy of Measurement Data [J]. *Journal of University of Electronic Science and Technology of China*, 2007, 36(5):935-937(童玲,陈光裕,吕文.测量数据的信息熵与测量误差熵研究[J].电子科技大学学报,2007,36(5):935-937)
- [7] Li Jialong, Zheng Dehua, He Li, et al. The Effects of Known Color and Incidence Angle on the Accuracy of Trimble GX 3D Scanning Point Cloud[J]. *Engineering of Surveying and Mapping*, 2012, 21 (5):75-79(李佳龙,郑德华,何丽,等.目标颜色和
- 入射角对 Trimble GX 扫描点云精度的影响[J].测绘工程,2012,21(5):75-79)
- [8] Xu Gong, Cheng Xiaojun. Accuracy Assessment and Application Analysis of Point Clouds in Mobile Surveying System[J]. *Geotechnical Investigation & Surveying*, 2013, (1)9:42-46(徐工,程效军.移动测量系统点云精度评定及应用分析[J].工程勘察,2013,(1)9:42-46)
- [9] Lichti D D. Angular Resolution of Terrestrial Laser Scanners [J]. *The Photogrammetric Record*, 2006, 21(14):141-160
- [10] Yang Ronghua. Research on Point Cloud Angular Resolution and Processing Model of Terrestrial Laser Scanning[D]. Wuhan: Wuhan University, 2011 (杨荣华.地面三维激光扫描点云角度分辨率与数据处理模型研究[D].武汉:武汉大学,2011)

## Using Error Entropy to Evaluate Point Cloud Uncertainty Influenced by Spot

CHEN Xijiang<sup>1,2,3</sup> HUA Xianghong<sup>4</sup> ZHANG Guang<sup>1</sup> WU Hao<sup>1</sup> AN Qing<sup>5</sup>

1 School of Resource and Environment Engineering, Wuhan University of Technology, Wuhan, 430079, China.

2 Postdoctors Innovation and Practice Base of Wuhan Geomatics Institute, Wuhan 430079, China.

3 Key Laboratory for Digital Land and Resources of Jiangxi Province, East China University of Technology, Nanchang 330013, China

4 School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan 430079, China

5 Wuhan Optics Valley Bei Dou Holding Group Company, Wuhan 430079, China

**Abstract:** The spot influences the positional accuracy of terrestrial laser scanning. A Laser point in the spot is uncertain and the description of this uncertainty directly relates to the evaluation of positional accuracy. This paper introduces error entropy into the evaluation of point cloud uncertainty related to the spot. Point information entropy is deduced by using The probability density function of the laser point in the spot; and error entropy is obtained based on the relationship between error entropy and information entropy and evident in the relationship between error entropy and spot size; introducing average error entropy into the evaluation of point cloud uncertainty. The evaluation of average error entropy as a measure of point cloud accuracy influenced by laser spot was verified by an analysis of different scanning intervals, thus an evaluation of point cloud uncertainty influenced by the spot was realized.

**Key words:** information entropy; error entropy; point cloud; spot; uncertainty

**First author:** CHEN Xijiang, PhD, lecturer, specializes in terrestrial laser scanning. E-mail: jg\_0421@163.com

**Corresponding author:** HUA Xianghong, PhD, professor. E-mail: xxhua@sgg.whu.edu.cn

**Foundation support:** CRSRI Open Research Program, No. CKWV2015230/KY; the National Natural Science Foundation of China, Nos. 41501502, 41674005, 41304001, 41464001; the Key Laboratory for Digital Land and Resources of Jiangxi Province, East China University of Technology, No. DLLJ201601; the Open Foundation of Postdoctors Innovation and Practice Base of Wuhan Geomatics Institute, No. WGF2016002; the Science and Technology Research Project of Jiang Xi Education Department, No. GJJ150592.