

# 一种铁路既有线纵断面圆曲线拟合新方法

马洪磊<sup>1,2</sup> 刘成龙<sup>3</sup> 宋 韶<sup>3</sup> 邹 汀<sup>3</sup> 杨雪峰<sup>3</sup>

1 中铁第一勘察设计院集团有限公司,陕西 西安, 710043

2 中铁第一勘察设计院轨道交通工程信息化国家重点实验室,陕西 西安, 710043

3 西南交通大学地球科学与环境工程学院,四川 成都, 611756

**摘要:**为保持或提高轨道的平顺性,需要经常对轨道进行整正。纵断面线形拟合是铁路既有线纵断面整正的关键步骤,纵断面拟合线形决定了轨道纵断面调整的合理性。圆曲线拟合是铁路既有线纵断面拟合的重要组成部分,铁路纵断面上的圆曲线具有弧长短、半径大的特点,难以拟合出准确的、符合铁路纵断面线形特点的圆曲线参数。针对上述问题,结合铁路纵断面圆曲线圆心在与其相邻的直线坡段所夹的内角平分线上和圆心到相邻直线坡段的距离等于圆曲线半径的特点,提出了一种适用于铁路纵断面圆曲线拟合的方法。该方法具有拟合参数少、拟合准确度高的特点,且所得圆曲线参数符合铁路纵断面线形特点,可为铁路既有线纵断面圆曲线拟合提供参考。

**关键词:**既有线;纵断面;圆曲线;拟合;线形特点

**中图法分类号:**P258

**文献标志码:**A

铁路既有线经过长期运营,轨道的空间位置会发生变化,若不及时对其进行检测和维护,严重时可能危害列车行车安全。因此,需要定期对铁路既有线的几何状态进行检测,必要时对铁路既有线进行整正。根据轨道实测线形进行铁路既有线的整正时,目标线形是铁路既有线整正的前提和基础。对铁路既有线实测线形进行重构的主要方法包括基于方向加速法的线形重构方法<sup>[1]</sup>和线形拟合方法等。其中,线形拟合是比较常用的方法。目前,国内已有一些学者对铁路既有线纵断面线形的拟合方法进行了研究,主要包括常规最小二乘线形拟合方法<sup>[2]</sup>,基于正交最小二乘原理的纵断面线形拟合方法<sup>[3-5]</sup>,以及基于整体最小二乘原理<sup>[6,7]</sup>的纵断面线形拟合方法<sup>[8]</sup>等。实践中发现,以上三种纵断面线形拟合方法均不能准确拟合出纵断面上圆曲线的线形参数,即所得线形参数不符合铁路纵断面线形特点。这是由于纵断面上各圆曲线段长度较短且半径较大(即弧径比较小<sup>[9]</sup>)等原因造成的。

针对现有拟合方法存在的问题,本文提出了一种新的纵断面圆曲线拟合方法。该方法仅对纵断面圆曲线的单一参数进行拟合,能较准确地计

算出纵断面上各圆曲线段的线形参数,且所得圆曲线参数符合铁路纵断面线形特点,是对现有拟合方法的一种改进。

## 1 弧径比大小对拟合的影响分析

文献[9]指出,当弧径比很小时,即使圆弧上测点的点位误差很小,也会对所拟合的圆心坐标和半径产生较大的不良影响<sup>[9]</sup>。精密制造业中,通常将圆心角小于30°的圆弧称为短圆弧,又称劣弧<sup>[10]</sup>,弧径比很小的圆弧的实质就是劣弧<sup>[10]</sup>。为验证文献[9]中论点的正确性,笔者利用基于正交最小二乘原理的纵断面圆曲线拟合方法<sup>[4]</sup>,以某段高速铁路纵断面上间隔约为0.625 m的点的设计里程和高程(设计里程和高程均精确至0.1 mm)为拟合采样数据进行拟合计算。其中,纵断面上各圆曲线半径的拟合结果与设计值的比较情况见表1。

表1中,R表示圆曲线半径拟合值,圆心里程表示圆心对应的中线里程,圆心高程表示圆心位置的高程,偏差表示参数拟合值与设计值之差。

表 1 某段高速铁路纵断面圆曲线参数拟合结果对比情况表/m

Tab. 1 Comparison Between Circular Curve Parameters Fitting Results in a Profile of a High-speed Rail/m

项目	弧径比	R	半径偏差	圆心里程	里程偏差	圆心高程	高程偏差
圆曲线 1	1/250	15 003.169 1	3.169 1	13 769.840 8	-0.006 4	15 580.780 1	3.169 1
圆曲线 2	1/250	14 997.418 9	-2.581 1	15 316.954 6	-0.003 3	-14 413.858 9	2.581 1
圆曲线 3	1/83	10 000.868 4	0.868 4	19 094.451 7	0.014 0	-9 391.231 0	-0.868 3

由表 1 可知,即使铁路纵断面圆曲线上的测点仅包含非常微小的误差,也将对圆曲线拟合结果产生较大的不良影响,半径偏差和圆心高程偏差的最大值甚至超过了 3 m。这也验证了文献[9]中弧径比过小(即弧长所对应的圆心角过小)会对圆曲线拟合产生不良影响的观点。此外,圆曲线的拟合圆心位置偏差也比较大。文献[4]对该问题的处理方法是将拟合圆心垂直投影至与该圆曲线前后相接的两直线的内角(通常为钝角)平分线上,但这种处理方法是一种简易的处理方法,理论不够严密,因此,需要探索更加严密的解决方法。

## 2 附有约束条件的纵断面圆曲线拟合方法及精度评定

### 2.1 拟合方法

铁路纵断面线形由直线和圆曲线组成,因此,铁路既有线纵断面线形拟合包括直线拟合和圆曲线拟合。实践中发现,利用文献[3,4]方法进行纵断面线形拟合时,均能获得较准确的直线参数,但所得圆曲线参数却不符合铁路纵断面线形特点。因此,本文主要对铁路既有线纵断面上的圆曲线拟合问题进行研究。

结合铁路纵断面线形特点,本文提出了一种铁路既有线纵断面圆曲线拟合新方法,具体操作流程如下。

1) 对铁路纵断面实测数据进行分段。分段结果的好坏将直接影响纵断面线形拟合结果的质量。因此,建议采用精确的纵断面分段方法,详见参考文献[3,4];

2) 对纵断面上各直线段进行拟合(拟合方法参考文献[2-8]),获得纵断面上各直线段的斜率  $k_i$  和截距  $b_i$ ,其中  $i=1,2,3\cdots$ ;

3) 计算各相邻直线段所构成内角平分线(如图 1 所示)的斜率  $g_i$  和截距  $c_i$ , $i=1,2,3\cdots$ ;

4) 对纵断面上各圆曲线段进行拟合,获得各圆曲线段的线形参数。纵断面圆曲线拟合方法如下。

设某纵断面圆曲线圆心位置(圆心点对应的



图 1 某段铁路纵断面线形示意图

Fig. 1 Schematic Diagram of a Railway Profile Alignment

中线里程、圆心点高程)和圆曲线半径分别为  $(M_0, H_0)$  和  $R$ ,则该纵断面圆曲线可表示为:

$$(m_i - M_0)^2 + (h_i - H_0)^2 = R^2 \quad (1)$$

式中,  $m_i$  和  $h_i$  为测点的中线里程和高程。

由铁路纵断面上的圆曲线与其相邻直线相切的特点可知,铁路纵断面圆曲线的圆心位于与该圆曲线前后相接的两直线所构成的内角平分线上,即圆心点高程与圆心点对应的中线里程存在如下关系:

$$H_0 = M_0 \cdot g + c \quad (2)$$

式中,  $g$  和  $c$  分别表示与该圆曲线前后相接的两直线内角平分线的斜率和截距。

由圆曲线和与其前后相接的直线相切的特点可知,圆心至其前后相接直线的垂直距离即为该圆曲线的半径  $R$ :

$$R = |k \cdot M_0 - H_0 + b| / \sqrt{k^2 + 1} \quad (3)$$

式中,  $k$  和  $b$  分别表示与该圆曲线前后相接的直线斜率和截距。

将式(2)和式(3)代入到式(1)中并化简可得:

$$A \cdot M_0^2 + B_i \cdot M_0 + C_i = 0 \quad (4)$$

式中,  $A = (g \cdot k + 1)^2$ ;  $B_i = 2[(k^2 + 1)(g \cdot c - h_i \cdot g - m_i) - (k - g)(b - c)]$ ;  $C_i = (k^2 + 1)(m_i^2 + h_i^2 + c^2 - 2h_i \cdot c) - (b - c)^2$ 。

由式(4)可得纵断面上圆曲线段的误差方程,线性化后的误差方程如下:

$$v_i = (2A \cdot M_0^2 + B_i) \delta_{M_0} + A \cdot M_0^2 + B_i \cdot M_0^2 + C_i \quad (5)$$

式中,  $v_i$  为圆曲线模型拟合残差;  $M_0^2$  为圆心位置对应的中线里程的近似值;  $\delta_{M_0}$  为圆心里程的改正数。

$$\text{令 } \mathbf{l} = - \begin{bmatrix} A \cdot M_0^2 + B_1 \cdot M_0 + C_1 \\ \vdots \\ A \cdot M_n^2 + B_n \cdot M_0 + C_n \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2A \cdot M_0 + B_1 \\ \vdots \\ 2A \cdot M_0 + B_n \end{bmatrix}, \text{则式(5)可转化为:}$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{B} \cdot \delta_{M_0} - \mathbf{l} \quad (6)$$

设观测值权阵为  $\mathbf{P}$ (常取  $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ ), 可得式(6)的最小二乘解:

$$\delta_{M_0} = (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \quad (7)$$

进而可求出圆曲线段的线形参数:

$$\begin{cases} \hat{M}_0 = M_0 + \delta_{M_0} \\ \hat{H}_0 = g \cdot \hat{M}_0 + c \\ \hat{R}_0 = |k \cdot \hat{M}_0 - \hat{H}_0 + b| / \sqrt{k^2 + 1} \end{cases} \quad (8)$$

式中,  $\hat{M}_0$ 、 $\hat{H}_0$ 、 $\hat{R}_0$  分别为该圆曲线拟合线形的圆心里程、圆心高程和圆曲线半径。

通过以上步骤,便可计算出该圆曲线段的线形参数。该方法首先对纵断面上的各直线段进行拟合,获得各直线段的线形参数(斜率和截距);然后利用铁路纵断面线形特点和各直线段的线形参数,获得圆曲线参数的一些限制条件(如式(2)、式(3)),进而仅对纵断面上各圆曲线的单一参数进行拟合,就可获得符合铁路纵断面线形特点的所有圆曲线参数。

## 2.2 精度评定

为评价 § 2.1 中该圆曲线拟合线形参数的准确程度,本文通过计算参数中误差来进行精度评定。

首先,计算验后单位权中误差:

$$\hat{\sigma}_o = \sqrt{\frac{\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V}}{n-t}} \quad (9)$$

式中,  $n-t$  为多余观测数,即平差模型的自由度。

其次,由协因数传播定律知,未知参数的协因数阵为:

$$\mathbf{Q}_{M_0} = (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \quad (10)$$

由于未知参数唯一,则圆心里程的中误差(与其改正数的中误差相同)为:

$$\sigma_{M_0} = \hat{\sigma}_o \cdot \sqrt{\mathbf{Q}_{M_0}} \quad (11)$$

进而依据误差传播定律,获得圆心高程和圆曲线半径的中误差为:

$$\begin{cases} \sigma_{H_0} = g \cdot \sigma_{M_0} \\ \sigma_{R_0} = |k-g| \cdot \sigma_{M_0} / \sqrt{k^2 + 1} \end{cases} \quad (12)$$

## 3 对比分析

为验证本文提出的铁路纵断面圆曲线拟合方法的正确性和可行性,笔者以某高铁上间隔约为 0.625 m 的点的设计里程和高程作为拟合采样数据,分别利用本文所述的铁路纵断面圆曲线拟合新方法(此处简称方法 2)和文献[4]中的铁路纵断面圆曲线拟合方法(此处简称方法 1)对其进行拟合,纵断面上各圆曲线段的拟合参数对比情况如表 2 所示。表 2 包含 5 个纵断面圆曲线半径。表 3 为两种拟合方法圆心位置拟合结果对比情况表。表 2 中的 5 个圆曲线与表 3 中的 5 个圆曲线一一对应。

由表 2、表 3 可知,利用本文方法所得纵断面的圆曲线参数与设计参数的差异总体上更小,优于文献[4]方法。此外,本文方法所得的纵断面圆曲线圆心位置位于与该圆曲线前后相接的两直线所夹的内角平分线上,符合铁路纵断面圆曲线的线形设计要求。

## 4 结语

本文提出的铁路纵断面圆曲线拟合方法是一种更符合铁路纵断面线形特点的方法。该方法解决了原有拟合方法所得圆心位置偏离与圆曲线前后相接的两直线所夹内角平分线的问题,所得圆曲线参数符合铁路纵断面线形设计要求,无须进

表 2 两种拟合方法半径拟合结果对比情况表/m

Tab. 2 Comparison of Radius Fitting Results Between Two Fitting Methods/m

项目	半径 1	半径 2	半径 3	半径 4	半径 5
设计值	15 000.000	15 000.000	15 000.000	10 000.000	10 000.000
方法 1	15 003.169	15 000.008	14 999.426	9 999.908	10 000.868
差值	3.169	0.008	-0.574	-0.092	0.868
方法 2	15 000.165	14 999.951	14 999.969	9 999.985	10 000.122
差值	0.165	-0.049	-0.031	-0.046	0.122

注:差值为拟合半径与设计值之差。

表 3 两种拟合方法圆心位置拟合结果对比/m

Tab. 3 Comparison of Fitting Results in Circle Center Position Between Two Fittings Methods/m

项目	圆心 1	圆心 2	圆心 3	圆心 4	圆心 5
圆心里程 <sub>1</sub>	13 769.840 8	16 152.757 6	17 554.449 8	18 131.964 6	19 094.451 7
圆心里程 <sub>1</sub> 与设计值之差	-0.006 4	-0.000 5	-0.002 1	0.001 0	0.014 0
圆心高程 <sub>1</sub>	15 580.780 1	15 583.568 3	-14 404.466 3	10 594.868 0	-9 391.231 0
圆心高程 <sub>1</sub> 与设计值之差	3.169 1	0.008 3	0.573 7	-0.092 0	-0.868 3
圆心里程 <sub>2</sub>	13 769.847 3	16 152.758 5	17 554.450 4	18 131.963 2	19 094.433 5
圆心里程 <sub>2</sub> 与设计值之差	0.000 1	0.000 4	-0.001 4	-0.000 4	-0.004 2
圆心高程 <sub>2</sub>	15 577.302 4	15 583.437 8	-144 04.877 4	10 594.942 8	-9 390.146 8
圆心高程 <sub>2</sub> 与设计值之差	-0.308 6	-0.122 2	0.162 6	-0.017 2	0.215 8

注:下标 1 和 2 分别表示方法 1 和方法 2。

一步投影换算,更加充分地利用了外业观测数据和铁路纵断面线形特点,减少了圆曲线拟合参数的个数,增加了多余观测量。对于普速铁路,纵断面圆曲线上实测点较少,该方法拟合效果更加明显。因此,本文推导的铁路既有线纵断面圆曲线拟合模型是一种具有可行性的铁路纵断面圆曲线拟合模型,有待工程进一步验证。

## 参 考 文 献

- [1] Li Wei, Pu Hao, Peng Xianbao. Existing Railway Plane Line Reconstruction Algorithm Based on Direction Acceleration Method[J]. *Journal of Railway Science and Engineering*, 2009, 6(3): 47-51 (李伟,蒲浩,彭先宝. 基于方向加速法的铁路既有线平面重构优化算法[J]. 铁道科学与工程学报, 2009, 6(3): 47-51)
- [2] Peng Jianqiu, Liu Chenglong, Peng Pan, et al. Practical Linear Measurement and Calculation Method of Railways[J]. *Railway Investigation and Surveying*, 2010, 2; 4-7 (彭剑秋,刘成龙,彭攀,等. 铁路实际线形测量与计算方法的研究[J]. 铁道勘察, 2010, 2; 4-7)
- [3] Chen Haijun. Study of Algorithm on Optimization Design of Existing Railway Ballast Track and Software Development[D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2013 (陈海军. 既有线有砟轨道优化线形算法研究及其软件研制[D]. 成都:西南交通大学, 2013)
- [4] Song Tao. Algorithm Research on Optimization Design Existing Railway Adjustment [D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2014 (宋韬. 铁路既有线整正优化相关算法研究[D]. 成都:西南交通大学, 2014)
- [5] Ding Keliang, Liu Quanli, Chen Xiang. Fitting of Circles Based on Orthogonal Distance[J]. *Science of Surveying and Mapping*, 2009, S1: 72-74 (丁克良, 刘全利, 陈翔. 正交距离圆曲线拟合方法[J]. 测绘科学, 2009, S1: 72-74)
- [6] Yao Yibin, Huang Shuhua, Kong Jian, et al. Total Least Squares Algorithm for Fitting Spatial Straight Lines[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2014, 39(5): 571-574 (姚宜斌, 黄书华, 孔建, 等. 空间直线拟合的整体最小二乘算法[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2014, 39(5): 571-574)
- [7] Liu Jingnan, Zeng Wenxian, Xu Peiliang. Overview of Total Least Squares Methods[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2013, 38(5): 505-512 (刘经南, 曾文宪, 徐培亮. 整体最小二乘估计的研究进展[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2013, 38(5): 505-512)
- [8] Ding Keliang, Shen Yunzhong, Ou Jikun. Methods of Line-fitting Based on Total Least-squares [J]. *Journal of Liaoning Technical University(Natural Science)*, 2010, 1: 44-47 (丁克良, 沈云中, 欧吉坤. 整体最小二乘法直线拟合[J]. 辽宁工程技术大学学报:自然科学版, 2010, 1: 44-47)
- [9] Chen Feng, Gu Liangyao, Yang Yue, et al. Optimum Method for Horizontal Curve Re-surveying of the Existing Railway[J]. *Journal of Railway Science and Engineering*, 2012, 9(5): 90-95 (陈峰, 姜良瑶, 杨岳, 等. 铁路既有线复测平面曲线优化方法[J]. 铁道科学与工程学报, 2012, 9(5): 90-95)
- [10] Dong Lianghai, Ping Xia. Discussion on the Short Arc Measurement[C]. Jiangsu Province Measurement and Testing Academic Proceeding, Nanjing, China, 2010 (董良海, 平夏. 关于短圆弧测量问题探讨[C]. 江苏省计量测试学术交流会议, 南京, 2010)

# A New Fitting Method of Profile Circular Curve of Existing Railway

MA Honglei<sup>1,2</sup> LIU Chenglong<sup>3</sup> SONG Tao<sup>3</sup> ZOU Bang<sup>3</sup> YANG Xuefeng<sup>3</sup>

1 China Railway First Survey and Design Institute Group Ltd., Xi'an 710043, China

2 State Key Laboratory of Rail Transit Engineering Informatization(FSDI), Xi'an 710043, China

3 Faculty of Geosciences and Environmental Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China

**Abstract:** In order to maintain and improve the smoothness of railroad tracks, they must be adjusted frequently. Profile fitting is a key step in the adjustment of existing railway lines; the fitting linear of profile determines if track profile adjustment is reasonable and necessary. Circular curve fitting is essential to profile fitting of the existing railway lines. The circular curves on railway profile have short arcs and long radii, which results in difficulties when fitting accurate curve parameters, in conformity with railway profile linear characteristics. In this paper, we provide a new fitting method applicable to circular curves in railway profiles, according to two characteristics. This method has fewer fitting parameters, and higher fitting accuracy characteristics. In addition, the resulting circular curve parameters meet the profile rail linear requirements, which can provide a reference for existing railway line profile circular curve fitting.

**Key words:** existing railway line; profile; circular curve; fitting; linear characteristic

**First author:** MA Honglei, master, specializes in engineering survey of high speed railway. E-mail: 315154754@qq.com

**Foundation support:** Research on the Measurement Assurance System of the Geometric Condition and State of the High Speed Railway Line, No. 2015KTZDGY01-03.